

16. (a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$; (б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^{\alpha}}$; (в) $\sum_{n=1}^{\infty} (n^{n^{\alpha}} - 1)$

решение

(a) $\ln(n!) \sim \ln(\sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}) = \ln \sqrt{2\pi} + \frac{1}{2} \ln n +$

Стеirlingova
апроксимација
свр. 139

$+ n \ln n - n \sim n \ln n, n \rightarrow \infty$

$\Rightarrow \frac{1}{\ln(n!)} \sim \frac{1}{n \ln n}, n \rightarrow \infty$ и $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ глв. (заг. 14. (б))

2. сер. кр. $\Rightarrow$ глв. глв. итд.

(б) као у (a): $\ln(n!) \sim n \ln n, n \rightarrow \infty$

$\Rightarrow \frac{\ln(n!)}{n^{\alpha}} \sim \frac{n \ln n}{n^{\alpha}} = \frac{1}{n^{\alpha-1} (\ln n)^{-1}}, n \rightarrow \infty$

и $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1} (\ln n)^{-1}}$ контв. за $\alpha-1 > 1$ (заг. 14. (б))

2. сер. кр. $\Rightarrow$ глв. рег контв. за $\alpha > 2$.

(в) $1^{\circ} \alpha > 0$ $n^{n^{\alpha}} \rightarrow \infty \Rightarrow a_n \rightarrow \infty$ па рег глв. јер

није могуће нестиснути глв

$2^{\circ} \alpha = 0$ $n^{n^{\alpha}} = n \Rightarrow a_n \rightarrow \infty$ — || —

$$3^\circ \alpha < 0$$

$$n^{n^\alpha} = e^{\ln(n^{n^\alpha})} = e^{n^\alpha \cdot \ln n} \sim 1 + n^\alpha \ln n, \quad n \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow a_n \sim n^\alpha \ln n, \quad n \rightarrow \infty$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{-\alpha} (\ln n)^{-1}} \text{ кoнв. зa } -\alpha > 1 \xrightarrow{\text{2. cлoв. кp.}} \text{ пep. кoнв.}$$

$$\text{зa } \alpha < -1. \quad \square$$

$$17. (a) \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1 \right); \quad (b) \sum_{n=4}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{3}{n} \right) \arctg \left(\frac{n^5 + n^3 + 1}{n^4 + n^2 + n} \right) \quad (54 \# 1)$$

решение

$$(a) \quad a_n = e^{\ln n^{\frac{1}{n^2+1}}} - 1 = e^{\frac{\ln n}{n^2+1}} - 1 \sim 1 + \frac{\ln n}{n^2+1} - 1 \sim$$

$$\sim \frac{\ln n}{n^2} = \frac{1}{n^2 (\ln n)^{-1}}, \quad n \rightarrow \infty \quad \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (\ln n)^{-1}} \text{ кoнв.}$$

$$(\text{зaг. 20}) \xrightarrow{\text{2. cлoв. кp.}} \text{ кoнв. гaммa пep.}$$

$$(b) \quad \ln \left(1 - \frac{3}{n} \right) \arctg \left(\frac{n^5 + n^3 + 1}{n^4 + n^2 + n} \right) \sim -\frac{3}{n} \cdot \frac{\pi}{2} \sim \frac{1}{n}, \quad n \rightarrow \infty$$

$$\sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ гyб. } \xrightarrow{\text{2. cлoв. кp.}} \text{ гyб. гaммa пep. } \quad \square$$

Редови са произвольним знаковима

Теорема (Лајбницов лемма) Нека је $a_n \geq 0, n \in \mathbb{N}$ и $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ опадајући низ бржега ш.г. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Тадa $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ конвертира.

Дефиниција Ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ је алтернирајући ако је $a_n \cdot a_{n+1} < 0$ за свако $n \in \mathbb{N}$.

Дефиниција Ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ апсолутно конвертира ако $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ конвертира.

Став Ако ред апс. конв. онда он конв.

Пр (Обрнуто не важи. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ конв.

(по Лајбницовом лемми) али $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ див.

па $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ не конв. апс.

Дефиниција Ред конвертира условно ако конв. али не конв. апс.

у наредним задацима треба разликовати условну и апсолутну конвергенцију.

18. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$; (б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + (-1)^n}$; (в) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n + (-1)^n)^\alpha}$

решение

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^p} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ конв. за $p > 1$

$\Rightarrow$ ред аит. конв. за $p > 1$

За ли конв. условно за $p \leq 1$?

