ТОПОЛОГИЈА А

2020/2021.

Обавезе на курсу:

1. домаћи
2. писмени испит
3. усмени испит

асистент: Милица Јовановић

e-mail: milica_jovanovic@matf.bg.ac.rs

сајт: poincare.matf.bg.ac.rs/~milica_jovanovic

кабинет: 824

САДРЖАЈ

Увод 1

Основни појмови 6

База и предбаза топологије 24

Наслеђена топологија 31

Непрекидност 33

Отворена и затворена пресликавања 38

Хомеоморфизми 42

Повезаност 50

Компоненте повезаности 56

Локална повезаност 59

Путна повезаност 62

Брауерова и Борсук-Уламова теорема 66

Аксиоме сепарације 70

Конвергенција низова 82

Тополошки производ 84

Компактност 92

Локална компактност 101

Компактификација 102

Линделефовост, сепарабилност, I и II аксиома пребројивости 109

Количнички простори 118

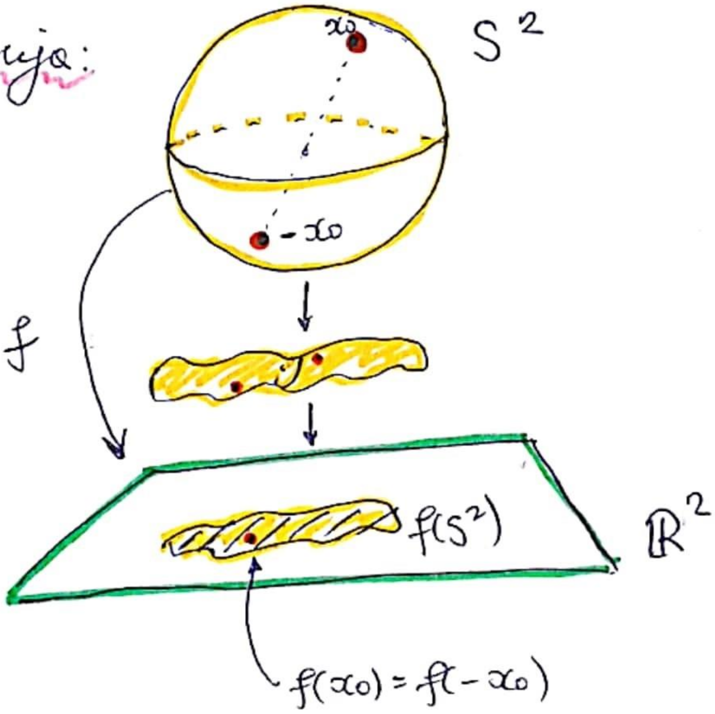
Увод

Неке познате теореме у топологији: **БУТ1**

Теорема (Борсук–Уламова т.) Нека је $f: S^2 \to \mathbb{R}^2$ непрекидна. Тада постоји тачка $x_0 \in S^2$ т.д.

$$f(-x_0) = f(x_0).$$

Илустрација:



x_0 и $-x_0$ се зову „антиподалне" тачке

Пример У сваком тренутку на Земљи постоји пар антиподалних тачака које имају исту температуру и ваздушни притисак.

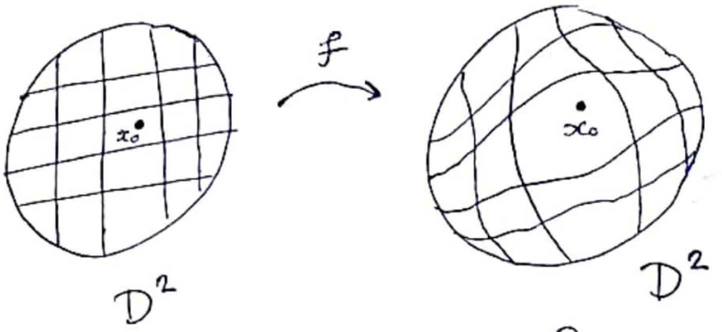
$$f: S^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$f(x) \overset{def}{=} \big(\underset{\text{температура}}{t(x)}, \underset{\text{притисак}}{p(x)}\big)$$

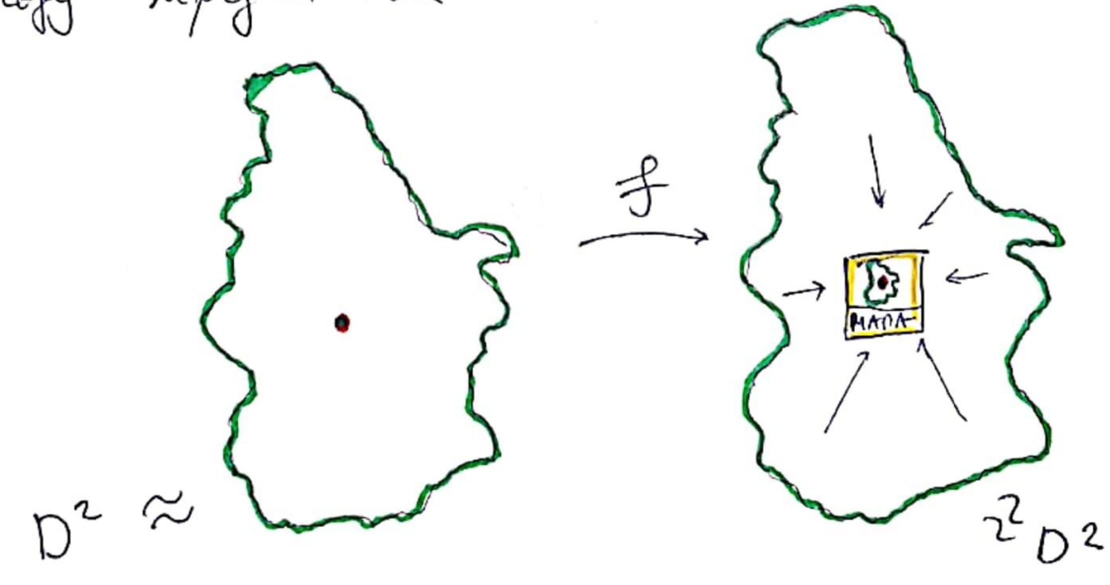
$$\overset{\text{БУТ}}{\Longrightarrow} (\exists x_0 \in S^2)\ f(x_0) = f(-x_0)$$

Теорема (Брауерова т.) Нека је $f: D^2 \to D^2$ непрекидно. Тада f има фиксну тачку (тј. постоји $x_0 \in D^2$ т.д. $f(x_0) = x_0$).

Илустрација:



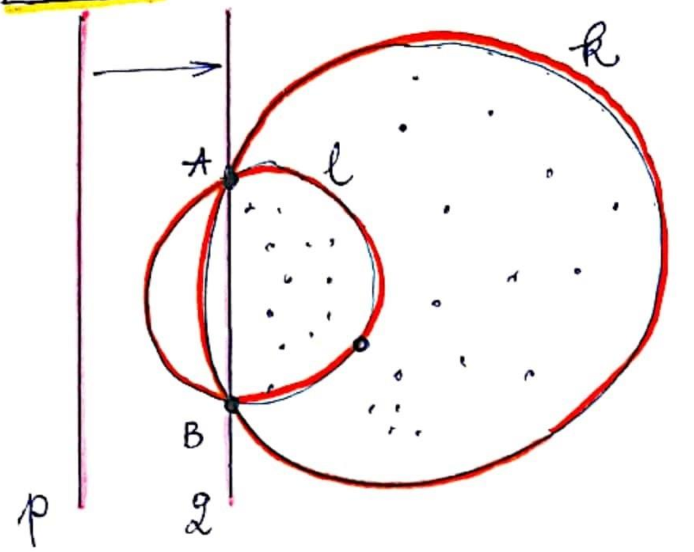
Пример Ако спустимо мапу Србије на сто, увек ће постојати тачка на мапи која је управо на локацији коју представља.



У топологији територија Србије је мање више диск, тј. те две области су хомеоморфне

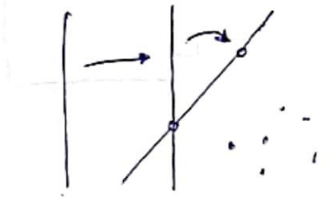
1. Дат је скуп од 2020 тачака у равни у општем положају (никоје три нису колинеарне, никоје четири нису концикличне). Доказати да постоји кружница т.д. је тачно 1712 тачака унутар ње и тачно 305 ван.

решење



I корак: бирамо праву p т.д. су све тачке са исте стране ове праве.

II корак: транслирамо p ка тачкама док не дохвати 2 тачке (евентуално транслација + ротација)



III корак: бирамо кружницу k т.д. $A, B \in k$ и све остале тачке су унутар ње.

IV корак: смањујемо k до тражене кружнице l.

(прво је 0 тачака ван, па 1, 2, 3, итд. дођемо до 305.) $\blacksquare$

Теорема (Борсук-Уламова т.) Нека је $f: S^2 \to \mathbb{R}^2$ непрекидно и антиподално (тј. $(\forall x \in S^2)\ f(-x) = -f(x)$). Тада постоји $x_0 \in S^2$ т.д. $f(x_0) = 0$.

БУТ2

Став БУТ1 $\Longleftrightarrow$ БУТ2.

$\blacktriangle$ $\Longrightarrow$: Нека је $f: S^2 \to \mathbb{R}^2$ непр. и антипод. Тада на основу БУТ1: $(\exists x_0 \in S^2)\ f(x_0) = f(-x_0)$,

али $f(-x_0) = -f(x_0)$, па је $f(x_0) = -f(x_0)$

$\Rightarrow\ 2f(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) = 0.$

$\Leftarrow$: Нека је $f: S^2 \to \mathbb{R}^2$ непр. и нека је $g: S^2 \to \mathbb{R}^2$

$$g(x) \overset{\text{def}}{=} f(x) - f(-x).$$

Тада је g непр. и антип. $\big(g(-x) = f(-x) - f(x) = -g(x)\big)$, па на основу БУТ2: $(\exists x_0 \in S^2)\ g(x_0) = 0$, тј.

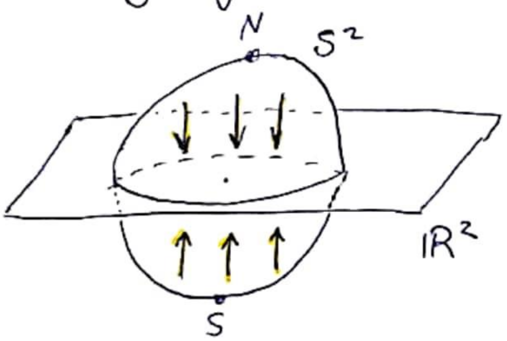
$$f(x_0) = f(-x_0). \quad \blacksquare$$

Скица доказа БУТ2:

Комплетан доказ у: Using the Borsuk–Ulam Theorem, Jiří Matoušek

Нека је $f: S^2 \to \mathbb{R}^2$ непр. и антиподално и п.п.с. да f нема нула.

Нека је $g: S^2 \to \mathbb{R}^2$ пројекција дата са

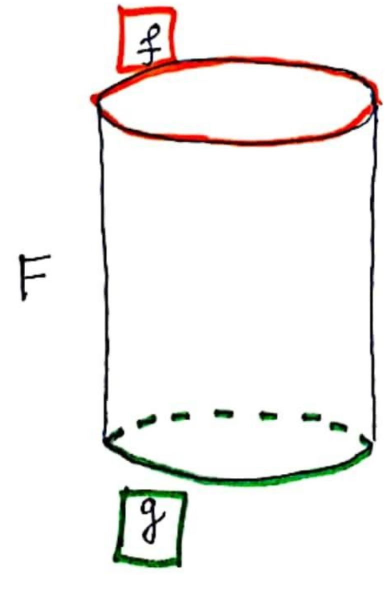


$$g(x_1, x_2, x_3) \overset{\text{def}}{=} (x_1, x_2).$$

Примећујемо да g има тачно 2 нуле $g(N) = g(S) = 0$.

Даље, нека је $F: S^2 \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$ дато са

$$F(x,t) \overset{\text{def}}{=} (1-t)\,g(x) + t\,f(x).$$



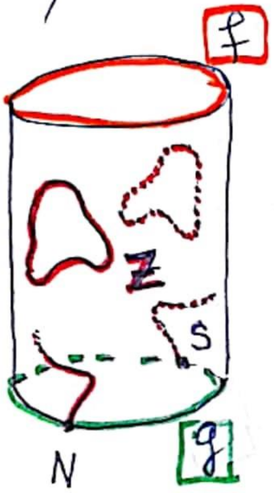
Видимо да је $F(x,0) = g(x)$, $F(x,1) = f(x)$.

Антиподалност се са f проширује на F, тј. важи

$$F(-x,t) = F(x,t).$$

(тј. $(\forall t \in [0,1])$ $F(x,t)$ је антиподално)

Посматрајмо $Z \overset{\text{def}}{=} F^{-1}(\{0\})$. Када је f „довољно лепо" (што је могуће постићи), скуп Z је 1-димензиона компактна многострукост, тј. састоји се од затворених путања или од путева чији је и почетак и крај на неком од кругова $S^2\times\{0\}$ или $S^2\times\{1\}$.
Такође, због антиподалности F, скуп Z мора бити симетричан.



Како g има тачно 2 нуле, то је $|Z\cap(S^2\times\{0\})|=2$, а како f нема нула, то је $Z\cap(S^2\times\{1\})=\phi$.
Једино је могуће да се путање које крећу из N и S споје, али то је неизводљиво јер због антиподалности F, оне стално „беже" једна од друге.
Дакле, дошли смо до контрадикције па закључујемо да f мора имати нулу. ▨

$\boxed{\text{Напомена}}$ Све претходно важи и за пресликавања
$$f: S^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Основни појмови

Познато од раније: скуп U у метричком простору (X,d) је отворен ако $(\forall x\in U)(\exists r>0)\ B(x;r)\subseteq U$.

Важи и теорема:

$\boxed{\text{Теорема}}$ Ако је (X,d) метрички простор, онда:

(1) ϕ и X су отворени;

(2) A,B отворени $\Rightarrow A\cap B$ отворен;

(3) $(\forall \alpha\in A)\ U_\alpha$ отворен $\Rightarrow \bigcup\limits_{\alpha\in A} U_\alpha$ отворен.

Топологија се управо дефинише као фамилија скупова која испуњава претходна својства.

$\boxed{\text{Дефиниција}}$ Нека је X произвољан скуп и $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{P}(X)$ фамилија подскупова од X т.д. важи:

(1) $\phi, X\in\mathcal{T}$;

(2) $U,V\in\mathcal{T}\Rightarrow U\cap V\in\mathcal{T}$;

(3) $(\forall\alpha\in A)\ U_\alpha\in\mathcal{T}\Rightarrow\bigcup\limits_{\alpha\in A}U_\alpha\in\mathcal{T}$.

Тада се фамилија $\mathcal{T}$ назива топологијом на X, а пар $(X,\mathcal{T})$ тополошким простором.

$\boxed{\text{Дефиниција}}$ Скуп $U\subseteq X$ је отворен у тополошком простору $(X,\mathcal{T})$, ако је $U\in\mathcal{T}$.

$\boxed{\text{Дефиниција}}$ Скуп $F\subseteq X$ је затворен у тополошком простору $(X,\mathcal{T})$, ако је $F^c\in\mathcal{T}$.

Дефиниција Пресликавање $f: X \to Y$ је непрекидно ако за сваки отворен (затворен) скуп $V \subseteq Y$ је $f^{-1}(V)$ отворен (затворен) у X.

Неке особине операција са скуповима

1. X - скуп, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ - фамилија подскупова

$$\bigcup \mathcal{A} \overset{def}{=} \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \in X \mid (\exists A \in \mathcal{A})\ x \in A\}$$

$$\bigcap \mathcal{A} \overset{def}{=} \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \in X \mid (\forall A \in \mathcal{A})\ x \in A\}$$

Приметимо $\bigcup, \bigcap : \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$.

2. Λ - скуп индекса, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$.
Фамилија $\mathcal{A}$ може да се индексира скупом Λ ако постоји функција индексације $\varphi: \Lambda \to \mathcal{A}$, $\varphi(\lambda) := A_\lambda$, која је „на". Тада је $\mathcal{A} = \{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$.

3. $\mathcal{A} = \{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, $\mathcal{B} = \{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$

$$(\forall \lambda \in \Lambda)\ A_\lambda \subset B_\lambda \Rightarrow \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\right) \wedge \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\right)$$

4. $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \Rightarrow (\bigcup \mathcal{A} \subseteq \bigcup \mathcal{B}) \wedge (\bigcap \mathcal{A} \supseteq \bigcap \mathcal{B})$

5. Де Морганови закони

$$\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c \quad ; \quad \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c$$

6. $$\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \cup \left(\bigcap_{\mu\in M} B_\mu\right) = \bigcap_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M} \left(A_\lambda \cup B_\mu\right)$$

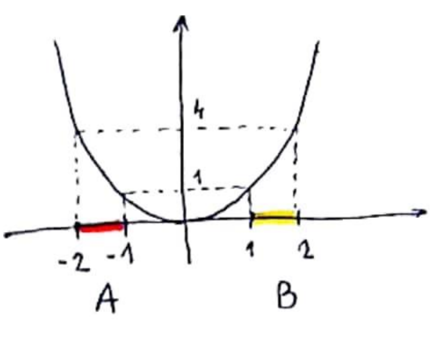
$$\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \cap \left(\bigcup_{\mu\in M} B_\mu\right) = \bigcup_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M} \left(A_\lambda \cap B_\mu\right)$$

7. $\mathcal{A} = \{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \mathcal{P}(X)$, $f: X \to Y$

$$f\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda)$$

$$f\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda)$$ (важи „=" ако је f „1-1")

нпр. $f(x) = x^2$, $A = [-2,-1]$, $B = [1,2]$



$f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset$

$f(A) \cap f(B) = [1,4]$

8. $\mathcal{B} = \{B_\mu\}_{\mu \in M} \subseteq \mathcal{P}(Y)$, $f: X \to Y$

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\mu \in M} B_\mu\right) = \bigcup_{\mu \in M} f^{-1}(B_\mu)$$

$$f^{-1}\left(\bigcap_{\mu \in M} B_\mu\right) = \bigcap_{\mu \in M} f^{-1}(B_\mu)$$

9. $B \subseteq Y \Rightarrow \quad f^{-1}(B^c) = \left(f^{-1}(B)\right)^c$

10. $f: X \to Y$, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$

$f^{-1}(f(A)) \supseteq A$ („=" за f „1-1")

$f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ („=" за f „на")

11. $X \xrightarrow{f} Y \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} Z$

$h \circ f = g \circ f$ и f је „на" $\Rightarrow h = g$

(сурјективне функције су регуларне здесна)

12. $X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{h} Z$

$h \circ f = h \circ g$ и h „1-1" $\Rightarrow f = g$

(инјективне функције су регуларне слева)

$\mathcal{T}_X$ – топологија на X (сви отворени скупови)

$\mathcal{F}_X$ – сви затворени скупови

Приметимо да је $\mathcal{T}_X, \mathcal{F}_X \subseteq \mathcal{P}(X)$.

Такође, $\mathcal{P}(X) \setminus \mathcal{T}_X \neq \mathcal{F}_X$, тј. постоје скупови који нису ни отворени ни затворени, а и они који јесу оба.

Што је „више" отворених, то је „више" затворених.

Теорема Нека је $(X, \mathcal{T})$ тополошки простор и $\mathcal{F}_X$ фамилија затворених скупова. Тада

(1) $\emptyset, X \in \mathcal{F}_X$;

(2) $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_X \Rightarrow F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}_X$;

(3) $(\forall \alpha \in A)\ F_\alpha \in \mathcal{F}_X \Rightarrow \bigcap\limits_{\alpha \in A} F_\alpha \in \mathcal{F}_X$.

Нека су $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ две топологије на X $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{P}(X))$.

Ове две топологије могу бити:

(1) $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ (једнаке);

(2) $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ ($\mathcal{T}_1$ је ужа, тј. грубља, а $\mathcal{T}_2$ шира, тј. финија);

(3) $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$;

(4) неупоредиве, тј. $\mathcal{T}_1 \setminus \mathcal{T}_2 \neq \emptyset \neq \mathcal{T}_2 \setminus \mathcal{T}_1$.

$\boxed{\text{Лема}}$ $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2 \Rightarrow \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$.

