

4. За које $x \in \mathbb{R}$ конвертирају редови

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx) \quad ; \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx) \quad ?$$

решење

(a) Дајмо да проверимо услов нам даје да мора да важи

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(nx) = 0 \quad \star$$

Променајмо $a_{n+1} - a_{n-1}$, где је $a_n = \sin(nx)$

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_{n-1} &= \sin((n+1)x) - \sin((n-1)x) = \\ &= 2 \sin \frac{(n+1)x - (n-1)x}{2} \cdot \cos \frac{(n+1)x + (n-1)x}{2} = \\ &= 2 \sin x \cos(nx) \end{aligned}$$

$$\text{Приметимо } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_{n-1}) = 0 - 0 = 0$$

неопходан
услов
конвергенције

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sin x \cos(nx) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sin x = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(nx) = 0$$

$$\boxed{1^\circ} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sin x = \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2^o \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(nx) = 0 \quad \star\star$$

$$\sin^2(nx) + \cos^2(nx) = 1 \quad / \quad \lim_{n \rightarrow \infty}$$

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(nx) \right)^2 + \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(nx) \right)^2 = 1$$

$\underbrace{\quad}_{0 \text{ збрѣ}} \quad \underbrace{\quad}_{0 \text{ збрѣ}} \quad \star\star$

$$\Rightarrow 0 = 1 \quad \text{?}$$

тј. овај случај је немогућ.

Закључак, да би $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)$ конвертирао, неопходно

је да буде $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, али како је $\sin(kn\pi) = 0$
и $\sum_{n=1}^{\infty} 0$ конвертира, ово је и јошаван услов.

Закључак: глатко ред конвертира, ако је $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

(б) Неопходан услов каже $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(nx) = 0$.

Означимо $a_n = \cos(nx)$ и повламирајмо a_{2n} .

$$a_{2n} = \cos(2nx) = \cos^2(nx) - \sin^2(nx) \quad / \quad \lim_{n \rightarrow \infty}$$

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\underbrace{\cos^2(nx)}_{\substack{\downarrow \\ 0 \text{ збрѣ}} \star} - \sin^2(nx) \right) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(nx) = 0. \quad \star\star$$

Знамо $\sin^2(nx) + \cos^2(nx) = 1$ / $\lim_{n \rightarrow \infty}$

$$\left(\underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(nx)}_{0 \text{ због } \textcircled{x}} \right)^2 + \left(\underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(nx)}_{0 \text{ због } \textcircled{x}} \right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow 0 = 1 \quad \text{!}$$

$\Rightarrow$ гачи рер гивертура за свако $x \in \mathbb{R}$. $\square$

5. Доказати да су нисови парцијалних сума

$$(a) S_N = \sum_{n=1}^N \sin(nx); \quad (b) T_N = \sum_{n=1}^N \cos(nx)$$

ограничени осим ако је $x = 2k\pi$ пог (b).

решене

(a) Ако је $x = 2k\pi$, онда $\sin(nx) = 0$, па је $S_N = 0$ $\forall$

Нека је $x \neq 2k\pi$, онда $\sin \frac{x}{2} \neq 0$.

$$S_N = \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \sin \frac{x}{2} S_N = \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \sum_{n=1}^N \sin \frac{x}{2} \sin(nx) =$$

$$= \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left(\underbrace{\cos\left(\frac{x}{2} - nx\right)}_{x_n} - \underbrace{\cos\left(\frac{x}{2} + nx\right)}_{x_{n+1}} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} (x_1 - x_{N+1}) = \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} \left(\cos \frac{x}{2} - \cos \left(\frac{2N+1}{2} x \right) \right) \leq 2$$

$$\leq \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} \leftarrow \boxed{\text{Не зависи от } N}$$

$\Rightarrow S_N$ је ограничено.