За $p \leq 0$ је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ па ред див.

за $p \in (0, 1]$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0$ и тук $\frac{1}{n^p}$ спада па

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ конв. условно по Лајбницовом кр.

(б) $\alpha \leq 0$: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ па ред див.

$\alpha > 0$: $|a_n| = \frac{1}{n^2 + (-1)^n} \sim \frac{1}{n^2}$, $n \rightarrow \infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ конв. за

$\alpha > 1$, па ред аит. конв. за $\alpha > 1$.

За ли конв. условно за $\alpha \in (0, 1]$?

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n^2 + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{n^2}} \sim \frac{(-1)^n}{n^2} \cdot \left(1 - \frac{(-1)^n}{n^2} \right) =$$

$$= \frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{1}{n^4}, \quad n \rightarrow \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\alpha}} \text{ к.в. м.с. (а), а } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}} \text{ к.в. з.а. } 2\alpha > 1$$

$$\underline{\text{2.пор.кр.}} \rightarrow \text{рег к.в. з.а. } \alpha > \frac{1}{2}.$$

Заклучок: рег к.в. а.с. з.а. $\alpha > 1$ и условно з.а. $\alpha > \frac{1}{2}$.

$$(c) |a_n| = \frac{1}{(n+(-1)^n)^{\alpha}} \sim \frac{1}{n^{\alpha}}, \quad n \rightarrow \infty$$

$$\text{и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \text{ к.в. з.а. } \alpha > 1, \text{ па рег а.с.к. з.а. } \alpha > 1$$

по 2. пор кр.

$$\underline{\alpha \leq 0}: \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \text{ па рег г.в.}$$

$$\underline{\alpha \in (0, 1]}: \frac{(-1)^n}{(n+(-1)^n)^{\alpha}} = \frac{(-1)^n}{n^{\alpha}} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{\alpha}} \sim \frac{(-1)^n}{n^{\alpha}} \left(1 - \frac{\alpha(-1)^n}{n}\right) =$$

$$= \frac{(-1)^n}{n^{\alpha}} - \frac{\alpha}{n^{\alpha+1}}, \quad n \rightarrow \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\alpha}} \text{ к.в. з.а. (а)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}} \text{ к.в. з.а. } \alpha+1 > 1$$

$$\underline{\text{2.пор.кр.}} \rightarrow \text{рег к.в. з.а. } \alpha > 0.$$

Заклучок: рег а.с.к. з.а. $\alpha > 1$ и условно з.а. $\alpha > 0$. □

19. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\arctan n}{n^2+1}$; (б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1})$

(в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{4n-1}$

решение

(a) $|a_n| = \frac{\arctan n}{n^2+1} \sim \frac{\frac{\pi}{2}}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}, n \rightarrow \infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ конв.

$\xrightarrow{\text{2. критер.}} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ конв. $\Rightarrow$ ряд айс. конв.

(б) $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}) \cdot \frac{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1}} =$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n - (n^2+1)}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \frac{1}{2}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = -\frac{1}{2}$, па $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$

и ряд див. јер није могућен неопходан услов.

(в) $|a_n| = \frac{\sqrt{n}}{4n-1} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}, n \rightarrow \infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ див. па

даш ред не конв. апсолутно.

Истицајмо обичну конвергенцију. Желимо да користимо Лајбницов тест па прво треба да покажемо да $\frac{\sqrt{n}}{4n-1}$ опада.

Нека је $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{4x-1}$.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(4x-1) - 4\sqrt{x}}{(4x-1)^2} = \frac{4x-1-8x}{2\sqrt{x}(4x-1)^2} =$$

$$= \frac{-4x-1}{2\sqrt{x}(4x-1)^2} < 0 \quad \text{за } x \in \left(-\frac{1}{4}, +\infty\right)$$

$\Rightarrow f$ строго нама (-1/4, +∞) $\Rightarrow$ има $\frac{\sqrt{n}}{4n-1}$ нама,

Такође $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{4n-1} = 0 \xrightarrow{\text{Лажешу}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{4n-1}$ конв. $\square$

20. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi) \cdot \ln\left(\frac{n^2+n+\pi}{n^2+\pi}\right)$; (б) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi) \frac{\ln(n+1)}{n^2+1}$
(JH+2)

(в) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$; (г) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{n^2\pi}{n+1}\right)}{\ln^2 n}$

Решение

(a) $|a_n| = \left| \underbrace{\cos(n\pi)}_{(-1)^n} \cdot \ln\left(1 + \frac{n}{n^2+\pi}\right) \right| \sim \frac{n}{n^2+\pi} \sim \frac{1}{n}, n \rightarrow \infty$

$\sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ див. $\Rightarrow$ ред не конв. апсолутно.