▲ $\mathcal{F}_1 = \{U^c \mid U \in \mathcal{T}_1\} \subseteq \{U^c \mid U \in \mathcal{T}_2\} = \mathcal{F}_2$. ■

$\boxed{\text{Пример}}$ Топологије на произвољном скупу X:

(1) дискретна $\mathcal{T}_d \overset{def}{=} \mathcal{P}(X)$ (свака тачка је отворен скуп), ово је најфинија топологија;

(2) антидискретна $\mathcal{T}_a \overset{def}{=} \{\emptyset, X\}$ - најгрубља;

(3) кофинитна $\mathcal{T}_{cf} \overset{def}{=} \{U \subseteq X \mid U^c \text{ коначан}\} \cup \{\emptyset\}$;

(4) копребројива $\mathcal{T}_{cc} \overset{def}{=} \{U \subseteq X \mid U^c \text{ пребројив}\} \cup \{\emptyset\}$;

(5) топологија уочене тачке $x_0 \in X$, $\mathcal{T}_{x_0} \overset{def}{=} \{U \subseteq X \mid x_0 \in U\} \cup \{\emptyset\}$, овде је $\{x\}$ затворен за свако $x \in X \setminus \{x_0\}$.

$\boxed{\text{Пример}}$ Топологије на $\mathbb{R}$:

(1) уобичајена топологија $\mathcal{U}$ - добијена од еуклидске метрике ($B(x;r) = \{y \in \mathbb{R} \mid |y-x| < r\}$)

(2) Зоргенфрејева права $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ (Sorgenfrey)

$$U \in \mathcal{S} \overset{def}{\Longleftrightarrow} U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} [a_\lambda, b_\lambda),\ a_\lambda, b_\lambda \in \mathbb{R} \text{ или } U = \emptyset$$

(видећемо касније на курсу да је $\{[a_\lambda, b_\lambda)\}$ база за $\mathcal{S}$)

(3) топологија левих интервала

$$\mathcal{L} \overset{df}{=} \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$$

ово заиста јесте топологија: $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} (-\infty, a_\lambda) = (-\infty, \sup_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda) \in \mathcal{L}$;

(4) топологија десних интервала

$$\mathcal{D} = \{(a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$$

и ово је топологија: $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} (a_\lambda, +\infty) = (\inf_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda, +\infty) \in \mathcal{D}$.

$\boxed{1.}$ Доказати да $\mathcal{T}_{cc}$ јесте топологија.

▲ $\mathcal{T}_{cc} = \{U \subseteq X \mid U^c \text{ пребројив}\} \cup \{\emptyset\}$

(1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}_{cc}$ ✓

(2) $U, V \in \mathcal{T}_{cc} \overset{?}{\Rightarrow} U \cap V \in \mathcal{T}_{cc}$

U^c, V^c - пребројиви $\Rightarrow U^c \cup V^c = (U \cap V)^c$ пребројив

$\Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}_{cc}$ ✓

(3) $U_\lambda \in \mathcal{T}_{cc}, \lambda \in \Lambda$, тј. U_λ^c су пребројиви

$$\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda\Big)^c = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda^c \subseteq U_{\lambda_0}^c \text{ - пребројив} \quad (\lambda_0 \in \Lambda \text{ произвољан})$$

$\Rightarrow \mathcal{T}_{cc}$ јесте топологија. ■

Специјално, ако је X пребројив, онда је $\mathcal{T}_{cc} = \mathcal{T}_d$, а ако је коначан, онда је $\mathcal{T}_{cf} = \mathcal{T}_d$.

2. Упоредити све поменуте топологије на $\mathbb{R}$.

▲ Упоређујемо $\mathcal{T}_a, \mathcal{T}_d, \mathcal{T}_{cf}, \mathcal{T}_{cc}, \mathcal{T}_{x_0}, \mathcal{U}, \mathcal{L}, \mathcal{D}, \mathcal{S}$.

- $\mathcal{T}_a$ је најгрубља, $\mathcal{T}_d$ најфинија
- $\mathcal{T}_{cf} \subseteq \mathcal{T}_{cc}$
- $\mathcal{T}_{x_0} \subseteq \mathcal{T}_d$ и ниједне више

$\{x_0\} \in \mathcal{T}_{x_0}$, али $\{x_0\} \notin \mathcal{T}_{cf}, \mathcal{T}_{cc}$, па $\mathcal{T}_{x_0} \nsubseteq \mathcal{T}_{cf}, \mathcal{T}_{cc}$,

$\{x_0\}^c \in \mathcal{T}_{cf}, \mathcal{T}_{cc}$, али $\{x_0\}^c \notin \mathcal{T}_{x_0}$, па $\mathcal{T}_{x_0} \nsupseteq \mathcal{T}_{cf}, \mathcal{T}_{cc}$,

$\{x_0\} \in \mathcal{T}_{x_0}$, али $\{x_0\} \notin \mathcal{L}$, па $\mathcal{T}_{x_0} \nsubseteq \mathcal{L}$,

$(-\infty, x_0-1) \in \mathcal{L}$, али $(-\infty, x_0-1) \notin \mathcal{T}_{x_0}$, па $\mathcal{T}_{x_0} \nsupseteq \mathcal{L}$,

$\{x_0\} \in \mathcal{T}_{x_0}$, али $\{x_0\} \notin \mathcal{D}$, па $\mathcal{T}_{x_0} \nsubseteq \mathcal{D}$,

$(x_0+1, +\infty) \in \mathcal{D}$, али $(x_0+1, +\infty) \notin \mathcal{T}_{x_0}$, па $\mathcal{T}_{x_0} \nsupseteq \mathcal{D}$,

$\{x_0\} \in \mathcal{T}_{x_0}$, али $\{x_0\} \notin \mathcal{S}$, па $\mathcal{T}_{x_0} \nsubseteq \mathcal{S}$,

$[x_0-1, x_0) \in \mathcal{S}$, али $[x_0-1, x_0) \notin \mathcal{T}_{x_0}$, па $\mathcal{T}_{x_0} \nsupseteq \mathcal{S}$.

Дакле, $\mathcal{T}_{x_0}$ је неупоредива са свим топологијама сем са $\mathcal{T}_a$ и $\mathcal{T}_d$.

- $\mathcal{L}$ и $\mathcal{D}$ су неупоредиве и $\mathcal{L}, \mathcal{D} \subseteq \mathcal{U}$.

• $\mathcal{S} \not\subseteq \mathcal{U}$ јер $[a,b) \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{U}$.

• $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{S}$:

$(a,b) \in \mathcal{U}$, $a, b \in \mathbb{R}$

$(a,b) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a + \frac{1}{n}, b) \in \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{U} \subseteq \mathcal{S}$.

(јер је сваки $U \in \mathcal{U}$ унија интервала)

• $\mathcal{T}_{cf} \subseteq \mathcal{U}$ и $\mathcal{T}_{cf} \not\subseteq \mathcal{L}, \mathcal{D}$

• $\mathcal{T}_{cc} \not\subseteq \mathcal{U}$:

Нека је $U = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{T}_{cc}$

$0 \in U$, али не постоји $\varepsilon > 0$ т.д. $(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq U$, па $U \notin \mathcal{U}$

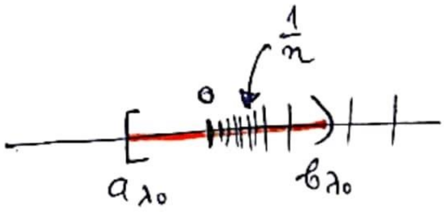
Дакле, $\mathcal{T}_{cc} \not\subseteq \mathcal{U}$.

• $\mathcal{T}_{cc} \not\subseteq \mathcal{S}$:

Нека је $U = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{T}_{cc}$ и претпоставимо да је $U \in \mathcal{S}$. Тада је $U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} [a_\lambda, b_\lambda)$, па

$$(\exists \lambda_0 \in \Lambda)\ 0 \in [a_{\lambda_0}, b_{\lambda_0}),$$

па је $[a_{\lambda_0}, b_{\lambda_0}) \subseteq \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ ↯



Дакле, $\mathcal{T}_{cc} \not\subseteq \mathcal{S}$.

• $\mathcal{U} \not\subseteq \mathcal{T}_{cc}$:

$(0,1) \in \mathcal{U}$, али $(0,1)^c$ није пребројив, па $\mathcal{U} \not\subseteq \mathcal{T}_{cc}$.

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{T}_{cf} \arrow[rr] & & \mathcal{T}_{cc} \arrow[ddr] & \\
 & \mathcal{D} \arrow[dr] & & & \\
\mathcal{T}_a \arrow[uur] \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[ddrr] & & \mathcal{U} \arrow[r] & \mathcal{S} \arrow[r] & \mathcal{T}_d \\
 & \mathcal{L} \arrow[ur] & & & \\
 & & \mathcal{T}_{x_0} \arrow[uurr] & &
\end{tikzcd}
$$

Дефиниција Нека је $(X, \mathcal{T})$ тополошки простор и $A \subseteq X$.

(1) $x_0 \in X$ је унутрашња тачка скупа A ако

$$(\exists U \in \mathcal{T})\ x_0 \in U \subseteq A.$$

Унутрашњост скупа A је

$$\boxed{\operatorname{int} A \overset{\text{def}}{=} \{ x \in X \mid (\exists U \in \mathcal{T})\ x \in U \subseteq A \}}.$$

(2) Околина тачке $x_0 \in X$, тј. околински систем је

$$\boxed{\mathcal{O}(x_0) \overset{\text{def}}{=} \{ A \subseteq X \mid x_0 \in \operatorname{int} A \} = \{ A \subseteq X \mid (\exists U \in \mathcal{T})\ x_0 \in U \subseteq A \}}$$

(3) Спољашњост скупа A је

$$\boxed{\operatorname{ext} A \overset{\text{def}}{=} \operatorname{int}(A^c)}.$$

(4) $x_0 \in X$ је адхерентна тачка скупа A ако

$$(\forall U \in \mathcal{T})\ x_0 \in U \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset,$$

тј. $(\forall U \in \mathcal{O}(x_0))\ U \cap A \neq \emptyset$.

Затворење скупа A је

$$\boxed{\bar{A} = \mathrm{cl}\,A \overset{\text{df}}{=} \{x\in X \mid x \text{ адхерентна т. од } A\}}$$

(5) Граница (руб) скупа A је

$$\partial A \overset{\text{df}}{=} \{x\in X \mid (\forall U\in \mathcal{O}(x))\ U\cap A\neq\emptyset \wedge U\cap A^c\neq\emptyset\}$$

$$= \{x\in X \mid (\forall U\in\mathcal{T})\ x\in U \Rightarrow U\cap A\neq\emptyset\wedge U\cap A^c\neq\emptyset\}$$

(6) $x_0\in X$ је тачка нагомилавања скупа A ако

$$(\forall U\in\mathcal{T})\ x_0\in U\Rightarrow (U\setminus\{x_0\})\cap A\neq\emptyset.$$

Пример $X=\{a,b\}$, $\mathcal{T}=\{\emptyset,\{a\},\{a,b\}\}$, $A=\{a,b\}$

b је тачка нагомилавања скупа A, али не важи да је у свакој њеној околини бесконачно много тачака.

3. (а) $\mathrm{int}\,A = \overbrace{\bigcup_{U\in\mathcal{T},\, U\subseteq A} U}^{\text{У}}$; (б) $\bar{A} = \overbrace{\bigcap_{F\in\mathcal{F}_X,\, A\subseteq F} F}^{\Pi}$.

▲ (а) $\subseteq$: $x\in\mathrm{int}A \Rightarrow (\exists U\in\mathcal{T})\ x\in U\subseteq A \Rightarrow x\in$ У,

$\supseteq$: $x\in$ У $\Rightarrow (\exists U_1\in\mathcal{T})\ U_1\subseteq A\wedge x\in U_1 \Rightarrow x\in\mathrm{int}A.$

(б) $\subseteq$: $x\in\bar{A}$ и птс. $x\notin\Pi$

$\Rightarrow (\exists F\in\mathcal{F}_X)\ A\subseteq F\wedge x\notin F$

$\Rightarrow \quad x \in F^c \in \mathcal{T}, \quad F^c \subseteq A^c$

$\Rightarrow \quad F^c \cap A = \emptyset$

$\Rightarrow \quad x \notin \overline{A}$ $\lightning$

$\supseteq$: $x \in \Pi$ и т.с. $x \notin \overline{A}$

$\Rightarrow (\exists U \in \mathcal{T})\ x \in U \wedge U \cap A = \emptyset$

$\Rightarrow U^c \in \mathcal{F}, \ A \subseteq U^c, \ x \notin U^c$

$\Rightarrow \quad x \notin \Pi$ $\lightning$ $\blacksquare$

Битне последице претходног задатка:

- $\operatorname{int} A \in \mathcal{T}$
- $\operatorname{int} A \subseteq A$
- $A \in \mathcal{T} \Leftrightarrow A = \operatorname{int} A$
- $U \subseteq A \wedge U \in \mathcal{T} \Rightarrow U \subseteq \operatorname{int} A$
  (int A је највећи отворен скуп у A)

- $\overline{A} \in \mathcal{F}$
- $A \subseteq \overline{A}$
- $A \in \mathcal{F} \Leftrightarrow A = \overline{A}$
- $F \in \mathcal{F} \wedge A \subseteq F \Rightarrow \overline{A} \subseteq F$
  ($\overline{A}$ је најмањи затворен скуп који садржи A)

4. Нека је $(X,\mathcal{T})$ тополошки простор и $\emptyset \neq A \subseteq X$.

Доказати да је $X = \operatorname{int} A \sqcup \partial A \sqcup \operatorname{ext} A$.

▲

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{int} A \subseteq A \\ \operatorname{ext} A = \operatorname{int} A^c \subseteq A^c \end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{int} A \cap \operatorname{ext} A = \emptyset$$

Још треба показати да је $X \setminus (\operatorname{int} A \cup \operatorname{ext} A) = \partial A$.

Нека је $x \notin \operatorname{int} A$ и $x \notin \operatorname{ext} A$.

$$\left.\begin{array}{l} x \notin \operatorname{int} A \Rightarrow (\forall U \in \mathcal{O}(x))\ U \cap A^c \neq \emptyset \\ x \notin \operatorname{ext} A = \operatorname{int} A^c \Rightarrow (\forall U \in \mathcal{O}(x))\ U \cap \underbrace{(A^c)^c}_{= A} \neq \emptyset \end{array}\right\} \Rightarrow x \in \partial A.$$

Дакле, $X = \operatorname{int} A \sqcup \partial A \sqcup \operatorname{ext} A$. ■

Слично се показује да је $\overline{A} = \partial A \sqcup \operatorname{int} A$. (за вежбу)

5. Нека је $(X,\mathcal{T})$ тополошки простор и $A, B \subseteq X$.

(а) $A \subseteq B \Rightarrow \operatorname{int} A \subseteq \operatorname{int} B$;

(б) $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$;

(в) $\operatorname{int}(A \cup B) \supseteq \operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B$.

▲ (а) $\operatorname{int} A \overset{\boxed{\text{зад. 3.}}}{=} \bigcup\limits_{U \in \mathcal{T},\, U \subseteq A} U \subseteq \bigcup\limits_{U \in \mathcal{T},\, U \subseteq B} U \overset{\boxed{\text{зад. 3.}}}{=} \operatorname{int} B$

(б) $\subseteq$: $A \cap B \subseteq A, B \overset{(а)}{\Rightarrow} \operatorname{int}(A \cap B) \subseteq \operatorname{int} A, \operatorname{int} B$

$$\Rightarrow \operatorname{int}(A \cap B) \subseteq \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$$

$\supseteq$: $x \in \operatorname{int}A \cap \operatorname{int}B \Rightarrow (\exists U, V \in \mathcal{T})\ x \in U \subseteq A,\ x \in V \subseteq B$

$\Rightarrow x \in U \cap V \subseteq A \cap B$ и $U \cap V \in \mathcal{T} \Rightarrow x \in \operatorname{int}(A \cap B)$

(в) $\supseteq$: $A, B \subseteq A \cup B \overset{(a)}{\Rightarrow} \operatorname{int}A, \operatorname{int}B \subseteq \operatorname{int}(A \cup B) \Rightarrow \operatorname{int}A \cup \operatorname{int}B \subseteq \operatorname{int}(A \cup B)$

$\subseteq$: Не важи увек.

Контрапример:

1. пример	2. пример
$A = [0,1)$	$A = \mathbb{Q}$
$B = [1,2]$	$B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
$\operatorname{int}(A \cup B) = (0,2)$	$\operatorname{int}(A \cup B) = \mathbb{R}$
$\operatorname{int}A \cup \operatorname{int}B = (0,2) \setminus \{1\}$	$\operatorname{int}A \cup \operatorname{int}B = \emptyset$

$\blacksquare$

$\boxed{6.}$ Нека је $(X, \mathcal{T})$ тополошки простор и $A, B \subseteq X$.

(а) $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$;

(б) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

(в) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

▲ (а) $\overline{A} \overset{\text{зад 3}}{=} \bigcap_{F \in \mathcal{F}, A \subseteq F} F \subseteq \bigcap_{F \in \mathcal{F}, B \subseteq F} F \overset{\text{зад 3}}{=} \overline{B}$

(б) $\subseteq$: $A \cup B \subseteq \overline{A} \cup \overline{B} \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$

$\supseteq$: $A, B \subseteq A \cup B \overset{(a)}{\Rightarrow} \overline{A}, \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B} \Rightarrow \overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$

(в) $\subseteq$: $A\cap B \subseteq A, B \Rightarrow \overline{A\cap B} \subseteq \overline{A}, \overline{B} \Rightarrow \overline{A\cap B} \subseteq \overline{A}\cap\overline{B}$

$\supseteq$: Не важи увек.

Контрапример:

$A=(0,1)$, $B=(1,2)$

$\overline{A\cap B} = \emptyset$

$\overline{A}\cap\overline{B} = \{1\}$ ▨

$\boxed{7.}$ Нека је $(X,\mathcal{T})$ тополошки простор, $A\subseteq X$.

Доказати да је $(\operatorname{int} A)^c = \overline{A^c}$.

▲ $x\in(\operatorname{int} A)^c \iff \neg(\exists U\in\mathcal{O}(x))\ U\subseteq A$

$\iff (\forall U\in\mathcal{O}(x))\ U\cap A^c\neq\emptyset$

$\iff x\in\overline{A^c}$. ▨

Специјално, када у задатку 7. ставимо A^c уместо A, добијамо $\operatorname{int} A^c = (\overline{A})^c$.

$\boxed{8.}$ Нека је $(X,\mathcal{T})$ тополошки простор, $A,B\subseteq X$.

(а) $\partial\overline{A}\subseteq\partial A$;

(б) $\partial(\operatorname{int} A)\subseteq\partial A$;

(в) $\partial(\partial A)\subseteq\partial A$

(г) $\partial(A\cup B)\subseteq\partial A\cup\partial B$.

▲ (а) $\partial \overline{A} = \overline{\overline{A}} \cap \overline{(\overline{A}^c)} = \overline{A} \cap \overline{(\overline{A}^c)} \subseteq \overline{A} \cap \overline{A^c} = \partial A$

јер $\overline{A}^c \subseteq A^c$

Контрапример за $\supseteq$:

$A = (1,2) \cup (2,3)$

$\partial \overline{A} = \{1,3\}$

$\partial A = \{1,2,3\}$

(б) $\partial(\mathrm{int}A) = \overline{\mathrm{int}A} \cap \overline{(\mathrm{int}A)^c} \overset{\boxed{\text{зад. } 7.}}{=} \overline{\mathrm{int}A} \cap \overline{\overline{A^c}} =$

$= \overline{\mathrm{int}A} \cap \overline{A^c} \subseteq \overline{A} \cap \overline{A^c} = \partial A$

Контрапример за $\supseteq$:

$A = (0,1) \cup \{2\}$

$\partial(\mathrm{int}A) = \partial((0,1)) = \{0,1\}$

$\partial A = \{0,1,2\}$

(в) Ако је скуп B затворен, онда

$B = \overline{B} = \mathrm{int}B \sqcup \partial B \Rightarrow \partial B \subseteq B$

Специјално, $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$ је затворен, па је $\partial\partial A \subseteq \partial A$.

(г) $\partial(A \cup B) = \overline{A \cup B} \cap \overline{(A \cup B)^c} \overset{\boxed{\text{зад. } 6.}}{=} (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap \overline{A^c \cap B^c} \subseteq$

$\overset{\boxed{\text{зад. } 6.}}{\subseteq} (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap \overline{A^c} \cap \overline{B^c} =$

$$= (\underbrace{\overline{A}\cap\overline{A^c}}_{\partial A}\cap\overline{B^c}) \cup (\underbrace{\overline{B}\cap\overline{A^c}\cap\overline{B^c}}_{\partial B}) \subseteq \partial A\cup\partial B.$$

Контрапример за $\supseteq$:

$A = [1,2)$

$B = [2,3]$

$\partial(A\cup B) = \{1,3\}$

$\partial A \cup \partial B = \{1,2,3\}$ ■

$\boxed{9.}$ Одредити руб, унутрашњост и затворење скупова $\mathbb{Q}$, (a,b), $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ у топологијама $\mathcal{U}$, $\mathcal{T}_{cf}$, $\mathcal{T}_{cc}$.