(δ) Ако је $\alpha = 2k\pi$, онда $\cos(n\alpha) = 1$, па је $S_N = N$, а па није ограничено.

$$T_N = \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} S_N = \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left(\sin \left(\frac{\alpha}{2} + n\alpha \right) + \sin \left(\frac{\alpha}{2} - n\alpha \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left(\underbrace{\sin \left(\frac{2n+1}{2} \alpha \right)}_{\alpha_{n+1}} - \underbrace{\sin \left(\frac{2n-1}{2} \alpha \right)}_{\alpha_n} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1}{2} \left(\alpha_{N+1} - \alpha_1 \right) = \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1}{2} \left(\underbrace{\sin \frac{2N+1}{2} \alpha - \sin \frac{\alpha}{2}}_{\leq 2} \right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} \leftarrow \boxed{\text{Не зависи от } n}$$

$\Rightarrow T_N$ је ограничено. ■

Редови са позитивним члановима

У сваком случају савишно се редовишно $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ где је $a_n \geq 0$ за свако $n \in \mathbb{N}$.

Приметимо: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конв. $(\Rightarrow)$ $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n)$ је ограничено

ПР пример $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ конвертира за $p < 1$.

Замисли, за $p \leq 0$, $\frac{1}{n^p} \not\rightarrow 0$, па ред див. јер није могуће наћи одговарајући услов конвергенције.

За $p \in (0, 1)$:

$$S_N = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{N^p} > \underbrace{\frac{1}{N^p} + \dots + \frac{1}{N^p}}_N = \frac{N}{N^p} = N^{1-p} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \infty$$

па је (S_n) неограничено и ред дивертира.

Теорема (I поредак критеријум)

Нека је $0 \leq a_n \leq b_n$ за $n \geq n_0$ (n_0 -фиксирано)

1 Ако $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конв., онда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конв.;

2 Ако $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ див., онда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ див.

Теорема (Π поређење критеријуми)

Нека су $a_n, b_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$. Ако је

- 1 $0 < c < +\infty$, онда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ су еквијалентни (или оба конв. или оба див.).
- 2 $c = 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конв., онда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конв.
- 3 $c = \infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конв., онда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конв.

Теорема (Интегрални критеријуми)

Нека је $f: [1, \infty) \rightarrow [0, +\infty)$ монотонно опадајућа.

Тада ред $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ конв. ако и само конв. $\int_1^{\infty} f(x) dx$.

Пример Нека је $f(x) = \frac{1}{x^p}$, $p > 1$

Знамо $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ конв., па конв. и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

Ако је $p = 1$, $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ див., па и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ див.

Како спојимо са претходним примером:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ конвертира } \Leftrightarrow p > 1.$$

Теорема (Кошијев тест)

Нека је $a_n \geq 0$ и $L := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$.

- 1 Ако је $L > 1$, ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивертира;
- 2 Ако је $L < 1$, ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвертира;
- 3 Ако је $L = 1$, не знамо да ли ред конв. или не.

Теорема (Даламберов тест)

Нека је $a_n > 0$ за $n \geq n_0$ и $l = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$,

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

- 1 Ако је $l > 1$, ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивертира;
- 2 Ако је $L < 1$, ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвертира;
- 3 Ако је $L = l = 1$, не знамо да ли ред конв. или не.

Напомена: Нисови $\sqrt[n]{a_n}$ и $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ често имају

само једну тачку натамновања, па сви ови

$\liminf_{n \rightarrow \infty}$ и $\limsup_{n \rightarrow \infty}$ буду само $\lim_{n \rightarrow \infty}$.

Стиллінгова апроксимація: $n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}$

Бітто: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конв. $\Leftrightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ конв.

↑
перших n_0 членів
ряду не впливає на
конвергенцію

6. Визначити конвергенцію середніх рядів

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$; (б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$; (в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$; (г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$

$a > 0$

розв'язок

(a) 1. Нами (2. пор. кр.)

$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}, n \rightarrow \infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ див., то див. и дати

рез на основу 2. пор. кр.

2. Нами (по геог.)

$$S_N = \sum_{n=1}^N \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \sum_{n=1}^N (\ln(n+1) - \ln n) = \ln 2 - \ln 1 + \dots + \ln(N+1) - \ln N =$$

$$= \ln(N+1) - \ln 1 = \ln(N+1)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \ln(N+1) = +\infty \rightarrow \text{дати рез див. по геог.}$$

(δ) Мора да важи: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+a^n} = 0$ да би ред конв.
(Нейхоран услов конв.)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+a^n} = \begin{cases} 0, & a > 1 \\ \frac{1}{2}, & a = 1 \\ 1, & 0 \leq a < 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ ред див. за $a \leq 1$, а за $a > 1$ треба да
минимално.

