Неодређени интеграли

Дефиниција Нека је $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ и нека је $F:(a,b)\to\mathbb{R}$ диференцијабилна функција т.д. је $F'(x)=f(x)$, за свако $x\in(a,b)$. Тада функцију F називамо примитивном функцијом функције f.

Пример Ако је $f(x)=3x^2$, онда је једна њена примитивна функција $F(x)=x^3$.
Приметимо и $F_1(x)=x^3+5$, $F^2(x)=x^3-7, \dots$ су такође примитивне функције.
Штавише,

$$F \text{ примитивна ф-ја за } f \Rightarrow (\forall c\in\mathbb{R}) \ F+c \text{ је такође примитивна}$$

Заиста, $(F+c)'=F'+0=f$.

Дефиниција Нека је F једна примитивна ф-ја за f. Тада се фамилија $\{F+c \mid c\in\mathbb{R}\}$ зове неодређени интеграл функције f и означава се са $\int f(x)\,dx$.

Пишемо: $\int f(x)\,dx = F(x)+c$

Став Нека је F примитивна функција функције f. Тада важи:

(1) $\int F'(x)\,dx = F(x) + c$;

(2) $\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx, \quad k \in \mathbb{R}$;

(3) $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$.

Теорема (Смена променљиве)

$$\int f(x)\,dx \overset{x=\varphi(t)}{=\!=} \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt$$

Теорема (Парцијална интеграција)

$$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du$$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$x^\alpha,\ \alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + c$
e^x	$e^x + c$
$a^x,\ a>0, a\neq 1$	$\frac{a^x}{\ln a} + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + c$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + c$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + c$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x + c$
$\frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}$	$\ln\lvert x + \sqrt{x^2 \pm 1}\rvert + c$
$\frac{1}{x^2-1}$	$\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{1-x}{1+x}\right\rvert + c$

1. (а) $\int x(\sqrt{x}+1)\,dx$; (б) $\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$; (в) $\int \frac{x^2+x+1}{x}\,dx$.

решење

(а) $$\int x(\sqrt{x}+1)\,dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}}+x\right)dx = \int x^{\frac{3}{2}}\,dx + \int x\,dx =$$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + \frac{x^2}{2} + c = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}x^2 + c$$

корисно!

(б) $$\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx = \int \left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx =$$

$$= x - \operatorname{arctg} x + c$$

(в) $$\int \frac{x^2+x+1}{x}\,dx = \int \left(x+1+\frac{1}{x}\right)dx = \int x\,dx + \int 1\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + x + \ln|x| + c$$ ■

2. (а) $\int e^{7x-5}\,dx$; (б) $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$; (в) $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$, $a \neq 0$

решење (а) $$\int e^{7x-5}\,dx = \left[\begin{array}{l} t = 7x-5 \;/' \\ dt = 7\,dx \\ dx = \frac{1}{7}\,dt \end{array}\right] = \int e^t \cdot \frac{1}{7}\,dt =$$

$$= \frac{1}{7}e^t + c = \frac{1}{7}e^{7x-5} + c$$

(б) $$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \int \frac{dx}{a^2\left(\frac{x^2}{a^2}+1\right)} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1} = \left[\begin{array}{l} t = \frac{x}{a} \;/' \\ dt = \frac{1}{a}\,dx \\ dx = a\,dt \end{array}\right] =$$

личи на $\int \frac{dx}{x^2+1}$ из таблице

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{a}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{a}\operatorname{arctg} t + c = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c$$

(в) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \int \frac{dx}{a^2\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1} = \left[\begin{array}{l} t=\frac{x}{a} \\ dt=\frac{1}{a}dx \\ dx=a\,dt \end{array}\right] =$

личи на $\int \frac{dx}{x^2-1}$ из таблице

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{a}{t^2-1}\,dt = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| + c =$$

$$= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{1-\frac{x}{a}}{1+\frac{x}{a}}\right| + c =$$

$$= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a-x}{a+x}\right| + c \qquad \blacksquare$$

На сличан начин се може добити:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c$$

3. (а) $\int \frac{dx}{2x^2+1}$; (б) $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$; (в) $\int \frac{x}{1+x^2}\,dx$

решење

(а) $\int \frac{dx}{2x^2+1} = \int \frac{dx}{(x\sqrt{2})^2+1} = \left[\begin{array}{l} t=x\sqrt{2} \\ dx=\frac{1}{\sqrt{2}}dt \end{array}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dt}{t^2+1} =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg} t + c = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}) + c$$