▲ Подсетник:

$\mathcal{U}$ – стандардна топологија индукована метриком

$\mathcal{T}_{cf} = \{U\subseteq\mathbb{R} \mid U^c$ коначан$\}\cup\{\emptyset\}$

$\mathcal{T}_{cc} = \{U\subseteq\mathbb{R} \mid U^c$ највише пребројив$\}\cup\{\emptyset\}$

$\boxed{\mathcal{U}}$

(1) $\mathbb{Q}$:

$\operatorname{int}\mathbb{Q} = \emptyset$

$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

$\partial\mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}}\setminus\operatorname{int}\mathbb{Q} = \mathbb{R}$

(2) (a,b):

$\operatorname{int}(a,b) = (a,b)$

$\overline{(a,b)} = [a,b]$

$\partial(a,b) = \{a,b\}$

(3) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$:

$\operatorname{int}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \emptyset$

$\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

$\partial(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$

$\boxed{\mathcal{T}_{cf}}$

(1) $\mathbb{Q}$:

$\operatorname{int}\mathbb{Q} = \emptyset$ јер ако $x \in \operatorname{int}\mathbb{Q}$, онда $(\exists U \in \mathcal{T}_{cf})\ x \in U \subseteq \mathbb{Q}$,

али онда је U^c коначан и $U^c \supseteq \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ $\lightning$

$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ (јер су затворени скупови или коначни, или $\mathbb{R}$)

$\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$

(2) (a,b):

$\operatorname{int}(a,b) = \emptyset$

$\overline{(a,b)} = \mathbb{R}$

$\partial(a,b) = \mathbb{R}$

(3) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$:

$\operatorname{int}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \emptyset$

$\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

$\partial(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$

$\boxed{\mathcal{T}_{cc}}$

(1) $\mathbb{Q}$:

$\operatorname{int}\mathbb{Q} = \emptyset$ (као за $\mathcal{T}_{cf}$)

Свакако је $\mathbb{Q} \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$, са друге стране, $\mathbb{Q}^c = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \in \mathcal{T}_{cc}$, па је $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}^c)^c \in \mathcal{F}_{cc}$, па $\mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}}$.

$\partial\mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}} \setminus \operatorname{int}\mathbb{Q} = \mathbb{Q}$

(2) (a,b):

$\operatorname{int}(a,b) = \emptyset$

$\overline{(a,b)} = \mathbb{R}$

$\partial(a,b) = \mathbb{R}$

(3) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$:

$\operatorname{int}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \in \mathcal{T}_{cc}$

$\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ (затворени скупови су највише пребројиви или $\mathbb{R}$)

$\partial(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} \setminus \operatorname{int}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$. ▨

База и предбаза топологије

Нека је $(X, \mathcal{T})$ тополошки простор.

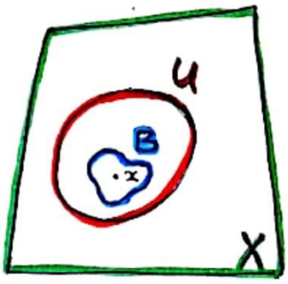
$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ је база топологије $\mathcal{T}$

$$\Longleftrightarrow$$

$(\forall U \in \mathcal{T})$ U је унија елемената из $\mathcal{B}$

$$\Longleftrightarrow$$

$(\forall U \in \mathcal{T})(\forall x \in U)(\exists B \in \mathcal{B})\ x \in B \subseteq U$



Примери (1) $(X, \mathcal{T}_d)$ има базу $\mathcal{B} = \mathcal{T}_d$;

(2) За $(X, \mathcal{T}_{x_0})$ најмања база је $\mathcal{B} = \{\{x_0\}\} \cup \{\{x_0, x\} \mid x \in X \setminus \{x_0\}\}$;

(3) За (M, d), тј. $(M, \mathcal{U})$ база је:

$$\mathcal{B} = \{B(x, r) \mid x \in M, r > 0\},$$

отворене кугле

мања база: $\mathcal{B} = \{B(x, r) \mid x \in M,\ r \in \mathbb{Q}^+\}$,

још мања база: $\mathcal{B} = \{B(x, \frac{1}{n}) \mid x \in M,\ n \in \mathbb{N}\}$;

(4) За $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ база је $\mathcal{B} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$,

мања база: $\mathcal{B} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q},\ a < b\}$;

(5) За $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ база је $\mathcal{B} = \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$,

ово није база: $\{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q},\ a < b\}$ јер нпр.

$[\sqrt{2}, 3) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} [a_\lambda, b_\lambda)$, $a_\lambda, b_\lambda \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow (\exists \lambda_0 \in \Lambda)\ \sqrt{2} \in [\underset{\mathbb{Q}}{\underset{\cap}{a_{\lambda_0}}}, b_{\lambda_0}) \Rightarrow \sqrt{2} > a_{\lambda_0}$ ↯

Став Нека је $(X, \mathcal{T})$ тополошки простор и $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$. Ако је $\mathcal{B}$ база, онда важи:

(1) $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$;

(2) $(\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B})(\forall x \in B_1 \cap B_2)(\exists B \in \mathcal{B})\ x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$.

За сваку фамилију $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ за коју важи (1) и (2), постоји топологија $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ на X којој је $\mathcal{B}$ база:

$$\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \{ U \subseteq X \mid U \text{ је унија елемената из } \mathcal{B} \}$$

- Ако је $\mathcal{B}$ база топологије $\mathcal{T}$, онда је $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \mathcal{T}$.
- Ако је $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ и важи (1) и (2), онда је $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{T}$. (тј. $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ је најмања топологија којој је $\mathcal{B}$ база)

1. (а) Показати да је фамилија свих аритметичких прогресија база неке топологије на $\mathbb{Z}$:

$$\mathcal{B} = \{ A_{a,d} \mid a \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{N} \}, \text{ где је}$$

$$A_{a,d} = \{ a + nd \mid n \in \mathbb{Z} \}.$$

(б) Показати да је $A_{a,d}$ и отворен и затворен у тој топологији.

(в) Показати да постоји бесконачно много простих бројева.

▲ (а) Треба показати (1) и (2) из става одозго.

(1) $A_{1,1}=\mathbb{Z}$, па је $\bigcup_{a\in\mathbb{Z},\, d\in\mathbb{N}} A_{a,d}=\mathbb{Z}$.

(2) Нека је $x\in A_{a,d_1}\cap A_{b,d_2}$

$x\in A_{a,d_1} \Rightarrow (\exists n\in\mathbb{N})\ x=a+nd_1 \Rightarrow d_1 \mid x-a$,

$x\in A_{b,d_2} \Rightarrow (\exists m\in\mathbb{N})\ x=b+md_2 \Rightarrow d_2 \mid x-b$.

Тада је за $d:=\text{НЗС}(d_1,d_2)$

$$A_{x,d}=\{x+nd \mid n\in\mathbb{Z}\}\subseteq A_{a,d_1}\cap A_{b,d_2}.$$

Заиста $x+nd = a+\underbrace{x-a+nd}_{\text{дељиво са } d_1} = a+k\cdot d_1\in A_{a,d_1}$

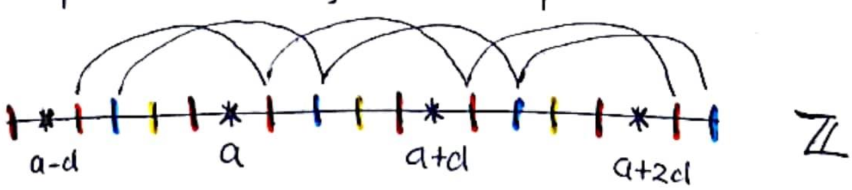
и слично $x+nd\in A_{b,d_2}$.

Дакле, ово јесте база топологије $\mathcal{T}_B$

(б) $A_{a,d}$ је отворен јер је у бази.

$A_{a,d}$ затворен $\Leftrightarrow$ $A_{a,d}^{c}$ отворен

$A_{a,d}^{c}$:



$$A_{a,d}^{c} = A_{a+1,d}\cup A_{a+2,d}\cup\dots\cup A_{a+d-1,d}\in\mathcal{T}_B$$

Дакле, $A_{a,d}$ је и затворен.

(в) Пгс. да има коначно много простих бројева $p_1, \dots, p_n$.

Нека је $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_{0,p_i} = \mathbb{Z} \setminus \{-1,1\}$

(Сви из $\mathbb{Z}\setminus\{-1,1\}$ су дељиви неким p_i па су у A_{0,p_i})

A је отворен $\Rightarrow$ $\mathbb{Z}\setminus\{-1,1\}$ је отворен, а и затворен као коначна унија затворених, па је $\{-1,1\} = A^c$ отворен, али он није унија елемената из базе $\mathcal{B}$ ↯

$\boxed{2.}$ Нека је $\mathcal{B} = \{[a,+\infty) \mid a \in \mathbb{Q}\}$.

(а) Доказати да је $\mathcal{B}$ база неке топологије на $\mathbb{R}$;

(б) Упоредити $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ и $\mathcal{D}$;

(в) Одредити $\text{int}\big((-\infty,0) \cup [\pi,+\infty)\big)$.

(а) Проверавамо (1) и (2) из става.

(1) $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B = \mathbb{R}$ ✓

(2) $[a,+\infty) \cap [b,+\infty) = [\max\{a,b\},+\infty) \in \mathcal{B}$ ✓

Дакле, $\mathcal{B}$ јесте база од $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.

б) $\mathcal{D} = \{(a,+\infty) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$

$\mathcal{D} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$?

$(a,+\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [r_n,+\infty)$, где је $r_n > a$, $r_n \in \mathbb{Q}$, $\lim_{n\to\infty} r_n = a$.

Дакле, $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.

$\mathcal{T}_\mathcal{B} \subseteq \mathcal{D}$?

Не важи јер $[a,+\infty) \in \mathcal{T}_\mathcal{B} \setminus \mathcal{D}$.

(в) $\operatorname{int}\big(\underbrace{(-\infty,0)\cup[\pi,+\infty)}_{A}\big)$ у $\mathcal{T}_\mathcal{B}$?

$(\pi,+\infty)\subset A$ и отворен јер $(\pi,+\infty)\in\mathcal{D}\subseteq\mathcal{T}_\mathcal{B}$, па

$(\pi,+\infty)\subseteq \operatorname{int} A$. Ово ће бити цео интериор!

Ако $x\in \operatorname{int}A$, онда $(\exists U\in\mathcal{T}_\mathcal{B})\ x\in U\subseteq A$

$\Updownarrow$ ← корисно!

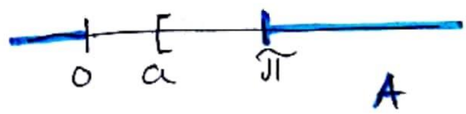
$(\exists B\in\mathcal{B})\ x\in B\subseteq A$

Тврдимо $\operatorname{int}A=(\pi,+\infty)$. Пп. $(\exists x\le\pi)\ x\in \operatorname{int}A$

$\Rightarrow (\exists B\in\mathcal{B})\ x\in B\subseteq A$. Али, $B=[a,+\infty)$, $a\in\mathbb{Q}$, па

$x\in[a,+\infty)\subseteq A$.

Како је $a\le\pi$ и $a\in\mathbb{Q} \Rightarrow a<\pi \Rightarrow [a,+\infty)\not\subseteq A$ ↯



Дакле, $\operatorname{int}A=(\pi,+\infty)$. ■

$\boxed{\text{Дефиниција}}$ Нека је $(X,\mathcal{T})$ тополошки простор и $A\subseteq X$. Кажемо да је A свуда густ у X ако је $\overline{A}=X$, а нигде густ у X ако је $\operatorname{int}(\overline{A})=\emptyset$.

$\boxed{3.}$ Описати све свуда и нигде густе скупове у $\mathcal{T}_a$ и $\mathcal{T}_d$, као и скупове тачака нагомилавања.

$\boxed{\mathcal{T}_a}$

$\mathcal{T}_a = \mathcal{F}_a = \{\emptyset, X\}$

(1) A је свуда густ $\iff \overline{A} = X$

$\overline{A}$ – најмањи затворен који садржи A, па је

$$\overline{A} = X \iff A \neq \emptyset.$$

(2) A је нигде густ $\iff \operatorname{int}(\overline{A}) = \emptyset$

$\overline{A} = \begin{cases} X, & A \neq \emptyset \\ \emptyset, & A = \emptyset \end{cases}$ и $\operatorname{int} X = X$, па је једино $A = \emptyset$ нигде густ.

(3) A' – тачке нагомилавања

$$x_0 \in A' \overset{def}{\iff} (\forall U \in \mathcal{T}_a)\, x_0 \in U \Rightarrow (U \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$$

1° $A = \emptyset \Rightarrow A' = \emptyset$

2° $|A| = 1$, тј. $A = \{a\} \Rightarrow A' = X \setminus \{a\}$

3° $|A| \geq 2 \Rightarrow A' = X$.

$\boxed{\mathcal{T}_d}$

$\mathcal{T}_d = \mathcal{F}_d = \mathcal{P}(X)$

(1) A свуда густ $\iff \overline{A} = X \iff A = X$ (јер $\overline{A} = A$)

(2) A нигде густ $\iff \operatorname{int}(\overline{A}) = \emptyset \iff \overline{A} = \emptyset \iff A = \emptyset$

(3) $A' = \emptyset$ јер $(\forall x \in X)\ \{x\} \in \mathcal{T}_d$ и $(\underbrace{\{x\}}_{U} \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset$. ■

$\boxed{4.}$ Описати све свуда и нигде густе скупове у $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cf})$.

▲

$$\mathcal{T}_{cf} = \{ U \subseteq \mathbb{R} \mid U^c \text{ коначан} \} \cup \{\emptyset\}$$

$$\mathcal{F}_{cf} = \{ F \subseteq \mathbb{R} \mid F \text{ коначан} \} \cup \{\mathbb{R}\}$$

• A је свуда густ $\iff \overline{A} = \mathbb{R}$

$$\overline{A} = \begin{cases} A, & A \text{ коначан} \\ \mathbb{R}, & A \text{ бесконачан} \end{cases} \Rightarrow \boxed{A \text{ је свуда густ} \iff A \text{ је бесконачан}}$$

• A је нигде густ $\iff \operatorname{int}(\overline{A}) = \emptyset$

$$\operatorname{int}(\overline{A}) = \begin{cases} \emptyset, & A \text{ коначан} \\ \mathbb{R}, & A \text{ бесконачан} \end{cases} \Rightarrow \boxed{A \text{ је нигде густ} \iff A \text{ је коначан}}$$

■

Нека је $(X, \mathcal{T})$ тополошки простор. $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ је предбаза топологије $\mathcal{T}$ ако је фамилија свих коначних пресека елемената из $\mathcal{S}$ база од $\mathcal{T}$

Дакле, $\mathcal{B} = \{ U_1 \cap \dots \cap U_n \mid U_i \in \mathcal{S}, n \in \mathbb{N} \}$ – база

$$\mathcal{T} = \{ \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \mid U_\lambda \in \mathcal{B} \} =$$

$$= \left\{ \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \left(\bigcap_{i=1}^{n_\lambda} U_{\lambda, i} \right) \mid U_{\lambda, i} \in \mathcal{S}, n_\lambda \in \mathbb{N} \right\}$$

Пример Неке предбазе на $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$:

$$\mathcal{S}_1 = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\} \leftarrow \text{(ово је и база)}$$

$$\mathcal{S}_2 = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$$

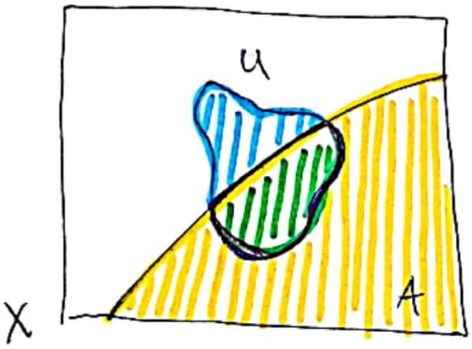
$$\mathcal{S}_3 = \{(-\infty, b) \mid b \in \mathbb{R}\} \cup \{(a,+\infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{S}_4 = \{(-\infty, b) \mid b \in \mathbb{Q}\} \cup \{(a,+\infty) \mid a \in \mathbb{Q}\}$$

Наслеђена топологија

Нека је $(X, \mathcal{T})$ тополошки простор и $A \subseteq X$.

Наслеђена топологија на A је $\mathcal{T}_A \overset{def}{=} \{U \cap A \mid U \in \mathcal{T}\}$



Ако је $i_A : A \hookrightarrow X$ инклузија, $\mathcal{T}_A$ је најмања топологија т.д. је i_A непрекидно.

(Могло би се дефинисати и као
$$\mathcal{T}_A = \{i_A^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{T}\}\ )$$

Како изгледају затворени скупови у A?

$$F \in \mathcal{F}_A \Leftrightarrow (F)^c_A \in \mathcal{T}_A \Leftrightarrow (\exists U \in \mathcal{T})(F)^c_A = U \cap A \Leftrightarrow (\exists U \in \mathcal{T})\, F = U^c \cap A \Leftrightarrow (\exists G \in \mathcal{F})\, F = A \cap G$$

Дакле, $\mathcal{F}_A = \{F \cap A \mid F \in \mathcal{F}_X\}$.

Приметимо да не мора да важи $\mathcal{T}_A \subseteq \mathcal{T}_X$, тј.

$U \in \mathcal{T}_A \not\Rightarrow U \in \mathcal{T}_X$.

$\boxed{\text{Пример}}$ $[0,+\infty) \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$ и имамо да је $[0,1)$ отворен у $[0,+\infty)$, а није у $\mathbb{R}$ нити у $\mathbb{R}^2$.

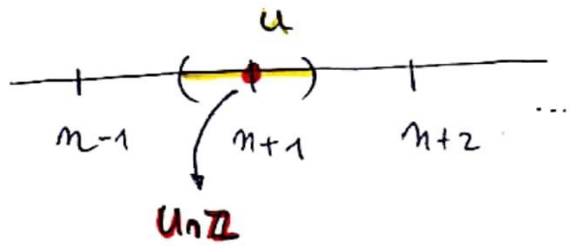
Обрнуто увек важи. Ако је $U \subseteq A \subseteq X$ и $U \in \mathcal{T}_X$, онда $U \in \mathcal{T}_A$.

Специјално, ако је $\underline{A \in \mathcal{T}_X}$, онда $\mathcal{T}_A \subseteq \mathcal{T}_X$.

Слично, ако је $A \in \mathcal{F}_X$, онда $\mathcal{F}_A \subseteq \mathcal{F}_X$.

$\boxed{1.}$ Нека је $(\mathbb{Z}, \mathcal{U}_{\mathbb{Z}})$ тополошки простор са топологијом наслеђеном од $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$. Одредити $\partial\{n^3 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ и $\operatorname{int}\{17, 12\}$.

▲



$\mathcal{U}_{\mathbb{Z}} = \mathcal{T}_d$ јер су сви једночлани скупови отворени.

Дакле, сваки скуп је и отворен и затворен, па је

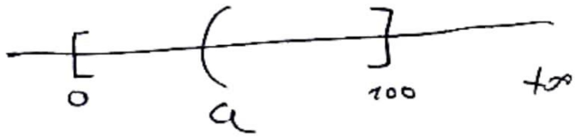
$\operatorname{int}\{17, 12\} = \{17, 12\}$

Даље, $\underset{A}{\underset{\|}{\overline{A}}} = \underset{A}{\underset{\|}{\operatorname{int} A}} \sqcup \partial A$ па је $\partial A = \emptyset$ за сваки $A \subseteq \mathbb{Z}$,

па је и $\partial\{n^3 \mid n \in \mathbb{Z}\} = \emptyset$. ■

2. Нека је $\left([0,100], \mathcal{D}_{[0,100]}\right)$ тополошки простор са топологијом наслеђеном од $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$.
Одредити $\overline{\{10\}}$, $\operatorname{int}[1,2]$, $\operatorname{int}[99,100]$, $\partial[1,2]$.

▲ $\mathcal{D} = \{(a,+\infty) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$



$\mathcal{D}_{[0,100]} = \{(a,100] \mid 0 \le a \le 100\} \cup \{[0,100]\}$

$\mathcal{F}_{[0,100]} = \{[0,a] \mid 0 \le a \le 100\} \cup \{\emptyset\}$

$\overline{\{10\}} = [0,10]$ (најмањи затворен који садржи $\{10\}$)

$\operatorname{int}[1,2] = \emptyset$ (највећи отворен у $[1,2]$)

$\operatorname{int}[99,100] = (99,100]$

$\partial[1,2] = \overline{[1,2]} \setminus \operatorname{int}[1,2] = [0,2] \setminus \emptyset = [0,2]$. ▨

Непрекидност

Нека су $(X, \mathcal{T}_X)$ и $(Y, \mathcal{T}_Y)$ два тополошка простора.