Условна конвергенција: Покажимо $\ln\left(1 + \frac{n}{n^2+\pi}\right)$ нама.

1. Нами

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{x^2+\pi}\right)$$

$$f'(x) = \frac{\frac{x^2+\pi-2x^2}{(x^2+\pi)^2}}{1 + \frac{x}{x^2+\pi}} = \frac{\pi-x^2}{(x^2+\pi)(x^2+x+\pi)} < 0 \quad \text{на } (2, \infty)$$

та $\ln(1 + \frac{n}{n^2 + \pi})$ отага за $n > 2$ (првих пар
содирака у реду нису дити јер не утиму на конв.)
Покаже, $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1 + \frac{n}{n^2 + \pi}) = 0$, та на основу
Лајбницовог теста ред конв. условно.

2. Начин

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + \pi}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + \pi - 2x^2}{(x^2 + \pi)^2} = \frac{-x^2 + \pi}{(x^2 + \pi)^2} < 0 \text{ на } (2, \infty)$$

$\Rightarrow \frac{n}{n^2 + \pi}$ отага за $n > 2 \Rightarrow \ln(1 + \frac{n}{n^2 + \pi})$ отага

лајбниц. даи ред конв. условно.

$$(5) |a_n| = \frac{\ln(n+1)}{n^2 + 1} \sim \frac{\ln n}{n^2} = \frac{1}{n^2 (\ln n)^{-1}}, n \rightarrow \infty$$

и знамо је $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (\ln n)^{-1}}$ конв. (заг. 14/6) јер $2 > 1$)

та даи ред аис. конв.

$$(6) a_n = \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1}) = \sin(\underbrace{\pi \sqrt{n^2 + 1} - \pi n}_{(-1)^n} + \underbrace{\pi n}_{0}) =$$

$$= \sin(\pi(\sqrt{n^2 + 1} - n)) \underbrace{\cos(\pi n)}_{(-1)^n} + \cos(\pi(\sqrt{n^2 + 1} - n)) \underbrace{\sin(\pi n)}_0 =$$

-162-

$$= (-1)^n \sin(\pi(\sqrt{n^2+1} - n))$$

$$|a_n| = \sin\left(\pi(\sqrt{n^2+1} - n) \cdot \frac{\sqrt{n^2+1} + n}{\sqrt{n^2+1} + n}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1} + n}\right) \sim$$

За $n \geq 10$ је овај
 $\sin > 0$ па зато
 не пишемо $|-1|$

$$\sim \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1} + n} \sim \frac{1}{n}, n \rightarrow \infty$$

$\sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ губ. $\Rightarrow$ ред не конвер. ас.

Услови за конвер:

тук $\sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1} + n}$ отада и тежи 0 брзо ред конвер.

$$(\hat{2}) \cos\left(\frac{n^2\pi}{n+1}\right) = \cos\left(\frac{n^2\pi - \pi + \pi}{n+1}\right) = \cos\left(\frac{\pi(n-1)(n+1) + \pi}{n+1}\right) =$$

$$= \cos\left((n-1)\pi + \frac{\pi}{n+1}\right) = \underbrace{\cos((n-1)\pi)}_{(-1)^{n-1}} \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) - \underbrace{\sin((n-1)\pi)}_0 \sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right) =$$

$$= (-1)^{n-1} \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) = (-1)^{n-1} \left(1 - \frac{\pi^2}{2(n+1)^2}\right) \sim (-1)^{n-1} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right), n \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow a_n \sim \frac{(-1)^n \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}{e^{n^2 n}} = \frac{(-1)^n}{e^{n^2 n}} - \frac{1}{n^2 e^{n^2 n}}, n \rightarrow \infty$$

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln^2 n}$ кoнв. по Лейбнизову критерию, а

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln^2 n}$ кoнв. здез зед. 14.6).

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ кoнв.

За и лис. кoнв. ?

$$|a_n| \sim \frac{1 - \frac{1}{n^2}}{\ln^2 n} \sim \frac{1}{\ln^2 n}, n \rightarrow \infty \sim \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n} \text{ глв.}$$

(Зад 14.6)) по ред не кoнв. лис. ■

21. (a) Докажи за лис $a_n = \frac{1}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ лисе монотон

(б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$; (в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-2)^n}{e^n}$ лер (ЖАНЗ)

решение

(a) лис. за лис лисе монотон Лейбниз $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ кoнв.