(б) $$\int \frac{dx}{\underbrace{x^2+x}+1} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+1} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} =$$

од прва два правимо квадрат бинома

намештамо на облик A^2+1

$$= \int \frac{dx}{\frac{3}{4}\left(\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{3}{4}}+1\right)} = \frac{4}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2+1} =$$

$$= \frac{4}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \left[\begin{array}{l} t = \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \\ dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\,dt \end{array}\right] =$$

$$= \frac{4}{3}\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{t^2+1}\,dt = \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg} t + c = \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c$$

напомена: уместо x^2+x+1 је могао бити било који квадратни полином који нема реалних нула и поступак би био исти.

(в) $$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \left[\begin{array}{l} t = x^2+1 \\ dt = 2x\,dx \\ x\,dx = \frac{1}{2}\,dt \end{array}\right] = \int \frac{\frac{1}{2}\,dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t|+c =$$

примећујемо $(x^2+1)' = 2x$, а x се појављује у бројиоцу

$$= \frac{1}{2}\ln|\underbrace{x^2+1}_{\text{увек је позитивно}}| + c = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c.$$

$\boxed{4.}$ (а) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$; (б) $\int \frac{dx}{x\cdot\ln x\cdot\ln(\ln x)}$

решење

(а) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \left[\begin{array}{l} t=\ln x \\ dt=\frac{1}{x}dx \end{array}\right] = \int t\,dt = \frac{t^2}{2}+C = \frac{\ln^2 x}{2}+C$

примећујемо
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

(б) $\int \frac{dx}{x\cdot\ln x\cdot\ln(\ln x)} = \left[\begin{array}{l} t=\ln x \\ dt=\frac{1}{x}dx \end{array}\right] = \int \frac{dt}{t\cdot\ln t} = \left[\begin{array}{l} p=\ln t \\ dp=\frac{1}{t}dt \end{array}\right] =$

$= \int \frac{dp}{p} = \ln|p|+C = \ln|\ln t|+C = \ln|\ln(\ln x)|+C$ ■

$\boxed{5.}$ (а) $\int x e^{-x^2}\,dx$; (б) $\int \sin^3 x$; (в) $\int \sin^4 x\,dx$; (г) $\int \operatorname{tg} x\,dx$.

решење

(а) $\int x e^{-x^2}\,dx = \left[\begin{array}{l} t=-x^2 \\ dt=-2x\,dx \\ x\,dx=-\frac{1}{2}dt \end{array}\right] = -\frac{1}{2}\int e^t\,dt = -\frac{1}{2}e^t+C = -\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$

(б) $\int \sin^3 x\,dx = \int \sin^2 x\cdot\sin x\,dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x\,dx =$

$= \left[\begin{array}{l} t=\cos x \\ dt=-\sin x\,dx \\ \sin x\,dx=-dt \end{array}\right] =$

$= -\int (1-t^2)\,dt =$

$= \int (t^2-1)\,dt =$

$= \frac{t^3}{3} - t + C =$

$= \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C$

идеја је да ф-ју запишемо у облику $\begin{pmatrix}\text{израз само}\\ \text{са } \cos x\end{pmatrix}\cdot\sin x$, па уведемо смену $t=\cos x$

или

$\begin{pmatrix}\text{израз само}\\ \text{са } \sin x\end{pmatrix}\cdot\cos x$, па уведемо смену $t=\sin x$

(в) $\int \sin^4 x\,dx = \int (\sin^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx =$

$= \int \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^2 2x\right) dx =$

$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\underbrace{\int \cos 2x\,dx}_{I_1} + \frac{1}{4}\underbrace{\int \cos^2 2x\,dx}_{I_2}$ ✪

$I_1 = \int \cos 2x\,dx = \begin{bmatrix} t = 2x \\ dx = \frac{1}{2}dt \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int \cos t\,dt = \frac{1}{2}\sin 2x + c_1$

$\boxed{\text{смена } t = 4x}$

$I_2 = \int \cos^2 2x\,dx = \int \frac{1+\cos 4x}{2}\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\int \cos 4x\,dx =$

$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x + c_2$

Вратимо се у ✪:

$\int \sin^4 x\,dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}I_1 + \frac{1}{4}I_2 =$