Дефиниција Пресликавање $f: X \to Y$ је непрекидно ако
$$(\forall U \in \mathcal{T}_Y)\ f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X.$$

Дефиниција $f: X \to Y$ је непрекидно у $x_0 \in X$ ако
$$(\forall U \in \mathcal{O}(f(x_0)))\ f^{-1}(U) \in \mathcal{O}(x_0).$$

Став f је непрекидно на X ако и само ако је непрекидно у свакој тачки.

Примери **(1)** $f:(X,\mathcal{T}_d)\to(Y,\mathcal{T})$ је увек непрекидно;

(2) $f:(X,\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{T}_a)$ је увек непрекидно;

(3) $f:(X,\mathcal{T}_X)\to(Y,\mathcal{T}_Y)$ и $f=\mathrm{const} \Rightarrow f$ је непрекидно;

(4) $f:(X,\mathcal{T}_1)\to(X,\mathcal{T}_2)$ и $f=\mathbb{1}_X$ $\quad(\mathbb{1}_X(x)=x)$

f је непрекидно $\Leftrightarrow \mathcal{T}_2\subseteq\mathcal{T}_1$.

Теорема Нека је $f:(X,\mathcal{T}_X)\to(Y,\mathcal{T}_Y)$. Следећа тврђења су еквивалентна:

(а) f је непрекидно;

(б) $(\forall F\in\mathcal{F}_Y)\ f^{-1}(F)\in\mathcal{F}_X$;

(в) $(\forall B\in\mathcal{B}_Y)\ f^{-1}(B)\in\mathcal{T}_X$, где је $\mathcal{B}_Y$ база од $\mathcal{T}_Y$;

(г) $(\forall U\in\mathcal{S}_Y)\ f^{-1}(U)\in\mathcal{T}_X$, где је $\mathcal{S}_Y$ предбаза од $\mathcal{T}_Y$;

(д) $(\forall A\subseteq X)\ f(\overline{A})\subseteq\overline{f(A)}$;

(ђ) $(\forall B\subseteq Y)\ \overline{f^{-1}(B)}\subseteq f^{-1}(\overline{B})$.

Δ Доказујемо само (б) $\Leftrightarrow$ (д) $\Leftrightarrow$ (ђ).

(б) $\Rightarrow$ (д): Како је $A\subseteq f^{-1}(f(A))\subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})\overset{(б)}{\in}\mathcal{F}_X$, то је $\overline{A}\subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$. Када применимо f добијамо

$$f(\overline{A})\subseteq f\left(f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)\right)\subseteq\overline{f(A)}$$

$(g) \Rightarrow (\text{ђ})$: Нека је $B \subseteq Y$ и $A := f^{-1}(B)$ и применимо

(g) на A:

$$f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right) \subseteq \overline{\underbrace{f(f^{-1}(B))}_{\subseteq B}} \subseteq \overline{B}$$

$$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}\left(f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right)\right) \subseteq f^{-1}(\overline{B})$$

$(\text{ђ}) \Rightarrow (б)$: Нека је $F \in \mathcal{F}_Y$ (хоћемо $f^{-1}(F) \in \mathcal{F}_X$).

$$f^{-1}(F) \subseteq \overline{f^{-1}(F)} \overset{(\text{ђ})}{\subseteq} f^{-1}(\underset{F}{\overset{\|}{\overline{F}}}) = f^{-1}(F)$$

$\Rightarrow f^{-1}(F) = \overline{f^{-1}(F)} \Rightarrow f^{-1}(F) \in \mathcal{F}_X$. ▨

$\boxed{1.}$ Нека је $p : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cf}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cf})$ полином. Доказати да је p непрекидно.

▲ $p(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$.

Ако је $p = \text{const}$, онда је очигледно непрекидно.

Нека је $F \in \mathcal{F}_{cf}$, тј. F је коначан или $\mathbb{R}$.

$\boxed{1^\circ}$ $F = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ коначан

$p^{-1}(\{y_i\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid p(x) = y_i\}$ = број нула полинома $p(x) - y_i$, тј. ово је коначан скуп

$\Rightarrow p^{-1}(F) = \bigcup_{i=1}^{k} p^{-1}(\{y_i\}) \in \mathcal{F}_{cf}$ (јер је коначан).

$\boxed{2^\circ}$ $F = \mathbb{R}$

$p^{-1}(F) = \mathbb{R} \in \mathcal{T}_{cf}$.

Дакле, p је непрекидно. ■

Неке особине непрекидних пресликавања:

1. $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_Y) \xrightarrow{g} (Z, \mathcal{T}_Z)$

   f, g непрекидна $\Rightarrow$ $g \circ f$ је непрекидно

2. $i_A : (A, \mathcal{T}_A) \hookrightarrow (X, \mathcal{T}_X)$, $A \subseteq X$

   i_A је непрекидно.

3. $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$, $A \subseteq X$, $\mathcal{T}_A$ - наслеђена топ.

   Нека је $f|_A : A \to Y$ рестрикција, тј. $f|_A(x) = f(x)$, $x \in A$.

   Ако је f непрекидно, онда је и $f|_A$ непрекидно.

   Ово следи из ① и ②:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook, "i_A"] \arrow[rr, bend right, dashed, "f|_A"'] & X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}
\qquad
f|_A = f \circ i_A
$$

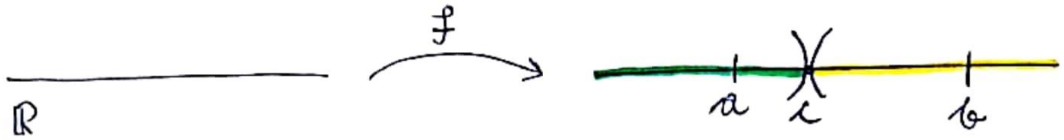
непрекидна

$\boxed{2.}$ Нека је $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cf}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{U})$. f је непрекидно ако и само ако је $f = \mathrm{const}$.

▲ Пп. $f \neq \mathrm{const}$. (Смер „$\Leftarrow$" тривијално важи)

Тада $(\exists a,b\in\mathbb{R})\ a\neq b \wedge a,b\in f(\mathbb{R})$. БУО $a<b$.

Нека је $c\in\mathbb{R}$ т.д. $a<c<b$



Нека је $A := f^{-1}((c,+\infty)) \in \mathcal{T}_{cf}\setminus\{\emptyset\} \Rightarrow A^c$ је коначан

отворен у ℝ — јер $b\in A$

$B := f^{-1}((-\infty,c)) \in \mathcal{T}_{cf}\setminus\{\emptyset\} \Rightarrow B^c$ је коначан

Тада је $A^c\cup B^c$ коначан, али $A^c\cup B^c=(A\cap B)^c=\emptyset^c=\mathbb{R}$ ↯ ■

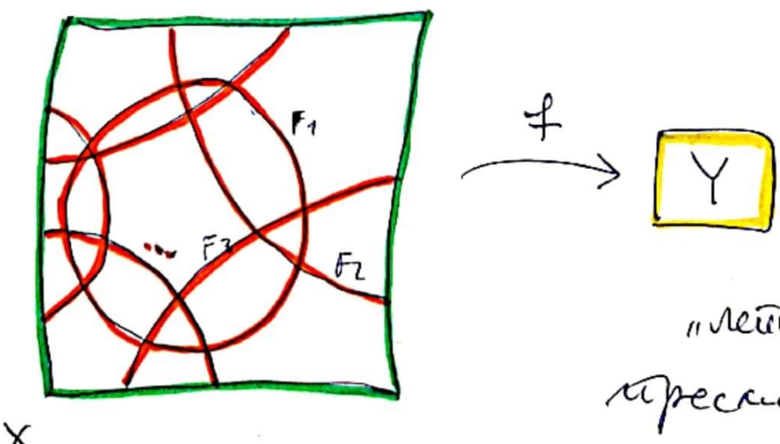
Лема (о лепљењу) Нека је $f:(X,\mathcal{T}_X)\to(Y,\mathcal{T}_Y)$

(1) $U_\lambda\in\mathcal{T}_X,\ \lambda\in\Lambda$ и $X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$. Тада

f је непрекидно $\Leftrightarrow (\forall\lambda\in\Lambda)\ f|_{U_\lambda}$ је непрекидно.

(2) $F_1,\dots,F_n\in\mathcal{F}_X$ и $X=\bigcup_{i=1}^{n}F_i$. Тада

f је непрекидно $\Leftrightarrow (\forall 1\le i\le n)\ f|_{F_i}$ је непрекидно.



„лепимо" непрекидна пресликавања $f|_{F_i}$

Отворена и затворена пресликавања

Дефиниција Нека је $f:(X,\mathcal{T}_X)\to(Y,\mathcal{T}_Y)$.

(1) f је отворено ако $(\forall U\in\mathcal{T}_X)\ f(U)\in\mathcal{T}_Y$;

(2) f је затворено ако $(\forall F\in\mathcal{F}_X)\ f(F)\in\mathcal{F}_Y$.

- (1) $\iff (\forall U\in\mathcal{B}_X)\ f(U)\in\mathcal{T}_Y$

- Ако је $i_A : A\hookrightarrow X$ инклузија

  i_A је отворено $\iff A\in\mathcal{T}_X$

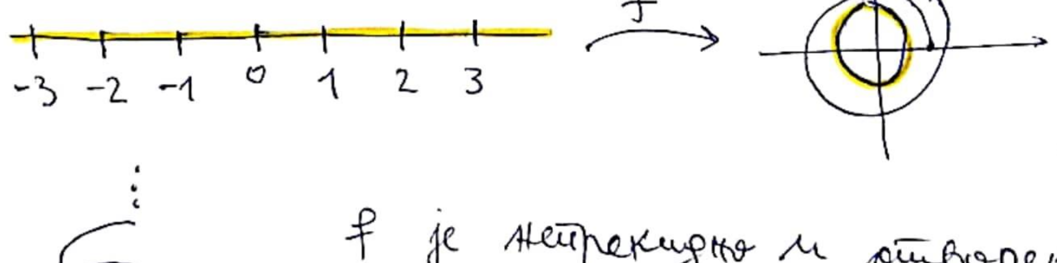
  i_A је затворено $\iff A\in\mathcal{F}_X$

- $f:(X,\mathcal{T}_X)\to(Y,\mathcal{T}_Y)$, $A\subseteq X$

  $A\in\mathcal{T}_X$ и f отворено $\Rightarrow f|_A$ отворено (јер је тад $\mathcal{T}_A\subseteq\mathcal{T}_X$)

  $A\in\mathcal{F}_X$ и f затворено $\Rightarrow f|_A$ затворено (јер је тад $\mathcal{F}_A\subseteq\mathcal{F}_X$)

Примери (1) $f:\mathbb{R}\to S^1$, $f(x)=(\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$

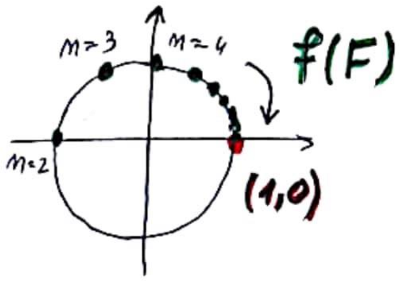


„намотавање" праве на кружницу

f је непрекидно и отворено, али није затворено.

Нека је $F = \{ n + \frac{1}{n} \mid n \geq 2 \}$

$f(F) = \{ (\cos\frac{2\pi}{n}, \sin\frac{2\pi}{n}) \mid n \geq 2 \}$



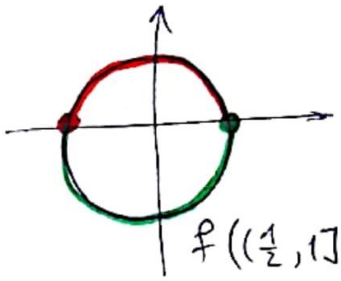
$(1,0) \in \overline{f(F)} \setminus f(F) \Rightarrow f(F)$ није затворен

(2) $g : [0,1] \to S^1$, $g = f|_{[0,1]}$ (f из примера (1))

g је затворено, а није отворено

$f((\frac{1}{2}, 1]))$ – није отворен у S^1

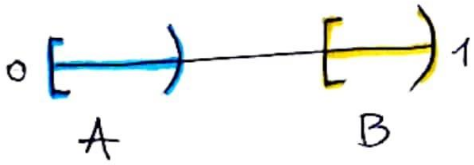
$\uparrow$ отворен у $[0,1]$



$f((\frac{1}{2},1])$

(3) $h : [0,1) \to S^1$, $h = f|_{[0,1)}$ (f из примера (1))

h није ни отворено ни затворено.



$A \in \mathcal{T}_{[0,1)}$, $f(A) \notin \mathcal{T}_{S^1}$

$B \in \mathcal{F}_{[0,1)}$, $f(B) \notin \mathcal{F}_{S^1}$

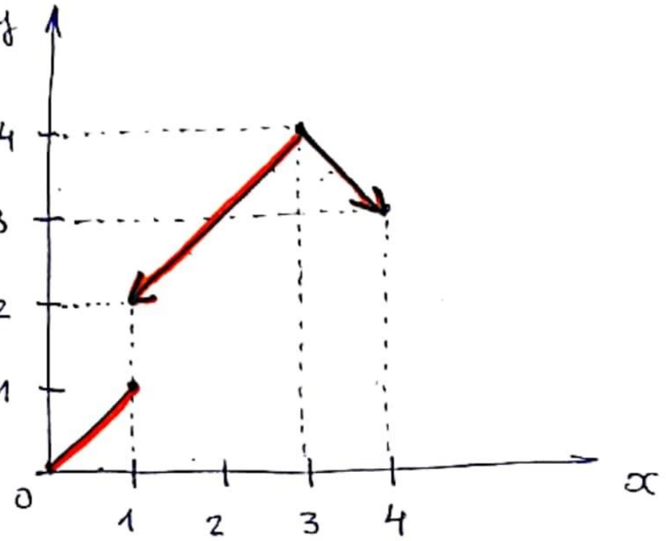
$\boxed{1.}$ Нека је $f : [0,4) \to [0,+\infty)$ пресликавање дато са

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1+x, & 1 < x \leq 3 \\ 7-x, & 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Испитати непрекидност и отвореност у случајевима:

(а) $\mathcal{U}_{[0,4)} \to \mathcal{U}_{[0,+\infty)}$;

(б) $\mathcal{U}_{[0,4)} \to \mathcal{D}_{[0,+\infty)}$



(а) f није непрекидно јер $f^{-1}\big(\underbrace{[0,\tfrac{3}{2})}_{\in\,\mathcal{U}_{[0,4)}}\big) = [0,1] \notin \mathcal{U}_{[0,+\infty)}$

f није отворено јер $f\big(\underbrace{(\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2})}_{\in\,\mathcal{U}_{[0,4)}}\big) = (\tfrac{1}{2},1] \cup (2,\tfrac{5}{2}) \notin \mathcal{U}_{[0,+\infty)}$

(б) f није отворено јер $f\big((\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2})\big) = (\tfrac{1}{2},1] \cup (2,\tfrac{5}{2}) \notin \mathcal{D}_{[0,+\infty)}$

f јесте непрекидно:

$$f^{-1}\big(\underbrace{(a,+\infty)}_{\in\,\mathcal{D}_{[0,+\infty)}}\big) = \begin{cases} \emptyset, & a \geq 4 \\ (a-1, 7-a), & 3 \leq a < 4 \\ (a-1, 4), & 2 < a \leq 3 \\ (1,4), & 1 < a \leq 2 \\ (a,4), & 0 \leq a < 1 \end{cases} \in \mathcal{U}_{[0,4)}$$

и наравно $f^{-1}([0,+\infty)) = [0,4)$, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

$\Rightarrow$ f је заиста непрекидно. ■

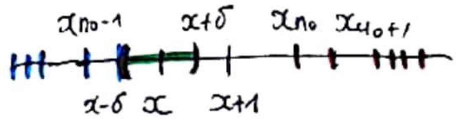
Лема Нека је $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ у $\mathbb{R}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$.

Тада је $F=\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}\in \mathcal{F}_{\mathcal{U}}$.

▲ Показујемо $F^c\in\mathcal{U}$. Нека је $x\in F^c$ фиксирано.

БУО $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

$(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N})\ n>n_0 \Rightarrow x_n > x+1$.



Нека је $\delta = \min\left\{|x-x_1|, |x-x_2|, \dots, |x-x_{n_0}|, 1\right\}$

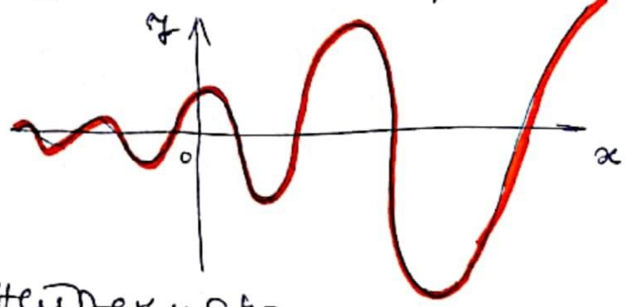
Тада је $(x-\delta, x+\delta)\in F^c$, па је $F^c\in\mathcal{U}$, тј. $F\in\mathcal{F}_{\mathcal{U}}$. ■

2. Нека је $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ дато са $f(x)=e^x\cos x$.

Испитати непрекидност и затвореност:

(а) $\mathcal{U}\to\mathcal{U}$;

(б) $\mathcal{T}_{cf}\to\mathcal{T}_{cf}$.



▲ (а) f је очигледно непрекидно.

Нека је $x_n=-2n\pi$, $n\in\mathbb{N}$. Тада је $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, па је

$F=\{x_n\mid n\in\mathbb{N}\}\in\mathcal{F}_{\mathcal{U}}$.

$$f(F)=\{e^{-2n\pi}\mid n\in\mathbb{N}\}\not\ni 0, \text{ али } e^{-2n\pi}\to 0, \text{ па } f(F)\notin\mathcal{F}_{\mathcal{U}}.$$

Дакле, f није затворено.

(б) Нека је $F\in\mathcal{F}_{cf}$, тј. F је коначан или цео $\mathbb{R}$, па је $f(F)$ коначан или $\mathbb{R}$, тј. $f(F)\in\mathcal{F}_{cf} \Rightarrow f$ је затворено

$$f^{-1}(\underset{\substack{\cap\\ \mathcal{F}_{cf}}}{\{0\}}) = \left\{k\pi+\tfrac{\pi}{2} \mid k\in\mathbb{Z}\right\}\notin\mathcal{F}_{cf} \Rightarrow f \text{ није непрекидно.}$$ ■

Хомеоморфизми

Дефиниција Нека су $(X, \mathcal{T}_X)$ и $(Y, \mathcal{T}_Y)$ тополошки простори. Пресликавање $f: X \to Y$ је хомеоморфизам ако важи:

(1) f је бијекција;

(2) f је непрекидно;

(3) f^{-1} је непрекидно.

Ако постоји хомеоморфизам између X и Y пишемо $X \approx Y$.

Приметимо да је $\approx$ релација еквиваленције на класи тополошких простора.

Став Нека је $f: X \to Y$. Следећа тврђења су еквивалентна:

(1) f је хомеоморфизам;

(2) f је бијекција, непрекидно и отворено;

(3) f је бијекција, непрекидно и затворено;

(4) f је бијекција и $(\forall A \subseteq X)\ f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

▲ (1)⇒(2): f је непрекидна бијекција по дефиницији.
Још да проверимо отвореност:
нека је $U \in \mathcal{T}_X$.

$$f(U) = \underbrace{(f^{-1})}_{\substack{\text{непрекидно} \\ Y \to X}}{}^{-1}(U) \in \mathcal{T}_Y,$$ па је f отворено.

(2) ⇒ (3): f је непрекидна бијекција, па још да проверимо затвореност:

$$F \in \mathcal{F}_X \Rightarrow F^c \in \mathcal{T}_X \overset{(2)}{\Longrightarrow} f(F^c) \in \mathcal{T}_Y$$

, али $f(F^c) = f(F)^c$, јер је f бијекција, па је $f(F)^c \in \mathcal{T}_Y$, тј. $f(F) \in \mathcal{F}_Y$.

Дакле, f је затворено.

(3) ⇒ (4): f је бијекција по претпоставци.