$a > 1$:

$$\frac{1}{1+a^n} \sim \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n, n \rightarrow \infty \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^n \text{ конв. (јер } |\frac{1}{a}| < 1)$$

на основу задатка 3.(а), та конв. и даје ред
на основу 2. пор. кр.

Закључак:

за $0 \leq a \leq 1$ ред див.

за $a > 1$ ред конв.

$$(б) \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \sim \frac{1}{n}, n \rightarrow \infty \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ див. } \xrightarrow{\text{2. пор. кр.}} \text{ даје ред див.}$$

$$(г) \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} \sim \frac{1}{n^{3/2}}, n \rightarrow \infty \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \text{ конв. } \xrightarrow{\text{2. пор. кр.}} \text{ даје ред конв.}$$



7. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!!}$; (б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

решение

Посейник: $(2n)!! = (2n) \cdot (2n-2) \cdot (2n-4) \cdots 2$

↑
унабавяме нитоже
за по две

(a) Пошто се појавује факторијел пробамо

Замандера: $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!!}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 \cdot (n!)^2 \cdot (2n)!!}{(2n+2) \cdot (2n)!! \cdot (n!)^2} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{2(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2} = \infty > 1, \text{ па даим}$$

рег дивертира на основу Замандеровот тест.

(б) $a_n = \frac{n!}{n^n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot n! \cdot n^n}{(n+1)(n+1)^n \cdot n!} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1, \text{ па}$$

даим рег конв. на основу Замандеровот теста, □

8. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$; (б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 (\sqrt{2} + (-1)^n)^n}{3^n}$

решение

(a) $a_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n+1}{-2}}\right)^{\frac{n+1}{-2} \cdot \frac{-2}{n+1} \cdot (n-1)} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{-2(n-1)}{n+1}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2(n-1)}{n+1}} = e^{-2} = \frac{1}{e^2} < 1, \text{ по}$$

пред. крив. на основе Критерия Коши.

(б) $a_n = \frac{n^3 (\sqrt{2} + (-1)^n)^n}{3^n}$

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n^3} (\sqrt{2} + (-1)^n)}{3} \begin{matrix} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{n \text{ парно}} \frac{\sqrt{2}+1}{3} \\ \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{n \text{ не парно}} \frac{\sqrt{2}-1}{3} \end{matrix}$$

оба из них
гве также
находимая

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt{2}+1}{3} < 1, \text{ по тем же пред. крив. на}$$

основе Критерия Коши. ■

9. (a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$; (б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}}$

решение

$$(\ln n)^{\ln n} = e^{\ln((\ln n)^{\ln n})} = e^{\ln n \cdot \ln(\ln n)} = \left(e^{\ln n}\right)^{\ln(\ln n)} =$$

$$= n^{\ln(\ln n)}$$

Знамо да $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ конв. за $\alpha > 1$, а ми имамо $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln(\ln n)}}$

па очекујемо да овај ред конв.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(\ln n) = \infty$, па постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ т.д.

$$n > n_0 \Rightarrow \ln(\ln n) \geq 2$$

можемо узети 2
да знамо број који
је већи од 1

$$\Rightarrow \frac{1}{n^{\ln(\ln n)}} \leq \frac{1}{n^2} \text{ и } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ конв. , па конв. и}$$

дати ред на основу 1. пор. кр.

$$(o) \quad (\ln n)^{\ln(\ln n)} = e^{\ln((\ln n)^{\ln(\ln n)})} = e^{\ln(\ln n) \cdot \ln(\ln n)} =$$

$$= e^{(\ln(\ln n))^2} \leq e^{\ln n} = n$$

јер је $(\ln(\ln n))^2 \leq \ln n$ $\star$

$$\Rightarrow a_n \geq \frac{1}{n} \text{ и } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ дивергира, па див. и дати ред}$$

на основу 1. пор. кр.