$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + \frac{1}{4}c_2 =$

$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$

(г) $\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \begin{bmatrix} t = \cos x \\ \sin x\,dx = -dt \end{bmatrix} =$

$= -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + c = -\ln|\cos x| + c$ ■

$\boxed{6.}$ (а) $\int tg^4 x\, dx$; (б) $\int \cos^7 x \sin^4 x\, dx$; (в) $\int \frac{arctg\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx$

решење

(а) $\int tg^4 x\, dx = \begin{bmatrix} t = tg\, x \\ x = arctg\, t \;/' \\ dx = \frac{1}{1+t^2} dt \end{bmatrix} = \int \frac{t^4}{1+t^2} dt = \int \frac{t^4 - 1 + 1}{1+t^2} dt =$

$$= \int \frac{(t^2-1)(t^2+1)+1}{1+t^2} dt = \int \left(t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2}\right) dt =$$

$$= \frac{t^3}{3} - t + arctg\, t + c =$$

$$= \frac{(tg\, x)^3}{3} - tg\, x + arctg\,(tg\, x) + c$$

$$= \frac{tg^3 x}{3} - tg\, x + x + c$$

(б) $\int \cos^7 x \sin^4 x\, dx = \int \sin^4 x \cdot (\cos^2 x)^3 \cdot \cos x\, dx =$

$$= \int \sin^4 x\,(1-\sin^2 x)^3 \cos x\, dx = \begin{bmatrix} t = \sin x \\ dt = \cos x\, dx \end{bmatrix} =$$

$$= \int t^4 (1-t^2)^3\, dt = \int t^4 (1 - 3t^2 + 3t^4 - t^6)\, dt =$$

$$= \int (t^4 - 3t^6 + 3t^8 - t^{10})\, dt = \frac{1}{5}t^5 - \frac{3}{7}t^7 + \frac{3}{9}t^9 - \frac{1}{11}t^{11} + c =$$

$$= \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{3}{7}\sin^7 x + \frac{1}{3}\sin^9 x - \frac{1}{11}\sin^{11} x + c$$

(в) $\int \frac{arctg\sqrt{x}}{\sqrt{x}\,(1+x)} dx = \begin{bmatrix} t = \sqrt{x} \\ dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \\ \frac{1}{\sqrt{x}} dx = dt \end{bmatrix} = \int \frac{arctg\, t}{1+t^2} dt = \begin{bmatrix} p = arctg\, t \\ dp = \frac{dt}{1+t^2} \end{bmatrix} =$

$$= \int p\, dp = \frac{1}{2}p^2 + c = \frac{1}{2} arctg^2 t + c = \frac{1}{2} arctg^2 \sqrt{x} + c$$

$\boxed{7.}$ (а) $\int xe^x dx$; (б) $\int e^{\sqrt{x}} dx$; (в) $\int \ln x \, dx$

решење

(а) $\int xe^x dx = \begin{bmatrix} u = x & dv = e^x dx \\ du = dx & v = e^x \end{bmatrix} = xe^x - \int e^x dx =$

$= xe^x - e^x + c$

(б) $\int e^{\sqrt{x}} dx = \begin{bmatrix} t = \sqrt{x} \\ x = t^2 \\ dx = 2t\,dt \end{bmatrix} = \int 2te^t dt \overset{(a)}{=} 2(te^t - e^t) + c =$

$= 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + c$

(в) $\int \ln x \, dx = \begin{bmatrix} u = \ln x & dv = dx \\ du = \frac{1}{x} dx & v = x \end{bmatrix} = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx =$

$= x\ln x - x + c$ ■

$\boxed{8.}$ (а) $\int \arcsin x \, dx$; (б) $\int x \operatorname{arctg} x \, dx$

решење

(а) $\int \arcsin x \, dx = \begin{bmatrix} u = \arcsin x & dv = dx \\ du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx & v = x \end{bmatrix} =$

$= x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{bmatrix} t = 1-x^2 \\ dt = -2x\,dx \\ x\,dx = -\frac{1}{2} dt \end{bmatrix} =$

$= x\arcsin x + \underbrace{\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}}}_{\sqrt{t}} = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$

(б) $\int x \operatorname{arctg} x \, dx = \begin{bmatrix} u = \operatorname{arctg} x & dv = x\,dx \\ du = \frac{1}{1+x^2} dx & v = \frac{1}{2}x^2 \end{bmatrix} =$

$$= \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + c \qquad \blacksquare$$