Нека је $A \subseteq X$. Показујемо $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$.

$$\left.\begin{array}{l} \underbrace{\underset{\text{затворено}}{f}(\overset{\text{затворен}}{\bar{A}})}_{\text{затворен у } Y} = \overline{f(\bar{A})} \supseteq \overline{f(A)} \\ \\ \underbrace{f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}}_{\substack{\text{јер је } f \text{ непрекидно} \\ \text{(теорема на стр. 34)}}} \end{array}\right\} \Rightarrow f(\bar{A}) = \overline{f(A)}.$$

(4) ⇒ (1): Теорема са стр. 34 нам је дала тврђења еквивалентна непрекидности:

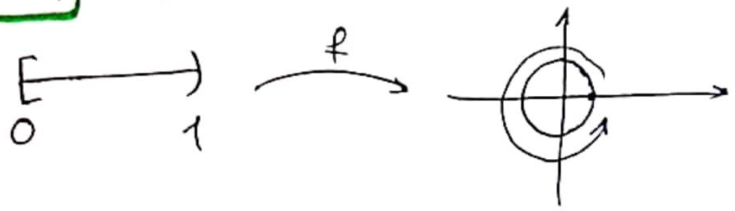
① $(\forall A \subseteq X)\ f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ и ② $(\forall B \subseteq Y)\ \overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\bar{B})$.

Из (4) добијамо да је f бијекција и непрекидно (због ①). Применимо ② на f^{-1} да добијемо непрекидност од f^{-1}.

f^{-1} је непрекидно $\overset{②}{\iff} (\forall A \subseteq X)\ \overline{(f^{-1})^{-1}(A)} \subseteq (f^{-1})^{-1}(\bar{A}) \iff$

$\iff (\forall A \subseteq X)\ \overline{f(A)} \subseteq f(\bar{A})$ што следи из (4). Дакле, f је хомеоморфизам. ∎

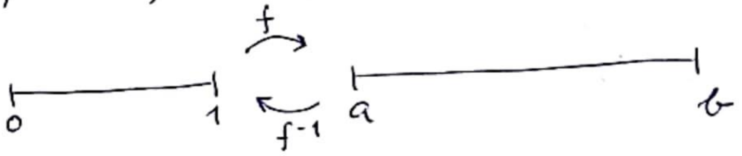
Пример $f: [0,1) \to S^1$ намотавање



Ово је непрекидна бијекција која није хомеоморфизам (јер f^{-1} није непрекидно).

1. Доказати да су сви коначни
(а) затворени;
(б) отворени;
(в) полуотворени;
интервали међусобно хомеоморфни.

▲ (а) Довољно је показати да је $[0,1] \approx [a,b]$, за $a, b \in \mathbb{R}$, $a<b$.



$f : [0,1] \to [a,b]$

$$\left.\begin{aligned} f(t) &= \alpha t + \beta \\ f(0) &= a \\ f(1) &= b \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} a &= \beta \\ \alpha + \beta &= b \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{f(t) = (b-a)t + a}$$

$f^{-1} : [a,b] \to [0,1]$

$$\boxed{f^{-1}(s) = \frac{s-a}{b-a}}$$

f и f^{-1} су један другом инверз и непрекидни су, па је f хомеоморфизам.

(б) слично.

(в) $[0,1) \approx [a,b)$ \ слично
$(0,1] \approx (a,b]$ /

$[0,1) \approx (0,1]$ дато са $f(t) = 1-t$. ■

$\boxed{2.}$ (а) $(0,1) \approx \mathbb{R} \approx (0,+\infty) \approx (-\infty,0)$;

(б) $[0,1) \approx [0,+\infty)$.

▲
(а) $(0,1) \approx \mathbb{R}$

$(0,1) \approx \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ на основу претходног задатка.

Нека је $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ дато са $f(t) = \operatorname{tg} t$.

Тада је f хомеоморфизам $\left(f^{-1}(s) = \operatorname{arctg} s\right)$.

Дакле,

$$(0,1) \approx \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \overset{f}{\approx} \mathbb{R}.$$

$\mathbb{R} \approx (0,+\infty)$

$f: \mathbb{R} \to (0,+\infty)$, $f(t) = e^t$, $f^{-1}(s) = \ln s$

$(0,+\infty) \approx (-\infty,0)$

$f: (0,+\infty) \to (-\infty,0)$, $f(t) = -t$, $f^{-1}(s) = -s$

(б) $[0,1) \overset{\text{зад. 1.}}{\approx} \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \overset{f}{\approx} [0,+\infty)$, где је $f(t) = \operatorname{tg} t$

II начин: $f(t) = \frac{t}{1-t}$, $f^{-1}(s) = \frac{s}{1+s}$. ■

$\boxed{3.}$ $\mathring{D}^2 \approx \mathbb{R}^2, \ \mathring{D}^n \approx \mathbb{R}^n.$

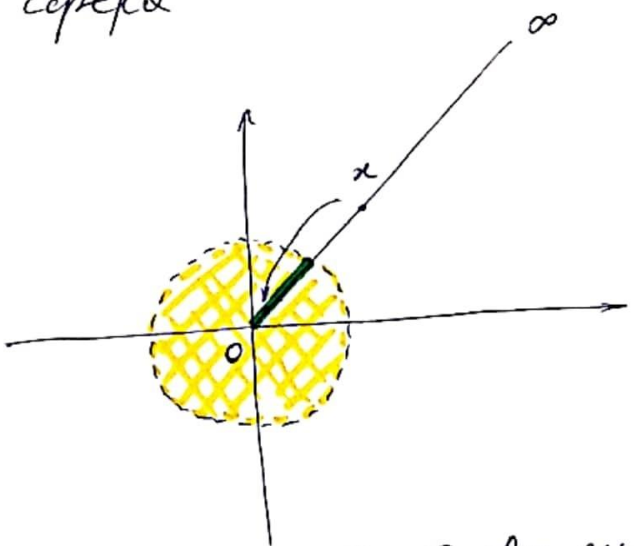
▲ $D^n = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1 \}$ – затворен диск

$\mathring{D}^n = \operatorname{int} D^n = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1 \}$ – отворен диск

$S^n = \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1 \}$ – сфера

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathring{D}^2$

$$f(x) = \underbrace{\frac{\|x\|}{1+\|x\|}}_{\text{интензитет}} \cdot \underbrace{\frac{x}{\|x\|}}_{\text{правац}}$$



$$f^{-1}(y) = \frac{\|y\|}{1-\|y\|} \cdot \frac{y}{\|y\|}$$

на сваку полуправу из O применимо пресликавање $[0,+\infty) \to [0,1)$ из претходног задатка.

f и f^{-1} су непрекидна.

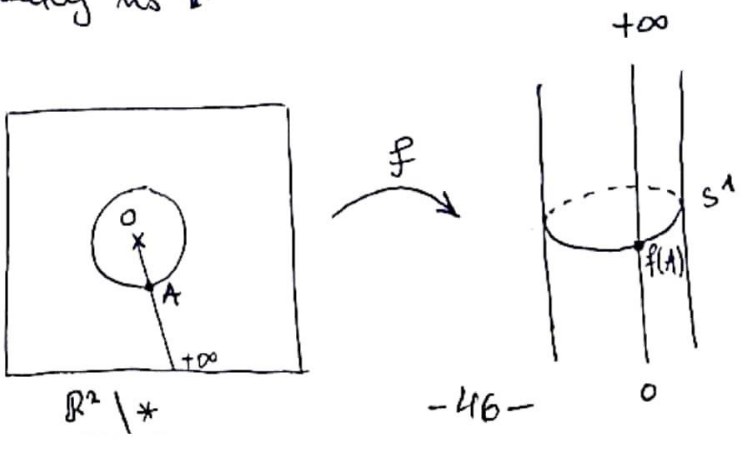
$\Rightarrow f$ је хомеоморфизам.

Слично се ради и $\mathring{D}^n \approx \mathbb{R}^n$. ■

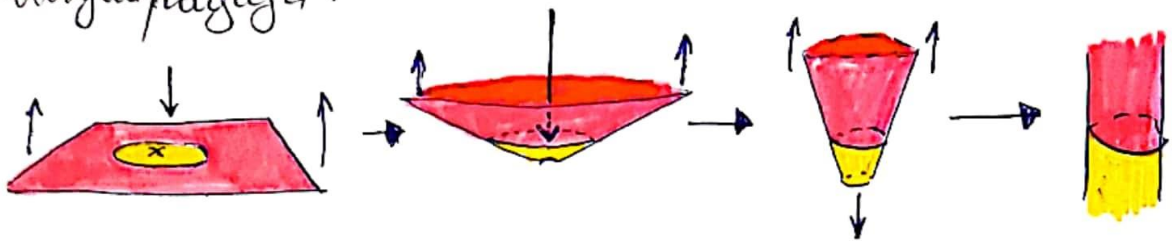
$\boxed{4.}$ $\mathbb{R}^2 \setminus * \approx S^1 \times \mathbb{R}.$

$*$ – ознака за произвољну тачку из $\mathbb{R}^2$

▲



Илустрација:



Експлицитно: БУО $* = 0 \in \mathbb{R}^2$

$$f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow S^1 \times \mathbb{R}$$

$$f(x) = \left(\frac{x}{\|x\|}, \ln\|x\|\right).$$ ▨

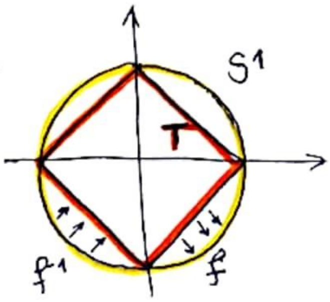
Из претходних пар задатака имамо:

$$\mathbb{R}^2\setminus * \approx S^1\times\mathbb{R} \approx S^1\times(a,b) \approx S^1\times(0,+\infty) \approx$$

$$\approx \{x\in\mathbb{R}^2 \mid a<\|x\|<b\} \approx \{x\in\mathbb{R}^2 \mid \|x\|>1\}$$ и слично.

$\boxed{5.}$ $S^1 \approx T = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|+|y|=1\}.$

▲



$f : T \to S^1$

$$f(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$f^{-1}(x,y) = \left(\frac{x}{|x|+|y|}, \frac{y}{|x|+|y|}\right)$$

Лако се провери да је f хомеоморфизам. ▨

$\boxed{\text{Лема}}$ Ако је $f : X \to Y$ непрекидно, онда је

$$\Gamma_f \overset{\text{def}}{=} \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \approx X.$$

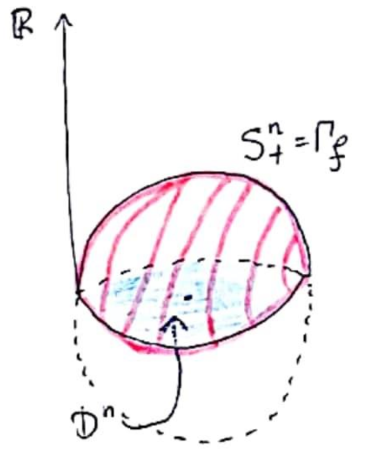
график функције f

▲ $h : X \to \Gamma_f$

$h(x) = (x, f(x))$, $h^{-1}(x, y) = x$. ■

$\boxed{6.}$ $D^n \approx S^n_+$, где је $S^n_+ = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} \geq 0\}$ горња полусфера.

▲ Нека је $f : D^n \to \mathbb{R}$ дато са $f(x) = \sqrt{1 - \|x\|^2}$.



На основу леме је $D^n \approx \Gamma_f$.

$$\Gamma_f = \{(\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{\overset{\shortparallel}{x}}, f(x)) \mid x \in D^n\} =$$

$$= \left\{\left(x_1, \dots, x_n, \sqrt{1 - (x_1^2 + \dots + x_n^2)}\right) \mid x \in D^n\right\} =$$

$$= S^n_+$$

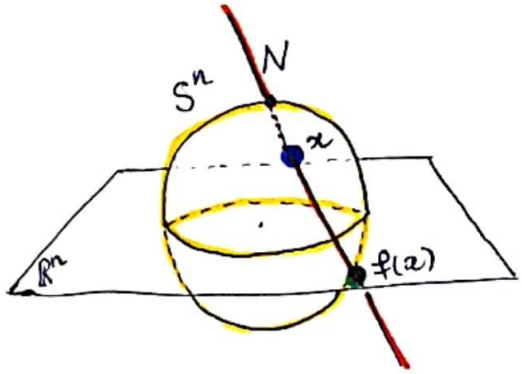
Дакле, $D^n \approx S^n_+$. ■

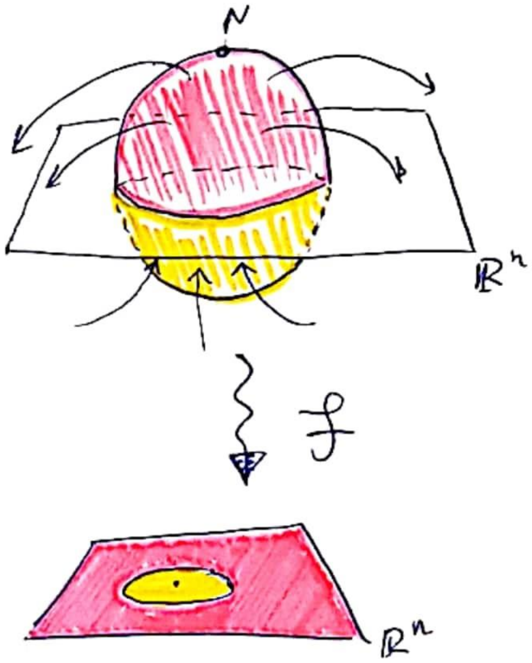
$\boxed{7.}$ $S^n \setminus * \approx \mathbb{R}^n$.

▲ БУО $* = N$ (северни пол)

Уочимо $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n, 0) \mid x_i \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

Дефинишемо $f: S^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$ као стереографску пројекцију ($f(x)$ буде пресек праве кроз N и x и $\mathbb{R}^n$).





$$f(x) = N + t(x-N) =$$

$$= (0,\dots,0,1) + t(x_1,\dots,x_n, x_{n+1}-1) =$$

$$= \big(tx_1,\dots,tx_n,\ t(x_{n+1}-1)+1\big) \in \mathbb{R}^n$$

$\Rightarrow \quad t(x_{n+1}-1)+1 = 0 \Rightarrow t = \dfrac{1}{1-x_{n+1}}$ – добро дефинисано јер $x_{n+1} \neq 1$ за $x \in S^n \setminus \{N\}$.

Дакле, $f(x_1,\dots,x_{n+1}) = \left(\dfrac{x_1}{1-x_{n+1}}, \dots, \dfrac{x_n}{1-x_{n+1}}, 0\right)$.

Сада одређујемо $f^{-1}: \mathbb{R}^n \to S^n \setminus \{N\}$. Нека је $y=(y_1,\dots,y_n,0) \in \mathbb{R}^n$

$$f^{-1}(y) = N + t(y-N) = (ty_1,\dots,ty_n,1-t) \in S^n$$

$\Rightarrow \|f^{-1}(y)\| = 1$, тј.

$$t^2(y_1^2+\dots+y_n^2) + (1-t)^2 = 1$$

$$t^2(y_1^2+\dots+y_n^2) - 2t + t^2 = 0 \quad / :t$$

$$t(y_1^2+\dots+y_n^2+1)=2$$

$$t=\frac{2}{y_1^2+\dots+y_n^2+1}=\frac{2}{\|y\|^2+1}.$$

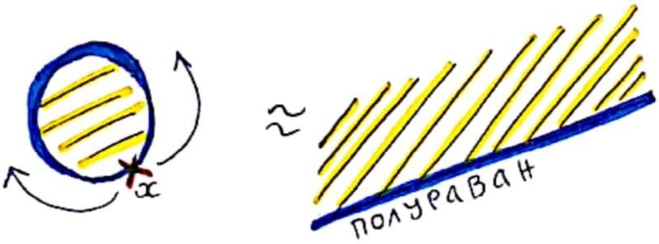
Дакле, $f^{-1}(y_1,\dots,y_n,0)=\left(\frac{2y_1}{\|y\|^2+1},\dots,\frac{2y_n}{\|y\|^2+1},\frac{\|y\|^2-1}{\|y\|^2+1}\right)$.

f и f^{-1} су непрекидни и једно другом су инверз.

$\Rightarrow$ f је хомеоморфизам $\Rightarrow$ $S^n\setminus\{N\}\approx\mathbb{R}^n$. ■

Пример (1) $S^n_-=\{(x_1,\dots,x_{n+1})\in S^n \mid x_{n+1}\le 0\}\approx S^n_+\approx D^n$;

(2) $D^2\setminus\{x\}\approx\mathbb{R}^2_+$ за $x\in\partial D^2$



Повезаност

Дефиниција За тополошки простор X кажемо да је повезан ако не постоји дисконексија тог простора

$\Leftrightarrow$ не постоје отворени (затворени) $U,V\neq\emptyset$ т.д. $U\sqcup V=X$;

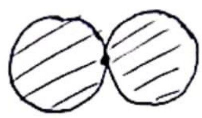
$\Leftrightarrow$ $\mathcal{T}_X\cap\mathcal{F}_X=\{\emptyset,X\}$ - једини отворено-затворени скупови су $\emptyset$ и X;

$\Leftrightarrow$ ако је $f:X\to\{0,1\}$ непрекидно, онда је $f=\text{const}$.

Теорема Ако је $f: X \to Y$ непрекидно и X повезан, онда је $f(X)$ повезан.

Теорема Нека је X тополошки простор и $A \subseteq X$ повезан. Ако је $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, онда је и B повезан. (Специјално је и $\overline{A}$ повезан.)

Пример Ако је A повезан, $\operatorname{int} A$ и ∂A не морају бити.

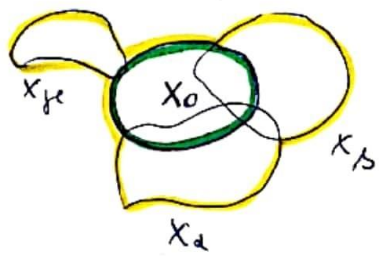
A:  повезан; $B = (a, b)$ повезан;

$\operatorname{int} A$:  неповезан; $\partial B = \{a, b\}$ неповезан.

Теорема Нека су $X_0, X_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}$ повезани и нека је

$$(\forall \alpha \in \mathcal{A})\ X_0 \cap X_\alpha \neq \emptyset.$$

Тада је и $X_0 \cup \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$ повезан.



1. Нека је X повезан и A прави подскуп од X. Доказати

(а) $\partial A \neq \emptyset$;

(б) ∂A повезан $\Rightarrow \overline{A}$ повезан.

▲ (а) $X = \operatorname{int} A \sqcup \partial A \sqcup \operatorname{ext} A$

ппс. $\partial A = \emptyset$. Тада је $X = \operatorname{int} A \sqcup \operatorname{ext} A$.

$\operatorname{int} A$ и $\operatorname{ext} A$ отворени и X повезан $\Rightarrow$ бар један од њих је празан.

1° $\operatorname{int} A = \emptyset \Rightarrow \operatorname{ext} A = X \Leftrightarrow \operatorname{int}(A^c) = X \Rightarrow A^c = X \Rightarrow A = \emptyset$ ↯

2° $\operatorname{ext} A = \emptyset \Rightarrow \operatorname{int} A = X \Rightarrow A = X$ ↯

Дакле, $\partial A \neq \emptyset$.

(б) Показујемо да ако је $f : \overline{A} \to \{0,1\}$ непрекидно, онда је $f = \text{const}$.

Нека је $f : \overline{A} \to \{0,1\}$ непрекидно. Како је ∂A повезан, то је $f|_{\partial A} = \text{const}$. Нека је БУО $f|_{\partial A} = 0$. Даље, нека је $F : X \to \{0,1\}$ дато са
$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \overline{A} \\ 0, & x \in (\overline{A})^c = \operatorname{ext} A \end{cases}$$

Да ли је F непрекидно?

$$\left.\begin{aligned} F|_{\overline{\operatorname{ext} A}} &= 0 \\ F|_{\overline{A}} &= f \end{aligned}\right\}$$
непрекидна и $\overline{\operatorname{ext} A}$, $\overline{A}$ су затворени, па на основу леме о лепљењу је и F непрекидно.

Како је X повезан, то је $F = \text{const}$, тј. $F = 0$, па је и $f = F|_{\overline{A}} = 0$. Дакле, $\overline{A}$ је повезан. ■

$\boxed{2.}$ Испитати повезаност простора:

(а) $(X, \mathcal{T}_a)$; (б) $(X, \mathcal{T}_d)$; (в) $(\mathbb{Q}, \mathcal{U}_{\mathbb{Q}})$; (г) $(\mathbb{Q}^c, \mathcal{U}_{\mathbb{Q}^c})$;

(д) $(X, \mathcal{T}_{cf})$; (ђ) $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$; (е) $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$; (ж) $(\{0,1\}, \mathcal{D}_{\{0,1\}})$.