Још да видимо зашто важи $\star$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln(\ln x))^2}{\ln x} \stackrel{\substack{\text{л.н.} \\ \frac{\infty}{\infty}}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \ln(\ln x) \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \ln(\ln x)}{\ln x} \stackrel{\substack{\text{л.н.} \\ \frac{\infty}{\infty}}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln(\ln n))^2}{\ln n} = 0$$

$$\Rightarrow (\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \ln n \geq (\ln(\ln n))^2. \quad \square$$

$$\boxed{10. (a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{n}} ; (\delta) \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{x}{n}\right) ; (b) \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{x}{n}\right)$$

решение

$$(a) \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{n}} \sim \frac{1}{n}, n \rightarrow \infty \text{ (jer je } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1) \text{ и}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ глб.} \xrightarrow{\text{2-пор. кр.}} \text{глб. и даље рел}$$

(б) $\sin \frac{x}{n}$ није сталног знака, а треба нам да је $a_n \geq 0$ да би користили поредбени кр. па иммо случајеве:

$$\boxed{1^\circ x > 0} \Rightarrow (\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) 0 \leq \frac{x}{n} \leq \pi, \text{ и } \sin \frac{x}{n} \geq 0.$$

$$\sin \frac{x}{n} \sim \frac{x}{n} \sim \frac{1}{n}, n \rightarrow \infty \text{ (jer } x = \text{const)} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ глб.}$$

$$\xrightarrow{\text{2-пор. кр.}} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{x}{n}\right) \text{ глб.}$$

2° $x < 0$ симно - $n \geq n_0 \Rightarrow \sin \frac{x}{n} \leq 0$ и

на основу 1° ред $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{-x}{n}\right)$ див. па див.

и ред $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{x}{n}\right) = - \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{-x}{n}\right)$

3° $x = 0$ $\Rightarrow \sin \frac{x}{n} = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 0$ конв.

Закључак: даи ред конв. ако $x = 0$.

(б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{n} = 1 \neq 0$ па даи ред див. јер

није испуњен неопходан услов конв. $\square$

11. (а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$; (б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n+3^n}$; (в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2+n}$

решенје

(а) $a_n = \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1+\frac{1}{n^2}}}{n+\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{1}{n^2}}}{1+\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n^2}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^2]{n} = 1 \Rightarrow \text{Кошијев тест нам не даје}$$

одговор па испуњено неопходан услов.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n \cdot n^{\frac{1}{n}}}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2 \cdot \frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{e}} = 1 \neq 0$$

по правилу др. др. б. јер није измишљен неопходан
услов Коши.

$$(5) a_n = \frac{n^5}{2^n + 3^n}$$

Коримлето (*)
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n} = 3$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n^5}}{\sqrt[n]{2^n + 3^n}} = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \text{по Коши,}$$

на основу Кошијевог
тесту

Зашто важи (*):

$$\underbrace{3}_{\downarrow 3} = \sqrt[n]{3^n} \leq \sqrt[n]{2^n + 3^n} \leq \sqrt[n]{3^n + 3^n} = \underbrace{3 \cdot \sqrt[n]{2}}_{\downarrow 3}$$

$\Rightarrow$ по т. о 2 поимења и $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n} = 3$.

$$(6) a_n = \frac{2^n}{n^2 + n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2 + n + 1}}{\frac{2^n}{n^2 + n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n^2 + n)}{n^2 + 3n + 2} = 2 > 1,$$

по правилу др. др. б. на основу Даламберовог теста



На стр. 107 смо видети развоје неких ф-ја. Понекад
ће нам бити користи развоје лексе штећно.

$$\sin x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5), x \rightarrow 0$$

$$\cos x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4), x \rightarrow 0$$

$$\operatorname{tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5), x \rightarrow 0$$

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5), x \rightarrow 0$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5), x \rightarrow 0$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3), x \rightarrow 0$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3), x \rightarrow 0$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3), x \rightarrow 0$$

нпр.

12. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{x}{n}\right)\right)$; (б) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)^n$ (в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n}\right)$

решение

(a) 1° $x=0$: $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos 0) = \sum_{n=1}^{\infty} 0$ кснб.