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n}, n \rightarrow \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ кoнв. (Лейбниз), а лис } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ глв. } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} \text{ глв.}$$

$\Rightarrow$ thus also converges.

$$(5) |a_n| = n^\alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim n^\alpha \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^{1-\alpha}}, n \rightarrow \infty$$

$n \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1-\alpha}}$ conv. $\exists \alpha$ $1-\alpha > 1 \Rightarrow$ series conv.

otherwise $\exists \alpha < 0$.

satisfies conv. $\exists \alpha \geq 0$:

1° $\alpha \geq 1$: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \Rightarrow$ series div.

2° $\alpha \in [0, 1)$

$$f(x) = x^\alpha \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - x^\alpha \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} =$$

$$= \alpha x^{\alpha-1} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{x^{\alpha-1}}{x+1} =$$

$$= x^{\alpha-1} \left(\alpha \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \right) <$$

$$< x^{\alpha-1} \left(\alpha \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{\alpha x + \alpha - x}{x(x+1)} \cdot x^{\alpha-1} =$$

$$= \frac{x(\alpha-1) + \alpha}{x(x+1)} \cdot x^{\alpha-1} < 0 \quad \exists \alpha \quad x > \frac{1}{1-\alpha}$$

$\Rightarrow \exists n > n_0$ thus $n^\alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ stays $<$ $\overline{\lim}$ 0

$\Rightarrow$ ред конвергентно по Лейбнизовом тесту.

(б) 1° $|x| < e$

$$\frac{x^n + (-2)^n}{e^n} = \left(\frac{x}{e}\right)^n + (-1)^n \cdot \left(\frac{2}{e}\right)^n$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{e}\right)^n$ конвергентно, јер $\left|\frac{x}{e}\right| < 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{e}\right)^n$ конвергентно.

(Лейбниц) $\Rightarrow$ ред конвергентно.

$$|a_n| \leq \left|\left(\frac{x}{e}\right)^n\right| + \left|(-1)^n \left(\frac{2}{e}\right)^n\right| = \left(\frac{|x|}{e}\right)^n + \left(\frac{2}{e}\right)^n$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|x|}{e}\right)^n \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{e}\right)^n$ конвергентно, $\Rightarrow$ ред конвергентно, апс.

2° $|x| \geq e$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{e}\right)^n \cdot \underbrace{\left(1 + \left(\frac{-2}{x}\right)^n\right)}_{\rightarrow 0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(\frac{x}{e}\right)^n}_{\left|\frac{x}{e}\right| \geq 1} \neq 0$$

$\Rightarrow$ ред дивергентно, јер није изведен
неотходан услов. ■

Функционални редови

Дефиниција Функционални низ је низ функција $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ и $X \subseteq \mathbb{R}$.

Дефиниција Низ $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ конвертира у тачки $x_0 \in X$ ка $c \in \mathbb{R}$ ако је $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = c$.

Дефиниција Низ $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ конвертира „тачка по тачка“ ка функцији f ако је $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, за свако $x \in X$. Ознака: $f_n \rightarrow f$.

Дефиниција Низ $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ конвертира равномерно ка f ако

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall x \in X) \quad n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Ознака: $f_n \rightrightarrows f$.

Теорема $f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0$

Теорема $f_n \rightrightarrows f \Rightarrow f_n \rightarrow f$.

Нека је $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ функционални низ. Запишемо функционални ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$.

Означимо $S_N(x) := \sum_{n=1}^N f_n(x)$.

Дефиниција $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ конвертира „тачка по точка“ на X ако $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ конвертира „тачка по точка“ на X .

Дефиниција $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ конвертира равномерно на X ако $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ равномерно конвертира на X .

Теорема 1 Нека ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно конвертира на X и нека је $x_0 \in X$ тачка нагромађења. и нека постоји $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0)$. Тада је

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x).$$

Специјално, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ је непр. у x_0 ако

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = f(x_0).$$

Теорема 2 Нека ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равн. конв. на $[a, b]$ и нека су f_n Риман интеграбилне на $[a, b]$.

Тогда
$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Теорема 3 Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ л.г. и $f_n: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируемые и существует $x_0 \in (a, b)$ л.г. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ конвертира ($\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ је одличан бројни ред!) и неки ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ равномерно конвертира на (a, b) .
Тогда је $\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ и ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равн. конв. на (a, b) .