▲ (а) $\mathcal{T}_a \cap \mathcal{F}_a = \{\emptyset, X\} \Rightarrow$ повезан;

(б) повезан $\Leftrightarrow |X| = 1$;

(в) $\mathbb{Q} = \Big(\underset{\substack{\cap \\ \mathcal{U}_{\mathbb{Q}}}}{(-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}}\Big) \sqcup \Big(\underset{\substack{\cap \\ \mathcal{U}_{\mathbb{Q}}}}{(\sqrt{2}, +\infty) \cap \mathbb{Q}}\Big) \Rightarrow$ није повезан

(г) $\mathbb{Q}^c = \Big(\underset{\substack{\cap \\ \mathcal{U}_{\mathbb{Q}^c}}}{(-\infty, 0) \cap \mathbb{Q}^c}\Big) \sqcup \Big(\underset{\substack{\cap \\ \mathcal{U}_{\mathbb{Q}^c}}}{(0, +\infty) \cap \mathbb{Q}^c}\Big) \Rightarrow$ није повезан

(д) X није повезан $\Leftrightarrow X = F \sqcup G$, $F, G \in \mathcal{F}_{cf}$ и $F, G \neq \emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow F$ и G су коначни $\Rightarrow X$ је коначан $\Rightarrow \mathcal{T}_{cf} = \mathcal{T}_d$.

Закључак:

X је повезан $\Leftrightarrow |X| = 1$ или X бесконачан

X није повезан $\Leftrightarrow 1 < |X| < \infty$

(ђ) $\mathbb{R} = \underset{\substack{\| \\ \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, 0) \\ \cap \\ \mathcal{S}}}{(-\infty, 0)} \sqcup \underset{\substack{\| \\ \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [0, n) \\ \cap \\ \mathcal{S}}}{[0, +\infty)} \Rightarrow$ није повезан

(е) $\mathcal{D} \cap \mathcal{F}_{\mathcal{D}} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \Rightarrow$ повезан

(ж) $\mathcal{D}_{\{0,1\}} = \{\emptyset, \{1\}, \{0,1\}\}$

$\underbrace{\{0,1\} = \underset{\text{није отворен}}{\{0\}} \sqcup \underset{\text{отворен}}{\{1\}}}_{\text{једини начин да } \{0,1\} \text{ представимо као дисјунктну унију 2 непразна скупа}} \Rightarrow \{0,1\}$ је повезан. $\blacksquare$

$\boxed{3.}$ Нека је (M, d) повезан метрички простор и нека је $|M| \geq 2$. Доказати да је M непребројив.

▲ Нека су $a, b \in M$, $a \neq b$ и нека је $f: M \to \mathbb{R}$

$$f(x) := d(a, x) \quad \text{(растојање је непрекидно)}.$$

Приметимо $f(a) = 0$, $f(b) = d(a, b) > 0$.

$$0,\ d(a,b) \in \underbrace{f(M)}_{\text{повезан}} \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow [0, d(a,b)] \subseteq f(M)$$

$$\Rightarrow f(M) \text{ је непребројив.}$$

Како је $|M| \geq |f(M)|$, то је и M непребројив. ■

$\boxed{4.}$ Доказати да међу следећим скуповима нема хомеоморфних:

(а) $[a, b)$, (a, b), $[a, b]$, S^1;

(б) $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ за $n > 1$;

(в) S^1, S^n за $n > 1$.

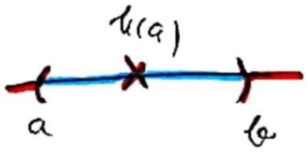
▲ (а) $\underbrace{[a, b),\ (a, b)}_{\text{нису компактни}} \not\simeq \underbrace{[a, b],\ S^1}_{\text{компактни}}$

- $[a, b) \simeq (a, b)$?

птс. да јесу хомеоморфни, тј. да постоји

$h:[a,b) \xrightarrow{\approx} (a,b)$. Тада је

$$\underset{\text{повезан}}{(a,b)} = [a,b)\setminus\{a\} \overset{h}{\approx} \underset{\text{није повезан}}{(a,b)\setminus\{h(a)\}}$$

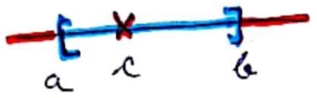


↯

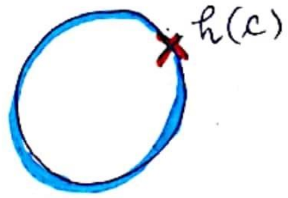
$\Rightarrow [a,b) \not\approx (a,b)$

• $[a,b]\approx S^1$?

Слично.



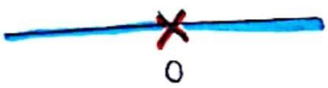
$\not\approx$



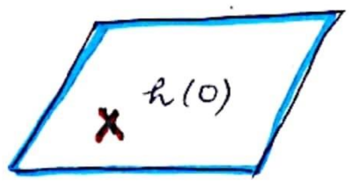
$[a,b]\setminus\{c\}$ — није повезан

$S^1\setminus\{h(c)\}$ — повезан

(б)



$\not\approx$



$\mathbb{R}\setminus\{0\}$ — није повезан

$\mathbb{R}^n\setminus\{h(0)\}$ — повезан

(в) пп. $S^1\approx S^n \Rightarrow \underbrace{S^1\setminus *}_{\approx\ \mathbb{R}} \approx \underset{\approx\ \mathbb{R}^n}{S^n\setminus\{h(*)\}} \Rightarrow \mathbb{R}\approx\mathbb{R}^n$ ↯ ■

$\boxed{\text{Теорема}}$ Ако је $U\in\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}\setminus\{\emptyset\}$, $V\in\mathcal{T}_{\mathbb{R}^m}\setminus\{\emptyset\}$ и $U\approx V$, онда је $m=n$.

Компоненте повезаности

Дефиниција Нека је $(X, \mathcal{T})$ тополошки простор и релација $\sim$ дата са

$$(\forall x, y \in X) \quad x \sim y \iff (\exists \text{ повезан } A \subseteq X) \ x, y \in A.$$

Теорема $\sim$ је релација еквиваленције.

Дефиниција Класе C_x, $x \in X$ ове релације називамо компонентама повезаности од X.

Теорема $(\forall x \in X)\ C_x \in \mathcal{F}_X$.

▲ C_x је повезан, па је и $\overline{C_x}$ повезан. Одавде је $\overline{C_x} \subseteq C_x$, па је $C_x = \overline{C_x}$, тј. C_x је затворен. ■

Пример C_x не мора бити отворен. Посматрајмо $X = \mathbb{Q}$, са топологијом наслеђеном од $\mathcal{U}$ на $\mathbb{R}$.

Свако $q \in \mathbb{Q}$ је једна компонента повезаности, тј. $q \not\sim r$ за $q \neq r$. Заиста, нека је $q \neq r$. Тада постоји $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ т.д. буде $q < x < r$. Претпоставимо супротно да је $C_q = C_r =: A$, тј. да је $q \sim r$.

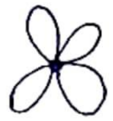
Тада су $A \cap (-\infty, x]$ и $A \cap [x, +\infty)$ затворени и дисјунктни па чине дисконекцију од A ↯.

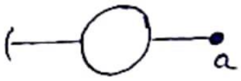
Дакле, класе су $C_q = \{q\}$, $q \in \mathbb{Q}$. Са друге стране ниједна класа није отворен скуп.

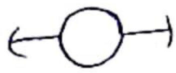
$\boxed{\text{Теорема}}$ Број компоненти повезаности је тополошка инваријанта.

$\boxed{1.}$ Да ли су хомеоморфни простори X и Y:

(а) X: 

Y:  ;

(б) X: 

Y:  ?

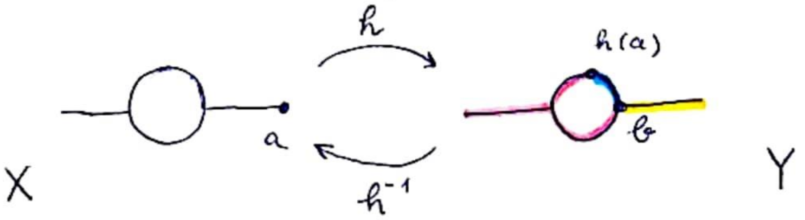
▲ (а) Пп. да постоји $h : X \xrightarrow{\approx} Y$.

$$\left.\begin{array}{l} X \setminus \{a\} \text{ има 3 компоненте повезаности} \\ \\ Y \setminus \{h(a)\} \text{ има 1 или 4 компоненте повезаности} \end{array}\right\} \Rightarrow X \not\approx Y$$

(б) Пп. да постоји $h : X \xrightarrow{\approx} Y$.

$$Y \approx X \setminus \{a\} \overset{h}{\approx} Y \setminus \{h(a)\}$$

Y повезан $\Rightarrow Y \setminus \{h(a)\}$ повезан $\Rightarrow h(a) \in$ кругу



Дакле, $\underbrace{(Y \setminus \{h(a)\}) \setminus \{b\}}_{\text{3 компоненте повезаности}} \approx \underbrace{(X \setminus \{a\}) \setminus \{h^{-1}(b)\}}_{\text{1 или 2 компоненте повезаности}}$ ↯ ■

Ако су $(X, \mathcal{T}_X)$ и $(Y, \mathcal{T}_Y)$ тополошки простори, база од $X \times Y$ је дата са $\mathcal{B}_{X\times Y} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y\}$

$\boxed{2.}$ Нека су X и Y тополошки простори. C је компонента повезаности од $X \times Y$ ако и само ако
$$(\exists C_x \subseteq X)(\exists C_y \subseteq Y)\ C = C_x \times C_y.$$

▲ $\Rightarrow$: У датој топологији пројекције $p_X : X \times Y \to X$ и $p_Y : X \times Y \to Y$ су непрекидне (топологија се управо задаје т.д. p_X и p_Y буду непрекидне).

C је компонента повезаности па је повезан, па су и $p_X(C)$ и $p_Y(C)$ повезани.

$$\Rightarrow (\exists C_x \subseteq X)\ p_X(C) \subseteq C_x$$
$$(\exists C_y \subseteq Y)\ p_Y(C) \subseteq C_y$$

Напомена: овде не може бити „=". Нпр. $C = \mathbb{R} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{R}$, а $p_X(C) \times p_Y(C) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Тада је $\underset{\text{компонента повезаности}}{C} \subseteq p_X(C) \times p_Y(C) \subseteq \underset{\text{повезан}}{C_x \times C_y}$

$$\Rightarrow C = C_x \times C_y.$$

$\Leftarrow$: Нека су $C_x \subseteq X$ и $C_y \subseteq Y$ две компоненте повезаности и $C = C_x \times C_y$. Тада је C повезан па постоји нека компонента повезаности $K \subseteq X \times Y$ т.д. $C \subseteq K$.

Тада је $K = p_X(K) \times p_Y(K)$ (увек важи „$\subseteq$", а овде $p_X(K) \times p_Y(K)$ је повезан и K компонента повезаности, па је „=")

$$\Rightarrow \underbrace{C_x}_{\text{компонента повезаности}} \subseteq \underbrace{p_X(K)}_{\text{повезан}}, \quad \underbrace{C_y}_{\text{компонента повезаности}} \subseteq \underbrace{p_Y(K)}_{\text{повезан}}$$

$$\Rightarrow C_x = p_X(K), \quad C_y = p_Y(K), \quad \text{па је}$$

$$C = C_x \times C_y = p_X(K) \times p_Y(K) = K.$$

Дакле, C јесте компонента повезаности од $X \times Y$. ▨

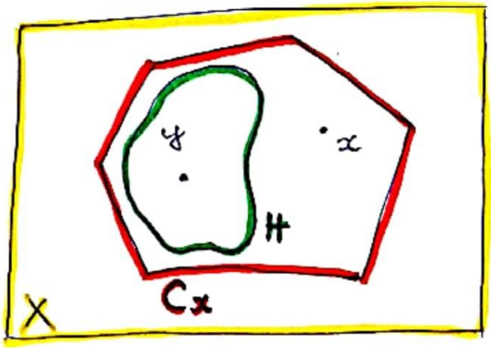
Локална повезаност

$\boxed{\text{Дефиниција}}$ Тополошки простор $(X, \mathcal{T})$ је локално повезан ако

$$(\forall x \in X)(\forall G \in \mathcal{O}(x))(\exists H \in \mathcal{O}(x))\ H \subseteq G \text{ и } H \text{ је повезан.}$$

$\boxed{1.}$ Ако је $(X, \mathcal{T})$ локално повезан и C_x компонента повезаности, онда је $C_x \in \mathcal{T}$.

▲ Нека је $x \in X$, C_x компонента и $y \in C_x$ произвољно. Како је $X \in \mathcal{O}(y)$, то постоји $H \in \mathcal{O}(y)$ т.д. је повезан. H и C_x су повезани и садрже y, а C_x је највећи такав (јер је C_x унија свих повезаних који садрже y), па је $H \subseteq C_x$,



а одатле је $y \in \underbrace{\operatorname{int} H}_{\text{отворен}} \subseteq C_x$. Дакле, C_x је отворен. ▨

2. Да ли су следећи простори локално повезани:

(а) $(X, \mathcal{T}_d)$; (б) $(X, \mathcal{T}_a)$; (в) $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$?

▲ (а) Нека су $x \in X$ и $G \in \mathcal{O}(x)$ произвољни.

Узмемо $H := \{x\}$ – повезан и $H \subseteq G \Rightarrow (X, \mathcal{T}_d)$ јесте локално повезан.

(б) Ако је $x \in X$ и $G \in \mathcal{O}(x)$ мора бити баш $G = X$, па узмемо $H := G = X$ – повезан.

(в) Тврдимо: ниједан скуп са бар 2 елемента није повезан.

$(\forall a \in \mathbb{R})\ (-\infty, a) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, a) \in \mathcal{S}$ и $[a, +\infty) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a, n) \in \mathcal{S}$.

Нека је $A \subseteq \mathbb{R}$ произвољан и $|A| \geq 2$ и нека су $a, b \in A$, $b < a$. Тада је

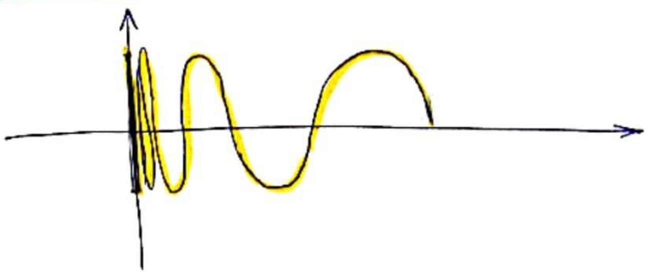
$$A = \underset{\in \mathcal{S}_A}{\left(A \cap (-\infty, a)\right)} \sqcup \underset{\in \mathcal{S}_A}{\left(A \cap [a, +\infty)\right)},$$

па A није повезан.

Са друге стране, $\operatorname{int}\{x\} = \emptyset$ за свако $x \in \mathbb{R}$.

Дакле ниједан скуп не може бити она околина H из дефиниције (једночлани скупови нису околине, а вишечлани нису повезани), па $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ није локално повезан. ▨

Пример Тополошка синусоида није локално повезана.



$$X = \left\{ \left(x, \sin \tfrac{1}{x}\right) \mid x \in (0, +\infty) \right\} \cup \{0\} \times [-1, 1]$$

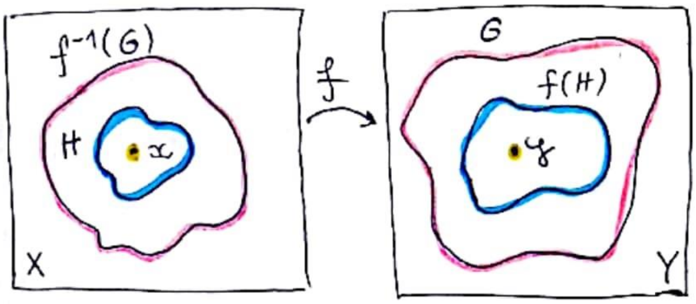
Локална повезаност није непрекидна инваријанта.

$\boxed{\text{Пример}}$ $1_X : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_d) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{S})$, $\quad (1_X(x) = x, x \in \mathbb{R})$

1 је непрекидно и $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_d)$ је локално повезан, али $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ није.

$\boxed{\text{Став}}$ Нека је $f : X \longrightarrow Y$ непрекидно, „на" и отворено. Ако је X локално повезан, онда је и Y локално повезан.

▲ Нека је $y \in Y$, $G \in \mathcal{O}(y)$.



f је „на", па

$(\exists x \in X)\ f(x) = y$.

f је непрекидно $\Rightarrow f^{-1}(G) \in \mathcal{O}(x)$.

X је локално повезан па $(\exists H \in \mathcal{O}(x))\ H \subseteq f^{-1}(G)$ и H повезан.

Тада је $f(H)$ повезан, $y \in f(H)$ и $f(H) \subseteq G$.

Још да се уверимо да је $f(H) \in \mathcal{O}(y)$, тј. да $y \in \mathrm{int}(f(H))$.

$H \in \mathcal{O}(x) \Rightarrow x \in \mathrm{int}\, H \Rightarrow y \in \underbrace{f(\underbrace{\mathrm{int}\, H}_{\text{отворено}})}_{\text{отворен}} \subseteq f(H)$, па

отворен

засто $y \in \mathrm{int}(f(H))$

Дакле, Y је локално повезан. ■

Путна повезаност

$\boxed{\text{Дефиниција}}$ Нека је $(X, \mathcal{T})$ тополошки простор и $\sim$ релација на X дата са

$$x \sim y \iff (\exists u : I \to X) \text{ и непрекидно}, u(0) = x, u(1) = y.$$

$\sim$ је релација еквиваленције, а класе при овој релацији називамо компонентама путне повезаности. Ако X има само једну компоненту, кажемо да је путно повезан. Компоненте означавамо са P_x, $x \in X$.

$\boxed{\text{Теорема}}$ Ако је X путно повезан, онда је и повезан.

$\boxed{\text{Дефиниција}}$ Тополошки простор $(X, \mathcal{T})$ је локално путно повезан ако

$$(\forall x \in X)(\forall G \in \mathcal{O}(x))(\exists H \in \mathcal{O}(x))\ H \subseteq G \text{ и } H \text{ путно повезан.}$$

$\boxed{\text{Теорема}}$ Ако је X локално путно повезан, онда

$$(\forall x_0 \in X)\ P_{x_0} \in \mathcal{T}_X.$$

Специјално, $P_{x_0} = X \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in A} P_{x_\alpha} \right) \in \mathcal{F}_X$.

Став Ако је X локално путно повезан, онда

$$X \text{ је повезан} \iff X \text{ је путно повезан.}$$

▲ $\Leftarrow$: увек важи.

$\Rightarrow$: пп. да X није путно повезан, па има бар две компоненте путне повезаности, тј. нека је

$\emptyset \neq P_{x_0} \neq X$ компонента. Тада $X = \underbrace{P_{x_0} \sqcup (X \setminus P_{x_0})}_{\text{отворени и непразни}}$,

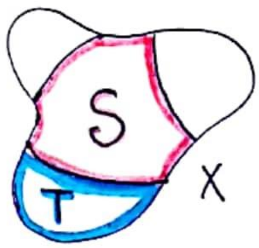
па је X неповезан. ∎

Лема Ако је $A \subseteq Y$, онда $x \sim_A y \Rightarrow x \sim_Y y$.

($\sim_A$ значи „спојени путем у A")

1. Нека је X путно повезан, $\emptyset \neq S \in \mathcal{F}_X$ путно повезан и T нека компонента путне повезаности од $X \setminus S$. Тада је $T \cup S$ путно повезан.

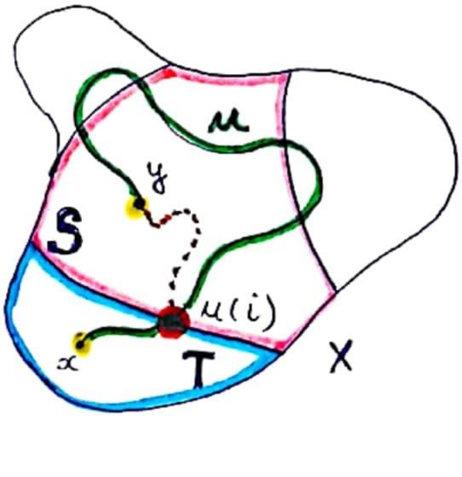
▲ Нека су $x, y \in T \cup S$.



1° $x, y \in T \Rightarrow x \sim_T y \Rightarrow x \sim_{T \cup S} y$;

2° $x, y \in S \Rightarrow x \sim_S y \Rightarrow x \sim_{T \cup S} y$.

3° $x \in T, y \in S$. X је путно повезан па постоји $u : [0,1] \to X$ непрекидно т.д. $u(0) = x$, $u(1) = y$.



Нека је $i := \inf(u^{-1}(S))$. Како је S затворен, то $u^{-1}(S) \in \mathcal{F}_{[0,1]}$, па $i \in u^{-1}(S)$, тј. $u(i) \in S$. При том $i \neq 0$ јер $u(0) = x \notin S$.

Приметимо да је $u([0,i)) \subseteq T$.