2° $x \neq 0$

$$1 - \cos \frac{x}{n} \sim 1 - \left(1 + \frac{\frac{x^2}{n^2}}{2!}\right) \sim \frac{1}{n^2}, n \rightarrow \infty \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ кснб.}$$

па кснб. и дајим ред на основу 2. пор. кр.

$$(5) \left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)^n = e^{\ln \left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)^n} = e^{n \cdot \ln \left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)} \sim$$

$$\sim e^{n \left(-\frac{\ln n}{n} - \frac{\ln^2 n}{2n^2}\right)} = \underbrace{e^{-\ln n}}_{\parallel \frac{1}{n}} \cdot \underbrace{e^{-\frac{\ln^2 n}{2n^2}}}_{\downarrow 1} \sim \frac{1}{n}, n \rightarrow \infty$$

$\sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ див. $\xrightarrow{2. \text{пор. кр.}}$ див. и гармон. ряд

$$(6) \frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right) \sim \frac{1}{2n^2}, n \rightarrow \infty$$

$\sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходя. $\xrightarrow{2. \text{пор. кр.}}$ сходя. гармон. ряд. $\square$

13. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{n-1}}{n}$; (б) $\sum_{n=1}^{\infty} n^a \sin\left(\frac{1}{n^b}\right) \cdot \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b} (n+b)^{n+a}}$$

решение

(a) korzystаясь: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$$\frac{\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{n-1}}{n} \cdot \frac{\overbrace{(\sqrt[3]{n})^2 + \sqrt[3]{n} \cdot \sqrt[3]{n-1} + (\sqrt[3]{n-1})^2}^{a^2 + ab + b^2}}{\underbrace{(\sqrt[3]{n})^2 + \sqrt[3]{n} \sqrt[3]{n-1} + (\sqrt[3]{n-1})^2}_{a-b}} =$$

$$= \frac{n - (n-1)}{n \left(n^{\frac{3}{2}} + \sqrt[3]{n^2 \cdot n} + (n-1)^{\frac{3}{2}} \right)} \sim \frac{1}{n \cdot n^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}, n \rightarrow \infty$$

и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/2}}$ кѡнв. $\xrightarrow{2.\text{пор.кр.}}$ кѡнв. и даѡм рѣз.

$$(5) \quad n^a \sin\left(\frac{1}{n^b}\right) \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim n^a \cdot \frac{1}{n^b} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^{b+1-a}}, \quad n \rightarrow \infty$$

и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{b+1-a}}$ кѡнв. за $b+1-a > 1$, па на основу
2. пор. кр. даѡм рѣз кѡнв. за $b > a$.

$$(6) \quad \frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b} (n+b)^{n+a}} = \frac{n^n}{(n+a)^n} \cdot \frac{1}{(n+a)^b} \cdot \frac{n^n}{(n+b)^n} \cdot \frac{1}{(n+b)^a} =$$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{a}{n}\right)^n} \cdot \frac{1}{(n+a)^b} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{b}{n}\right)^n} \cdot \frac{1}{(n+b)^a} \sim \frac{1}{e^a} \cdot \frac{1}{n^b} \cdot \frac{1}{e^b} \cdot \frac{1}{n^a} \sim$$

$$\sim \frac{1}{n^{a+b}}, \quad n \rightarrow \infty$$

кѣриѡмшм шѡ: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$

Рѣз $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a+b}}$ кѡнв. за $a+b > 1 \xrightarrow{2.\text{пор.кр.}}$ даѡм рѣз
кѡнв. за $a+b > 1$. ■

14. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\frac{n^2}{2}}$; (5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg n}{n^2+1}$; (6) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \ln^2 n}$

рѣшеѡе

(a) 1. Наѡмш (1. пор. кр.)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{e^{n^2/2}} = 0 \Rightarrow (\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \quad n^3 \leq e^{\frac{n^2}{2}}$$

$$\Rightarrow n^{-3} \geq e^{-\frac{n^2}{2}} \Rightarrow \frac{1}{n^2} \geq n e^{-\frac{n^2}{2}}$$

$$u \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ кoнв. } \xrightarrow{\text{1. пop. кp.}} \text{кoнв. гaйш pез}$$

2. Ашикт (линейная крив.)

$$f(x) = x e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad f: [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

f жетте шетр. и жон аан пиреда жа сугага.

$$f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} - x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} = (1 - x^2) e^{-\frac{x^2}{2}} \leq 0 \text{ на } [1, +\infty)$$

$\Rightarrow f$ сугага та можено жа применено лнй. кр.