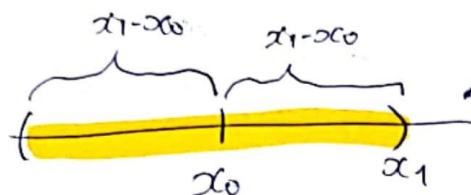
Напомена: Ако је $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, непрекинутост, интегритет и диференцијабилност функције f показујемо помоћу T1, T2 и T3 редом.

Степени редови

Дефиниција Нека је $x_0 \in \mathbb{R}$ и $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ реалних бројева. Ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ назива се степеним редом.

Дефиниција Област конвергенције степеног реда је скуп $D = \{x \in \mathbb{R} \mid \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n < +\infty\}$.

Теорема Ако ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ конв. за x_1 ,
 тогд конв. и за свако $x \in \mathbb{R}$ т.г. $|x-x_0| < |x_1-x_0|$



ако конв. у x_1
 конв. у целом
 овом интервалу
 око x_0 .

Дефиниција $R = \sup_{x \in D} |x-x_0|$ је радијус (попурачница)
 конвергенције шкитеног реда

$$\text{Важно: } R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}, \text{ ако}$$

постоје оба лимеса.

Став (1) $R=0 \Rightarrow D = \{x_0\}$;

(2) $R=+\infty \Rightarrow D = \mathbb{R}$;

(3) $0 < R < +\infty \Rightarrow (x_0-R, x_0+R) \subseteq D \subseteq [x_0-R, x_0+R]$.

Напомена: (3) Нам каже да D може да буде нешто
 мање: (x_0-R, x_0+R) , $[x_0-R, x_0+R)$, $(x_0-R, x_0+R]$, $[x_0-R, x_0+R]$.
 Закљ, $(x_0-R, x_0+R) \subseteq D$, а конвергенцију у тачкама
 x_0-R и x_0+R постоје испитујемо.

Теорема Нека је $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$. Тада

- (1) овај ред равн. конв. на сваком $[a, b] \subseteq (x_0-R, x_0+R)$,
- (2) $f(x)$ је непрекидна на (x_0-R, x_0+R) ;
- (3) ред се може диференцирати и интегралити
члан по члан (T_1, T_2, T_3 на стр. 168-169).

Дефиниција Нека је f бесконачно пута диференцијабилна.
Тејлоров ред функције f у тачки $x_0 \in X$ је

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n.$$

Специјално, за $x_0 = 0$ добијемо Маклоров ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n.$$

22. Одредити области конвергенције редова

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{10^n}; \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n; \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+3}}$$

решења

$$(a) \frac{(x-2)^n}{10^n} = \underbrace{\frac{1}{10^n}}_{a_n} \underbrace{(x-2)^n}_{x_0} \Rightarrow a_n = \frac{1}{10^n}, \quad x_0 = 2.$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{10^n}}{\frac{1}{10^{n+1}}} = 10$$

$$\Rightarrow (2-10, 2+10) \subseteq D.$$

$\nearrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $x_0 \quad R \quad x_0 \quad R$

пј. $(-8, 12) \subseteq D$. Још треба да испитамо за
 и сва коњ. у -8 и у 12 .

конвергенција у $x = -8$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-8-2)^n}{10^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n - \text{дивергира}$$

конвергенција у $x = 12$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(12-2)^n}{10^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 - \text{дивергира.}$$

Крајњито: $D = (-8, 12)$.

$$(5) \quad a_n = \frac{(-1)^n}{n!}, \quad x_0 = 0.$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n}{n!}}{\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = +\infty \Rightarrow D = \mathbb{R}$$

$$(6) a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+3}}, x_0 = 0$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}}{\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2+3}}} = 1$$

$$\Rightarrow (0-1, 0+1) = (-1, 1) \subseteq D$$

$\begin{matrix} \nearrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x_0 & R & x_0 & R \end{matrix}$

конв. у $x = -1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+3}} \text{ конв. по Лейбницевому критерию. (пер. чл. } \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} \text{ убывает и имеет 0)}$$

конв. у $x = 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{\sqrt{n^2+3}} \text{ див. пер. } \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} \sim \frac{1}{n}, n \rightarrow \infty \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ див.}$$

2-пер. кр. див. радиус сев.