Заиста, ако пп. да $(\exists t \in (0,i))\ u(t) \in X \setminus (S \cup T)$, онда $u([0,t]) \subseteq X \setminus S$, па је $u|_{[0,t]}$ пут који спаја $u(0) \in T$ и $u(t)$ из неке друге компоненте. ↯

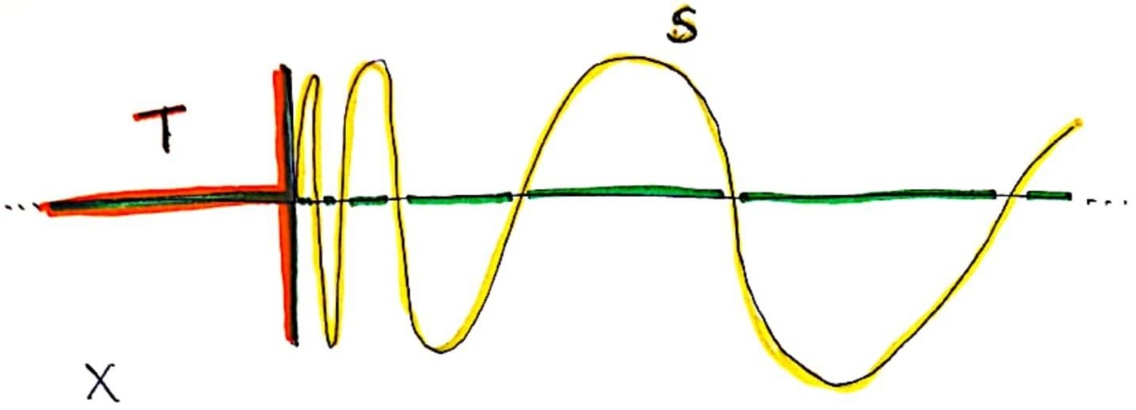
Дакле, $u([0,i)) \subseteq T$.

Сада имамо: $\left.\begin{array}{l} x \sim_{T \cup S} u(i) \ (\text{путем } u) \\ u(i) \sim_S y \ (\text{било којим путем}) \end{array}\right\} x \sim_{T \cup S} y$ ▨

$\boxed{\text{Примедба}}$. Поставља се питање да ли је било неопходно да је $S \in \mathcal{F}_X$ у претходном задатку. Тај услов смо користили једино кад смо закључили да је $i \in u^{-1}(S)$ јер је и $u^{-1}(S)$ затворен. Јасно, ако $S \notin \mathcal{F}_X$ онда не мора бити $i \in u^{-1}(S)$, али ће бити у $\overline{u^{-1}(S)}$. И да ли се онда $u(i) \in \overline{S}$ може спојити путем са y? То питање се своди на питање да ли је затворење путно повезаног простора путно повезано? Одговор је НЕ. Пример за то је $X = \{(x, \sin\frac{1}{x}) \mid x \in (0,+\infty)\}$. То мотивише овај контрапример:

$$X = \mathbb{R} \times \{0\} \cup \{(x, \sin\tfrac{1}{x}) \mid x \in (0,+\infty)\} \cup (\{0\} \times [-1,1]) \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$S = \{(x, \sin\tfrac{1}{x}) \mid x \in (0,+\infty)\}, \quad T = (\{0\} \times [-1,1]) \cup ((-\infty,0] \times \{0\})$$



X, S јесу путно повезани, T јесте компонента од $X\setminus S$, али $T\cup S$ није путно повезан!
Суштински разлог је то што $\overline{S} = S \cup \{0\}\times[-1,1]$ није путно повезан.

$\boxed{2.}$ Не постоји простор X т.д. је $\mathbb{R}\approx X\times X$.

▲ ппс. да постоји такав X и $h:\mathbb{R}\xrightarrow{\approx} X\times X$.

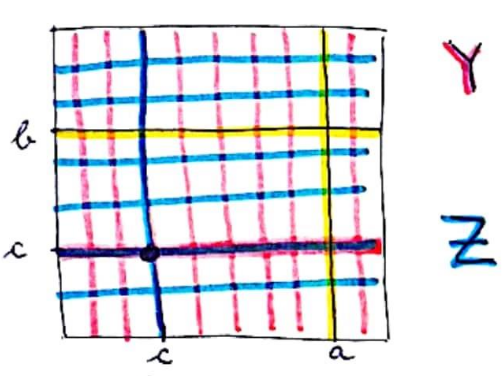
$\mathbb{R}$ повезан $\Rightarrow$ $X\times X$ је повезан $\Rightarrow$ $p_1(X\times X)=X$ је повезан.

$\mathbb{R}\setminus\{0\}$ није повезан $\Rightarrow$ $(X\times X)\setminus\{h(0)\}$ није повезан.

Нека је $h(0)=(a,b)\in X\times X$, затим $c\in X\setminus\{a,b\}$ и

$$Y:=\left(\bigcup_{\alpha\in X\setminus\{a\}}\{\alpha\}\times X\right)\cup\left(X\times\{c\}\right)$$

$$Z:=\left(\bigcup_{\beta\in X\setminus\{b\}}X\times\{\beta\}\right)\cup\left(\{c\}\times X\right)$$



На основу последње теореме на стр. 51, Y и Z су повезани.
Из исте теореме, како је $(c,c)\in Y\cap Z\neq\emptyset$, то је и
$Y\cup Z = X\times X\setminus\{(a,b)\}$ повезан. ↯ ■

Брауерова и Борсук - Уламова теорема

Дефиниција Тополошки простор X има својство фиксне тачке (СФТ) ако свако непрекидно пресликавање $f : X \to X$ има фиксну тачку, тј. $(\exists x \in X)\ f(x) = x$.

Теорема (Брауер) Диск D^n има СФТ за свако $n \in \mathbb{N}$.

1. Доказати Брауерову теорему за $n = 1$.

▲ Нека је $f : \underset{D^1}{\overset{\shortparallel}{[-1,1]}} \longrightarrow \underset{D^1}{\overset{\shortparallel}{[-1,1]}}$ непрекидно.

Посматрајмо $F : [-1,1] \to [-1,1]$ дато са $F(x) = f(x) - x$.

Тада важи

$$F(1) = \underbrace{f(1)}_{\leq 1} - 1 \leq 0,$$

$$F(-1) = \underbrace{f(-1)}_{\geq -1} + 1 \geq 0,$$

па постоји $x_0 \in [-1,1]$ т.д. је $F(x_0) = 0$, тј. $f(x_0) = x_0$. ■

2. СФТ је инваријанта хомеоморфизма.

▲ Нека је $h : X \longrightarrow Y$ хомеоморфизам и нека X има СФТ. Даље, нека је $f : Y \to Y$ непрекидно.

Желимо да покажемо да f има ФТ.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[rrr, bend right, dashed, "h^{-1}\circ f\circ h"'] & Y \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "h^{-1}"] & X \end{tikzcd}$$

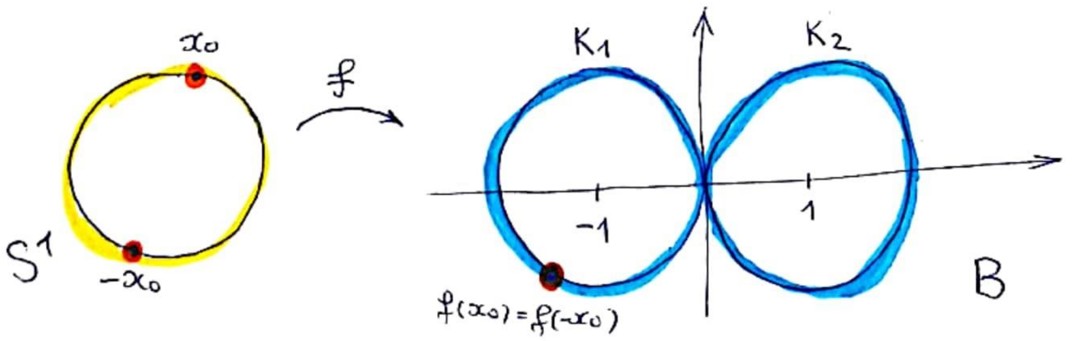
$h^{-1}\circ f\circ h : X \to X$ је непрекидно па има ФТ, тј.

$$(\exists x_0 \in X)\ (h^{-1}\circ f\circ h)(x_0) = x_0.$$

Када применимо h на претходну једнакост, добијамо $f(h(x_0)) = h(x_0)$, тј. $h(x_0)$ је ФТ од f. ∎

$\boxed{\text{Теорема}}$ (Борсук–Улам) Нека је $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ непрекидно и $n \in \mathbb{N}$. Тада $(\exists x_0 \in S^n)\ f(x_0) = f(-x_0)$.

$\boxed{3.}$ Нека су $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^2$ јединичне кружнице са центром у -1 и 1 и нека је $B = K_1 \cup K_2$. Ако је $f : S^1 \to B$ непрекидно и $(0,0) \notin f(S^1)$, показати да постоји $x_0 \in S^1$ т.д. $f(x_0) = f(-x_0)$.



Нека је $\bar{f} : S^1 \to B \setminus \{(0,0)\}$, $\bar{f}(x) := f(x)$ (сузимо кодомен)

Како је S^1 повезана, то је $\bar{f}(S^1)$ повезан, па или $\bar{f}(S^1) \subseteq K_1$ или $\bar{f}(S^1) \subseteq K_2$.

Б.У.О. $\bar{f}(S^1) \subseteq K_1 \setminus \{(0,0)\} \overset{h}{\approx} \mathbb{R}$

Тада је $h \circ \bar{f} : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$, па на основу БУТ

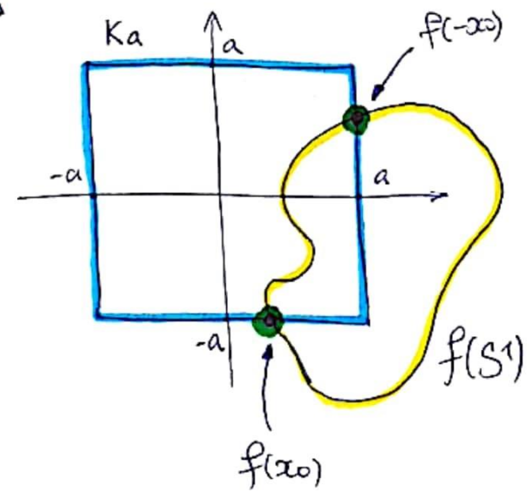
$$(\exists x_0 \in S^1)\ (h \circ \bar{f})(x_0) = (h \circ \bar{f})(-x_0),$$

одакле применом h^{-1} добијамо $\bar{f}(x_0) = \bar{f}(-x_0)$,

тј. $f(x_0) = f(-x_0)$. ■

4. Нека је $f : S^1 \to \mathbb{R}^2$ непрекидно и $(0,0) \notin f(S^1)$. Тада постоји $K_a = \partial([-a,a]^2)$ и $x_0 \in S^1$ т.д. $f(x_0), f(-x_0) \in K_a$.

▲



Нека је $k : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ дато са $k(x) = a$, где је $a \in \mathbb{R}$ т.д. $x \in K_a$. Јасно, k је непрекидно. Посматрајмо композицију

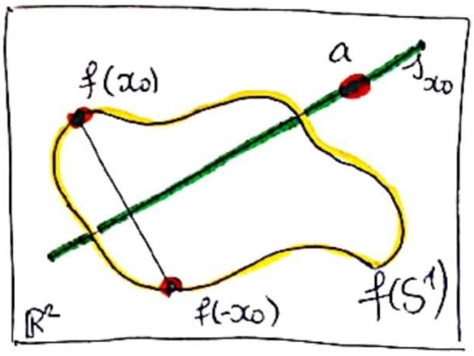
$$S^1 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \xrightarrow{k} \mathbb{R}.$$

$k \circ f$ је непрекидно и $k \circ f : S^1 \to \mathbb{R}$, па на основу БУТ: $(\exists x_0 \in S^1)\ (k \circ f)(x_0) = (k \circ f)(-x_0) =: a$

Тада $f(x_0), f(-x_0) \in K_a$. ■

5. Нека је $f: S^1 \to \mathbb{R}^2$ непрекидно т.д. $(\forall x \in S^1)\ f(x) \neq f(-x)$ и нека је s_x симетрала дужи $\overline{f(x)f(-x)}$. Показати да је тада $\bigcup_{x \in S^1} s_x = \mathbb{R}^2$.

▲



Нека је $a \in \mathbb{R}^2$. Тражимо $x_0 \in S^1$ т.д. $a \in s_{x_0}$. Нека је $\varphi: S^1 \to \mathbb{R}$ дато са $\varphi(x) := d(a, f(x))$.
d и f су непрекидна, па је и φ непрекидно, па на основу БУТ постоји $x_0 \in S^1$ т.д. $\varphi(x_0) = \varphi(-x_0)$, тј. $d(f(x_0), a) = d(f(-x_0), a)$ па је $a \in s_{x_0}$. ■

6. Ако је $n \in \mathbb{N}$, показати да су следећа тврђења међусобно еквивалентна:

(1) $(\forall f: S^n \to \mathbb{R}^n$ непрекидно$)(\exists x_0 \in S^n)\ f(x_0) = f(-x_0)$ (БУТ);

(2) Не постоји непрекидно непарно пресликавање $g: S^n \to S^{n-1}$.

▲ (1) $\Rightarrow$ (2): пп. Нека је $g: S^n \to S^{n-1}$ непрекидно и непарно.

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, dashed, "i\circ g"'] & S^{n-1} \arrow[r, hook, "i"] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

$i \circ g$ је непрекидно, па по (1) постоји $x_0 \in S^n$ т.д.

$$i(g(x_0)) = i(g(-x_0)),$$ одакле је

$$g(x_0) = g(-x_0) \underset{\text{јер је } g \text{ непарно}}{=} -g(x_0) \Rightarrow g(x_0) = 0 \notin S^{n-1} \ ↯$$

$(2) \Rightarrow (1)$: пп. да постоји непрекидно $f: S^n \to \mathbb{R}^n$ т.д.

$$(\forall x \in S^n)\ f(x) \neq f(-x).$$

Нека је $g: S^n \to S^{n-1}$ дато са $g(x) := \dfrac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}$.

Тада је g непрекидно и непарно. ↯ ■

Аксиоме сепарације

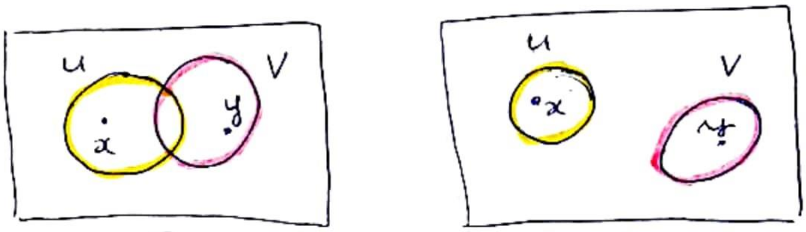
Нека је $(X, \mathcal{T})$ тополошки простор.

Дефиниција X је T_1 простор ако

$$(\forall x, y \in X)\ x \neq y \Rightarrow (\exists U, V \in \mathcal{T})\ x \in U \setminus V \wedge y \in V \setminus U.$$

Дефиниција X је T_2 простор ако је T_1 и $U \cap V = \emptyset$,

тј. $(\forall x, y \in X)\ x \neq y \Rightarrow (\exists U, V \in \mathcal{T})\ U \cap V = \emptyset \wedge x \in U \wedge y \in V$.



T_1 T_2

T_2 простор се другачије зове Хаусдорфов.

Теорема X је T_1 ако и само ако $(\forall x \in X)\ \{x\} \in \mathcal{F}_X$.

Теорема X је T_2 ако и само ако $\Delta_X \in \mathcal{F}_{X \times X}$, где је

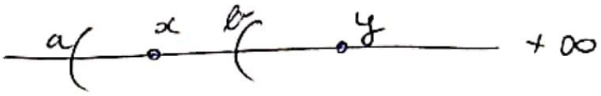
$$\Delta_X = \{(x,x) \mid x \in X\} \text{ дијагонала.}$$

Пример T_1 и T_2 нису непрекидне инваријанте.

$\mathbb{1}_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}, \mathcal{U}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{D})$ је непрекидно

$(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ – T_1 и T_2,

$(\mathbb{R}, \mathcal{D})$ – ни T_1 ни T_2



(не постоје U и V из деф.)

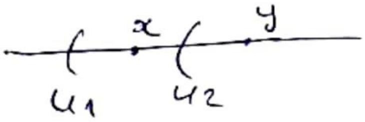
1. Који од наредних простора су T_2?

(а) $(X, \mathcal{T}_d)$; (б) $(X, \mathcal{T}_a)$; (в) $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$; (г) $(X, \mathcal{T}_x)$; (д) $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$; (ђ) $(X, \mathcal{T}_{cf})$.

(а) јесте T_2. $U := \{x\}$, $V := \{y\}$.

(б) јесте акко $|X| = 1$.

(в) није.



$y \in U_1 \cap U_2$, тј. нема дисјунктних скупова у $\mathcal{D}$.

(г) није јер нема дисјунктних у $\mathcal{T}_x = \{U \subseteq X \mid x \in U\} \cup \{\emptyset\}$

(д) Знамо да је $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{S}$, па како је $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ T_2, то је и $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ T_2 (ако се две тачке могу раздвојити у мањој топологији, сигурно могу и у већој.)

(ђ) 1° $|X| < \infty \Rightarrow \mathcal{T}_{cf} = \mathcal{T}_d$ па јесте T_2;

2° $|X| = \infty \Rightarrow$ нема дисјунктних отворених скупова јер пс. $U, V \in \mathcal{T}_{cf}$, $U \cap V = \emptyset \Rightarrow \underbrace{U^c \cup V^c}_{\text{коначни}} = \underbrace{X}_{\text{бесконачан}}$ ↯

Наследност: Ако је X T_1 или T_2 и $A \subseteq X$, онда је и A T_1 односно T_2.

$\boxed{\text{Теорема}}$ У T_2 простору гранична вредност низа је јединствена.

$\boxed{\text{Пример}}$ У $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$ гранична вредност није јединствена.
Нека је $a_n = n$, $n \in \mathbb{N}$. Тада је $(\forall a \in (-\infty, 0]) \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

$\boxed{\text{Став}}$ Ако су X и Y тополошки простори, Y T_2 и $f, g : X \to Y$ непрекидна, онда је

$$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\} \in \mathcal{F}_X.$$

$\boxed{\text{Став}}$ Нека су X и Y тополошки простори, Y T_2 и $f, g : X \to Y$ непрекидна т.д. $f = g$ на скупу D који је густ у X (тј. $\overline{D} = X$). Тада $f = g$ на X.

▲ $D \subseteq \{x \in X \mid f(x) = g(x)\} =: A \in \mathcal{F}_X$ на основу првог става.

Тада је $X = \overline{D} \subseteq \overline{A} = A$, тј. $X = A$, тј. $f \equiv g$. ■

$\boxed{\text{Пример}}$ Нека је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ т.д. $f(x+y) = f(x) + f(y)$ за свако $x, y \in \mathbb{R}$. Приметимо:

- $f(n) = \underbrace{f(1) + \dots + f(1)}_{n} = n \cdot f(1)$, $n \in \mathbb{N}$
- $0 = f(n-n) = f(n) + f(-n) \Rightarrow f(-n) = (-n) \cdot f(1)$, $n \in \mathbb{N}$
- за $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$

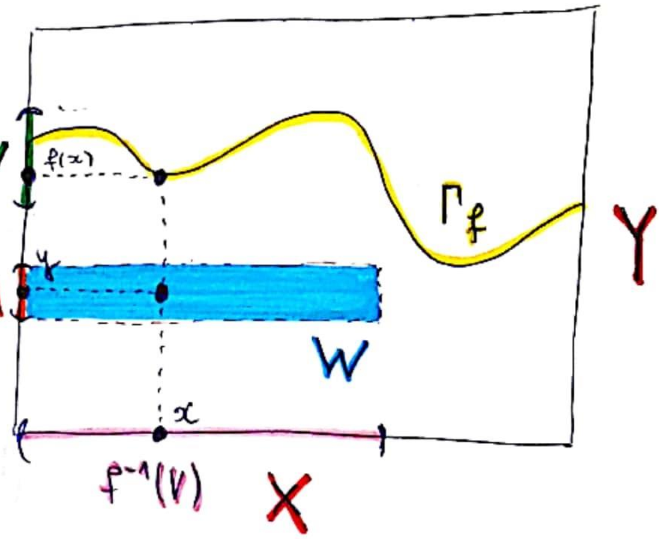
$$m \cdot f(1) = f(m) = f(n \cdot \underbrace{\tfrac{m}{n}}_{q}) = n \cdot f(q) \Rightarrow f(q) = q \cdot f(1)$$

функције $f(x)$ и $x\cdot f(1)$ се поклапају на $\mathbb{Q}$ који је густ у $\mathbb{R}$, па је $f(x)=x\cdot f(1)$ за свако $x\in\mathbb{R}$.