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_1^{\beta} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \left[\begin{array}{l} -\frac{x^2}{2} = t \\ x dx = -dt \\ x=1 \rightarrow t = -\frac{1}{2} \\ x=\beta \rightarrow t = -\frac{\beta^2}{2} \end{array} \right] = \\ &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\beta^2}{2}}^{-\frac{1}{2}} e^t dt = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(e^{-\frac{1}{2}} - \underbrace{e^{-\frac{\beta^2}{2}}}_{\downarrow 0} \right) = \frac{1}{\sqrt{e}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ лнй. кoнв. $\xrightarrow{\text{лнй. кp.}} \text{кoнв. гaйш pез.}$

(б) 1. Ашикт (2. пop. кp.)

$$\frac{\arctg n}{n^2 + 1} \sim \frac{\frac{\pi}{2}}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}, \quad n \rightarrow \infty \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ кoнв.}$$

$\xrightarrow{\text{2. пop. кp.}} \text{кoнв. гaйш pез.}$

2. Наши (линейными крив.)

$$f(x) = \frac{\arctg x}{x^2+1} \quad - \text{нелр.} \quad f: [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

За ли f луга?

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x^2}(x^2+1) - 2x \arctg x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-2x \arctg x}{(x^2+1)^2} < 0,$$

ли f луга и можно да користио лину-кр.

$$\int_1^{\infty} \frac{\arctg x}{x^2+1} dx = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_1^{\beta} \frac{\arctg x}{x^2+1} dx = \left[\begin{array}{l} t = \arctg x \\ dt = \frac{dx}{x^2+1} \\ x=1 \rightarrow t = \frac{\pi}{4} \\ x=\beta \rightarrow t = \arctg \beta \end{array} \right] =$$

$$= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctg \beta} t dt = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left. \frac{1}{2} t^2 \right|_{\frac{\pi}{4}}^{\arctg \beta} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \arctg^2 \beta - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} \right)^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{4} \right)^2 = \frac{3\pi^2}{32}$$

$\Rightarrow$ лину. крив. лину. кр. $\Rightarrow$ јаму рег крив.

(6) 1° $p > 1$ нека је $p_1 \in (1, p)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{p_1-p}}{n^{p_1}} = 0 \Rightarrow (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \geq n_0) \frac{n^{p_1-p}}{n^{p_1}} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{n^{p_1}} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p_1}} \text{ крив.} \xrightarrow{\text{лину. кр.}} \text{јаму рег крив.}$$

2° $p < 1$ пока же $p_1 \in (p, 1)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{p_1-p}}{\ln^2 n} = \infty \Rightarrow (\exists n_0 \in \mathbb{N}). (\forall n > n_0) \frac{n^{p_1-p}}{\ln^2 n} \geq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^{p_1} \ln^2 n} \geq \frac{1}{n^{p_1}} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p_1}} \text{ глв.} \xrightarrow{1.\text{пер.кр.}} \text{глв. глв. рег.}$$

3° $p = 1$ Користимо лем. кр.

$$f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}, \quad f: [2, \infty) \rightarrow [0, \infty) \text{ не пр.}$$

f спада ?

$$f'(x) = \frac{-(\ln^2 x + x \cdot 2 \ln^{2-1} x \cdot \frac{1}{x})}{(x \cdot \ln^2 x)^2} =$$

$$= \frac{-\ln^2 x - 2 \ln^{2-1} x}{(x \ln^2 x)^2} < 0$$

$\Rightarrow f$ спада.