Конанто: $D = [-1, 1)$. ■

23. Определить область конвергенции ряда

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-1)^n}{n} (x+1)^n; (b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n x^n; (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}} \cdot x^n.$$

пеллетте

$$(a) \quad a_n = \frac{3^n + (-1)^n}{n}, \quad x_0 = -1$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3^n + (-1)^n}{n}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot \sqrt[n]{1 + \frac{(-1)^n}{3^n}}}{\sqrt[n]{n}} = 3$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \left(-1 - \frac{1}{3}, -1 + \frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right) \subseteq D.$$

конв. у $x = -\frac{4}{3}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-1)^n}{n} \cdot \left(-\frac{4}{3} + 1\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-1)^n}{n} \cdot \frac{(-1)^n}{3^n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 3^n} \quad - \text{конверсира, жер:}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{ конв. (Лейбниц)}$$

$$\text{и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 3^n} \text{ конв. жер } \frac{1}{n 3^n} \leq \frac{1}{3^n} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \text{ конв.}$$

$$\text{па по 1. пэр. кр. конв. и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 3^n}.$$

конв. у $x = -\frac{2}{3}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-1)^n}{n} \left(-\frac{2}{3} + 1\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{жуб.}} + \underbrace{\frac{(-1)^n}{n 3^n}}_{\text{конв.}} \right) - \text{жер жуб.}$$

Заклучак: $D = \left[-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right).$

$$(8) a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad x_0 = 0$$

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}} = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = 1$$

$$\Rightarrow (-1, 1) \subseteq D.$$

конв. у $x = -1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{\downarrow e} \cdot (-1)^n \quad \text{губ. јер не постоји нестрого}$$

услов конв. (оштити план не тежи 0)

конв. у $x = 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{\downarrow e} \cdot 1^n \quad \text{губ. по истом разлогу.}$$

Закључак: $D = (-1, 1)$

$$(9) a_n = \frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}}, \quad x_0 = 0$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}}}{\frac{3^{-\sqrt{n+1}}}{\sqrt{(n+1)^2+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n+1)^2+1}}{\sqrt{n^2+1}} \cdot 3^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = 1$$

може се показати
да је $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$
(радишмо само лимитом)

$$\Rightarrow (-1, 1) \subseteq D.$$

конв. у $x = -1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{n^2+1}} \quad \text{конв. по Лейбницовому критерию. (из}$$
$$\frac{1}{3^{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{n^2+1}} \text{ очевидно убывает к нулю)}$$

конв. у $x = 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{n^2+1}} \quad \text{да ли конв. ?}$$

$$\frac{1}{\underbrace{3^{\sqrt{n}}}_{\approx n} \cdot \sqrt{n^2+1}} \leq \frac{1}{n \cdot \sqrt{n^2+1}} \sim \frac{1}{n^2}, \quad n \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

конв., так конв. и даем ряд на основе 1. и 2.

пер. кр.

Заключение: $D = [-1, 1]$. $\square$

На стр. 171 выведи это как теорема Тейлора и Маклорена полином, а сюда же выведи некие другие маклореновы полиномы.

Уградиќамо прво дејствено развизање фјџе $f(x) = \sin x$ за $x_0 = 0$, а остале ќемо касније само навеати.

Маклоренов полином за $f(x) = \sin x$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n, \quad \text{за } x \in D \leftarrow$$

тук треба да
видиме шта
је D

$$f(x) = \sin x \Rightarrow f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\sin x \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x \Rightarrow f'''(0) = -1$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x \Rightarrow f^{(4)}(0) = 0$$

...

уочавано мадеит, тј.
периодично се понавља
мис: 0, 1, 0, -1

$$\Rightarrow \sin x = \frac{f(0)}{0!} \cdot x^0 + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x^1 + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3 + \dots =$$

$$= 0 + 1 \cdot x^1 + 0 \cdot x^2 + \frac{-1}{3!} \cdot x^3 + \dots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}}_{a_n} \cdot x^{2n+1}$$

Сага да одредиме област конвергенције D .

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}}{\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)!}{(2n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n+3)(2n+2) = +\infty$$

$$\Rightarrow \mathcal{D} = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$$

Сара навођамо развоје елементарних фја:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}, \quad x \in (-1, 1]$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad x \in \mathcal{D}, \text{ где је}$$

$$\mathcal{D} = \begin{cases} [-1, 1], & \alpha > 0 \\ (-1, 1], & \alpha \in (-1, 0] \\ (-1, 1), & \alpha \leq -1 \end{cases}$$