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} \text{ конв. за } 2 > 1 \text{ (заг. 11. (a) шр. 117.)}$$

$\xrightarrow{\text{лем. кр.}} \text{глв. рег конв. за } 2 > 1.$

Закључак: рег конв. за $p > 1$ или

$$p = 1 \text{ и } 2 > 1.$$



15. (a) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\ln n + a \ln(n+1) + b \ln(n+2) \right) ;$

(б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(\sin \frac{1}{n}))^2} ;$ (в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{a} - \frac{\sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}}{2} \right)$

решение

(a) $\ln(n+1) = \ln(n(1+\frac{1}{n})) = \ln n + \ln(1+\frac{1}{n}) \sim \ln n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}, n \rightarrow \infty$

$\ln(n+2) = \ln(n(1+\frac{2}{n})) = \ln n + \ln(1+\frac{2}{n}) \sim \ln n + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2}, n \rightarrow \infty$

$a_n \sim \ln n + a \left(\ln n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \right) + b \left(\ln n + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} \right) =$

$= (1+a+b) \ln n + (a+2b) \cdot \frac{1}{n} + \left(-\frac{a}{2} - 2b \right) \cdot \frac{1}{n^2}, n \rightarrow \infty$

1° $1+a+b \neq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Rightarrow$ ряд див. (пер. нчл. может не выполнят. усл. коэф.)

2° $a+2b \neq 0 \Rightarrow a_n \sim \frac{1}{n} + (1+a+b) \ln n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ див. на див. и значит ряд на основе 2-пор-кр.

3° $1+a+b=0$ и $a+2b=0 \Rightarrow a=-2, b=1$

$a_n \sim \left(-\frac{-2}{2} - 2 \cdot 1 \right) \cdot \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}, n \rightarrow \infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ коэф.

$\xrightarrow{2\text{-пор-кр.}}$ коэф. значит ряд.

Заключение: ряд коэф. АККО $a=-2$ и $b=1$.

$$\begin{aligned}
 (0) \quad \left(\ln \left(\sin \frac{1}{n} \right) \right)^2 &\sim \left(\ln \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} \right) \right)^2 = \left(\ln \left(\frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{6n^2} \right) \right) \right)^2 = \\
 &= \left(\underbrace{\ln \left(\frac{1}{n} \right)}_0 + \underbrace{\ln \left(1 - \frac{1}{6n^2} \right)}_0 \right)^2 \sim \left(\ln \left(\frac{1}{n} \right) \right)^2, \quad n \rightarrow \infty
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\left(\ln \left(\sin \frac{1}{n} \right) \right)^2} \sim \frac{1}{\left(\ln \left(\frac{1}{n} \right) \right)^2} = \frac{1}{(\ln n)^2}, \quad n \rightarrow \infty$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^0 \cdot \ln^2 n} \text{ глв. (заг. 14. (б)) на глв. и глв.}$$

рег на основу 2. пор. кр.

$$(б) \quad a^{\frac{1}{n}} = e^{\ln(a^{\frac{1}{n}})} = e^{\frac{1}{n} \ln a} \sim 1 + \frac{\ln a}{n} + \frac{\ln^2 a}{2n^2}, \quad n \rightarrow \infty$$

$$b^{\frac{1}{n}} \sim 1 + \frac{\ln b}{n} + \frac{\ln^2 b}{2n^2}, \quad n \rightarrow \infty$$

$$c^{\frac{1}{n}} \sim 1 + \frac{\ln c}{n} + \frac{\ln^2 c}{2n^2}, \quad n \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow a_n \sim 1 + \frac{\ln a}{n} + \frac{\ln^2 a}{2n^2} - \frac{1 + \frac{\ln b}{n} + \frac{\ln^2 b}{2n^2} + 1 + \frac{\ln c}{n} + \frac{\ln^2 c}{2n^2}}{2} =$$

$$= \left(\ln a - \frac{\ln b}{2} - \frac{\ln c}{2} \right) \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{\ln^2 a}{2} - \frac{\ln^2 b}{4} - \frac{\ln^2 c}{4} \right) \cdot \frac{1}{n^2}, \quad n \rightarrow \infty$$

$$1^\circ \quad \ln a - \frac{\ln b}{2} - \frac{\ln c}{2} \neq 0 \Rightarrow a_n \sim \frac{1}{n} \text{ на рег глв. по 2. пор. кр.}$$

$$2^\circ \quad \ln a - \frac{\ln b}{2} - \frac{\ln c}{2} = 0 \Rightarrow a_n \sim \frac{1}{n^2} \text{ на рег глв. по 2. пор. кр.}$$