2. Нека је $f: X\to Y$ непрекидно и Y T_2. Онда је $\Gamma_f \in \mathcal{F}_{X\times Y}$.

▲ $\Gamma_f = \{(x,f(x)) \mid x\in X\} \subseteq X\times Y$

$\Gamma_f \in \mathcal{F}_{X\times Y} \iff \Gamma_f^c \in \mathcal{T}_{X\times Y}$



Нека је $(x,y)\in\Gamma_f^c$. Тада је $y\neq f(x)$ па како је Y T_2, то постоје $U,V\in\mathcal{T}_Y$, $U\cap V=\emptyset$,

$y\in U$, $f(x)\in V$.

Узмимо $W := f^{-1}(V)\times U \in \mathcal{T}_{X\times Y}$. Тада је W тражена околина. Заиста, $W\cap\Gamma_f=\emptyset$. Ппс. $(\exists(\tilde{x},f(\tilde{x}))\in f^{-1}(V)\times U)$, тј. $f(\tilde{x})\in U\cap V$ ↯.

Дакле, Γ_f^c је отворен, па је Γ_f затворен. ▨

3. Нека је $f:X\to Y$ непрекидно, „на“ и отворено. Ако је $\Gamma_f\in\mathcal{F}_{X\times Y}$, онда је Y T_2.

▲ Y је $T_2 \iff \Delta_Y \in \mathcal{F}_{Y\times Y} \iff \Delta_Y^c\in\mathcal{T}_{Y\times Y}$

Посматрајмо пресликавање
$$f\times \mathbb{1}_Y : X\times Y \longrightarrow Y\times Y$$
$$(x,y) \longmapsto (f(x),y)$$

f и $\mathbb{1}_Y$ су отворена, па је и $f\times \mathbb{1}_Y$ отворено, па

$$(f\times \mathbb{1}_Y)(\underbrace{\Gamma_f^c}_{\in\mathcal{T}_{X\times Y}}) \in \mathcal{T}_{Y\times Y}$$

Показујемо да је $(f\times 1_Y)(\Gamma_f^c)=\Delta_Y^c$.

$\subseteq$: $(x,y)\in\Gamma_f^c \iff y\neq f(x)$

$\Rightarrow (f\times 1_Y)(x,y)=(f(x),y)\notin\Delta_Y \Rightarrow (f(x),y)\in\Delta_Y^c$

$\supseteq$: $(y_1,y_2)\in\Delta_Y^c$, тј. $y_1\neq y_2$.

f је „на" па постоји $x\in X$ т.д. $f(x)=y_1$.

Тада је $(y_1,y_2)=(f(x),y_2)=(f\times 1_Y)(\underbrace{x,y_2}_{\in\Gamma_f^c})$

Дакле, $\Delta_Y^c\in\mathcal{T}_{Y\times Y}$, па је Y T_2. ■

Дефиниција $(X,\mathcal{T}_X)$ је регуларан простор ако

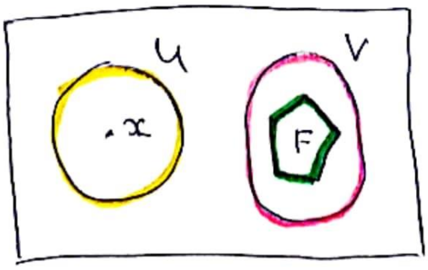
$$(\forall x\in X)(\forall F\in\mathcal{F}_X)\ x\notin F\Rightarrow(\exists U,V\in\mathcal{T}_X)\ U\cap V=\emptyset\wedge x\in U\wedge F\subseteq V.$$

Дефиниција X је T_3 простор ако је T_1 и регуларан.

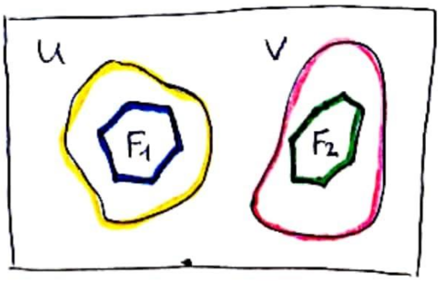
Дефиниција $(X,\mathcal{T}_X)$ је нормалан простор ако

$$(\forall F_1,F_2\in\mathcal{F}_X)\ F_1\cap F_2=\emptyset\Rightarrow(\exists U,V\in\mathcal{T}_X)\ U\cap V=\emptyset\wedge F_1\subseteq U\wedge F_2\subseteq V.$$

Дефиниција X је T_4 простор ако је T_1 и нормалан.



T_3



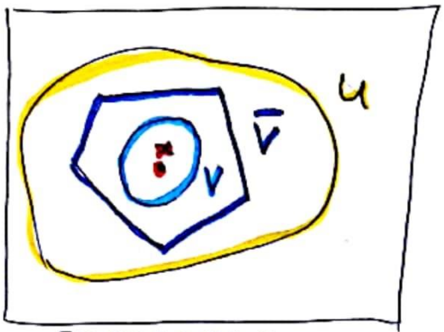
T_4

Теорема X је регуларан ако и само ако

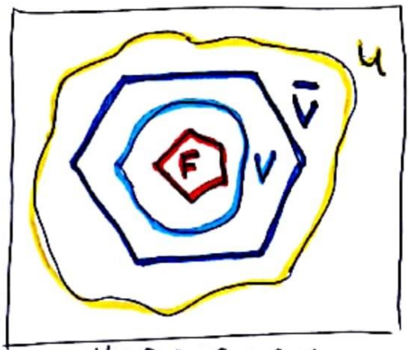
$$(\forall x\in X)(\forall U\in \mathcal{O}(x))(\exists V\in \mathcal{T}_X)\ x\in V\subseteq \overline{V}\subseteq U.$$

Теорема X је нормалан ако и само ако

$$(\forall F\in \mathcal{F}_X)(\forall U\in\mathcal{O}(F))(\exists V\in\mathcal{T}_X)\ F\subseteq V\subseteq\overline{V}\subseteq U.$$



РЕГУЛАРАН



НОРМАЛАН

Пример T_3 и T_4 нису непрекидне инваријанте.

$(\mathbb{R},\mathcal{U}) \xrightarrow{1} (\mathbb{R},\mathcal{D})$ је непрекидно

$(\mathbb{R},\mathcal{U})$: јесте T_3, T_4; $(\mathbb{R},\mathcal{D})$: није ни T_1

Пример Сваки метрички простор је T_4.

$$\boxed{M\Rightarrow T_4\Rightarrow T_3\Rightarrow T_2\Rightarrow T_1}$$

Наследност: Ако је X регуларан, онда је и $A\subseteq X$ рег.

Нормалност није наследна, али је слабо наследна, тј. преноси се на затворене потпросторе.

X нормалан и $A\in\mathcal{F}_X \Rightarrow$ A је нормалан.

4. $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ је T_4.

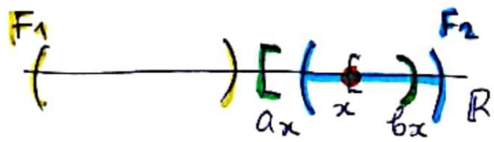
$(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ је T_1

Нека су $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$ и Б.У.О. $x < y$.
Узмимо $U := [x, y)$, $V := [y, y+1)$.
Тада $U, V \in \mathcal{S}$, $U \cap V = \emptyset$ и $x \in U$, $y \in V$.

$(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ је нормалан

Нека су $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ и $F_1 \cap F_2 = \emptyset$.
Ако $x \in F_2 \Rightarrow x \in F_1^c$, па постоји базни $[a_x, b_x)$ т.д.

$$x \in [a_x, b_x) \subseteq F_1^c,$$



одакле је $x \in [x, b_x) \subseteq F_1^c$.

Слично за $x \in F_1$ постоји c_x т.д. $[x, c_x) \subseteq F_2^c$.

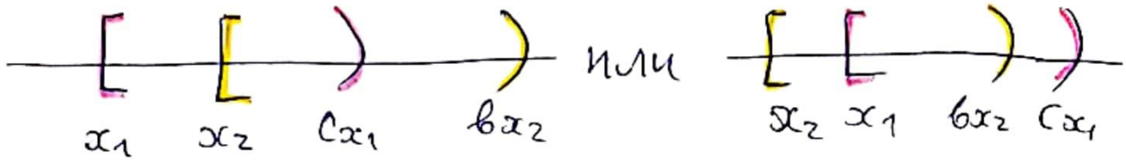
Нека је
$$U_1 := \bigcup_{x \in F_1} [x, c_x),$$
$$U_2 := \bigcup_{x \in F_2} [x, b_x).$$

Тада је $F_1 \subseteq U_1$, $F_2 \subseteq U_2$ и $U_1, U_2 \in \mathcal{S}$.

Још да проверимо да ли су U_1 и U_2 дисјунктни.

ппс. $(\exists \alpha \in U_1 \cap U_2)$

$$\Rightarrow (\exists x_1 \in F_1)(\exists x_2 \in F_2)\ \alpha \in \underbrace{[x_1, c_{x_1})}_{\subseteq F_2^c} \cap \underbrace{[x_2, b_{x_2})}_{\subseteq F_1^c}$$



Тада или $x_2 \in [x_1, c_{x_1}) \subseteq F_2^c$ ↯

или $x_1 \in [x_2, b_{x_2}) \subseteq F_1^c$ ↯

Дакле, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, па је $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ нормалан.

Коначно, $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ је T_4. ∎

$\boxed{\text{Пример}}$ $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ је T_4, али $(\mathbb{R}, \mathcal{S}) \times (\mathbb{R}, \mathcal{S})$ није T_4 јер није нормалан.

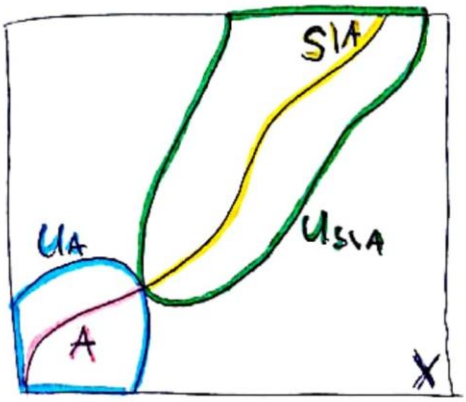
(Ово ћемо доказати касније)

Џонсова лема Нека је $(X, \mathcal{T})$ тополошки простор, D свуда густ у X, $S \subseteq X$ дискретан (тј. $\mathcal{T}_S = \mathcal{T}_d$). Ако је S затворен и $|S| \geqslant 2^{|D|} = |\mathcal{P}(D)|$, онда X није нормалан.

▲ Ппс. да X јесте нормалан.

Нека је $A \subseteq S$. Како је $\mathcal{T}_S = \mathcal{T}_d$, то $A \in \mathcal{F}_S$ и $S \setminus A \in \mathcal{F}_S$, па како је и S затворен, то $A, S\setminus A \in \mathcal{F}_X$.

Како је X нормалан, то постоје $U_A, U_{S\setminus A} \in \mathcal{T}_X$ т.д. $U_A \cap U_{S\setminus A} = \emptyset$ и $A \subseteq U_A$, $S \setminus A \subseteq U_{S\setminus A}$.



Нека је $f : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(D)$ дато са

$$f(A) := U_A \cap D \neq \emptyset \quad (\text{јер } \overline{D} = X)$$

Показаћемо да је f „1-1".

Нека су $A, B \subseteq S$, $A \neq B$. Б.У.О. $A \setminus B \neq \emptyset$, тј.

$$A \cap B_S^c = A \cap (S \setminus B) \neq \emptyset, \ (*)$$

Приметимо да је

$$(U_A \cap D) \cap U_{S\setminus B} \neq \emptyset \quad (**)$$

јер $U_A \cap U_{S\setminus B}$ је отворен и непразан због $(*)$, па је у пресеку са D непразан (јер $\overline{D} = X$).

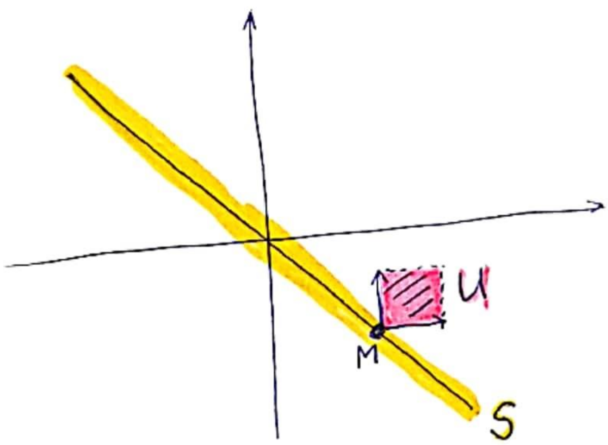
Такође, $(\mathcal{U}_B \cap D) \cap \mathcal{U}_{S\setminus B} = \emptyset$ $(\overset{*}{**})$ из дефиниције скупова $\mathcal{U}_B$ и $\mathcal{U}_{S\setminus B}$.

Сада из $(**)$ и $(\overset{*}{**})$ јасно следи да је $\mathcal{U}_A \cap D \neq \mathcal{U}_B \cap D$, тј. $f(A) \neq f(B)$ па је $\underbrace{f \text{ „1-1"}}$. Одавде је

$$|S| < |\mathcal{P}(S)| \leq |\mathcal{P}(D)| \quad ↯ \quad ■$$

Последица $(\mathbb{R}, \mathcal{S})^2$ није нормалан.

▲ $S := \{(x,-x) \mid x \in \mathbb{R}\}$, $D := \mathbb{Q}^2$.



- $\overline{D} = \mathbb{R}^2$
- $\{M\} = \mathcal{U} \cap S \in \mathcal{T}_S$, па је заиста $\mathcal{T}_S = \mathcal{T}_d$.
- S је затворен.
- $|S| = \mathfrak{c} = 2^{|D|} = |\mathcal{P}(D)|$

$\Rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{S})^2$ није нормалан. ■

5. Нека је $f: X \to Y$ непрекидно, „на" и затворено.

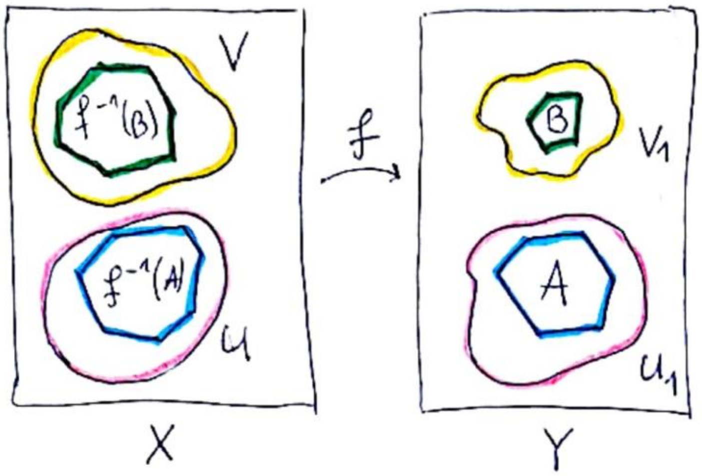
(а) Ако је X нормалан, онда је и Y нормалан;

(б) Ако је X T_4, онда је и Y T_4.

▲ (а) Нека су $A, B \in \mathcal{F}_Y \setminus \{\emptyset\}$, $A \cap B = \emptyset$.

Тада је $f^{-1}(A), f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_X \setminus \{\emptyset\}$ и $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$.

X је нормалан па постоје $U, V \in \mathcal{T}_X$ т.д. $U \cap V = \emptyset$ и $f^{-1}(A) \subseteq U$, $f^{-1}(B) \subseteq V$. Нека је:



$$U_1 := \big(\underbrace{f(U^c)}_{\text{затворено}}\big)^c \in \mathcal{T}_Y$$

$$V_1 := \big(\underbrace{f(V^c)}_{\text{затворено}}\big)^c \in \mathcal{T}_Y$$

Тада $U_1, V_1 \in \mathcal{T}_Y$ и $A \subseteq U_1$, $B \subseteq V_1$. Још да се уверимо да су дисјунктни.

$$U_1 \cap V_1 = \big(f(U^c)\big)^c \cap \big(f(V^c)\big)^c =$$

$$= \big(f(U^c) \cup f(V^c)\big)^c =$$

$$= \big(f(U^c \cup V^c)\big)^c =$$

$$= \big(f((U \cap V)^c)\big)^c =$$

$$= \big(f(\underbrace{\emptyset^c}_{X})\big)^c \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ је „на"}}}{=} Y^c = \emptyset.$$

Дакле, Y је нормалан.

(б) Још треба показати да ако је X T_1, онда је и Y T_1.

Y је $T_1 \Leftrightarrow (\forall y\in Y)\ \{y\}\in \mathcal{F}_Y$.

Нека је $y\in Y$. Како је f „на", то постоји $x\in X$ т.д. $f(x)=y$. Тада је $f(\{x\}) = \{y\} \in \mathcal{F}_Y$.

затворено

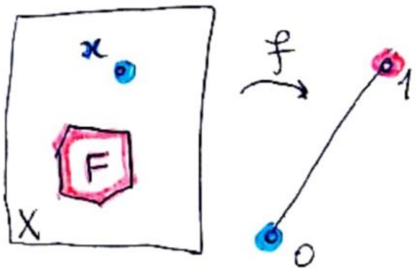
$\Rightarrow$ Y је T_1, па је и T_4.

Урисонова лема X је нормалан ако и само ако

$(\forall A,B\in \mathcal{F}_X\setminus\{\emptyset\})\ A\cap B=\emptyset \Rightarrow \exists$ непрекидно $f:X\to[0,1]$ т.д. $f(A)=\{0\}$, $f(B)=\{1\}$

Дефиниција Простор X је потпуно регуларан ако $(\forall x\in X)(\forall F\in\mathcal{F}_X\setminus\{\emptyset\})\ x\notin F \Rightarrow \exists$ непр. $f:X\to[0,1]$ т.д. $f(x)=0$, $f(F)=\{1\}$.

Дефиниција Простор X је $T_{3\frac{1}{2}}$ ако је T_1 и потпуно регуларан.



Приметимо: $T_4\Rightarrow T_{3\frac{1}{2}}\Rightarrow T_3$.

6. Ако је X $T_{3\frac{1}{2}}$, повезан и $|X|\geq 2$, онда је X непребројив.

▲ Нека су $x,y\in X$, $x\neq y$. Како је X T_1, то је $\{y\}\in\mathcal{F}_X$ па постоји непрекидно $f:X\to[0,1]$ т.д.

$f(x)=0$, $f(\{y\})=1$. Како је X повезан, то је и $f(X)$ повезан, па пошто $0,1 \in f(X)$, онда и $[0,1] \subseteq f(X)$. Дакле, $f(X)$ је непребројив, па је и X непребројив. ▨

Конвергенција низова

Дефиниција $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\forall U \in \mathcal{O}(x))(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})$
$$n > n_0 \Rightarrow x_n \in U.$$

Теорема Ако је X Хаусдорфов, гранична вредност низа је јединствена (уколико постоји).

1. Описати све конвергентне низове у:

(а) $(X, \mathcal{T}_d)$; (б) $(X, \mathcal{T}_a)$; (в) $(X, \mathcal{T}_{cc})$.

▲ (а) Ако је $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, онда специјално за $U := \{x\} \in \mathcal{O}(x)$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ т.д. за $n > n_0$ важи $x_n \in \{x\}$. Дакле, конвергентни низови су они који су константни почев од неког члана.

(б) Ако је $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, могуће је за U из деф. узети само $U := X$, па ће сваки низ бити конвергентан (и сваком низу је свака тачка из X гранична вр.)

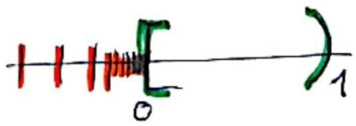
(б) Нека је $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ и $U := (X \setminus \{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}) \cup \{x\} \in \mathcal{T}_{cc}$.
Тада $U \in \mathcal{O}(x)$ па $(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N})\; n>n_0 \Rightarrow x_n \in U$,
а то је једино могуће за $x_n = x$.
Дакле, конвергентни низови су исти као у (а). ▨

2. Да ли у $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ конвергирају $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = -\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$?

▲ Ако су $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ две топологије на X и $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ и ако $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергира ка x у $\mathcal{T}_2$, онда он конвергира ка x и у $\mathcal{T}_1$.
Овде имамо $\mathcal{U} \subset \mathcal{S}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ у $\mathcal{U}$, па ако неки од ових низова конвергира у $\mathcal{S}$, то мора бити ка 0.

► $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$: Ако је $U\in\mathcal{O}(0)$ онда $(\exists\varepsilon>0)\,[0,\varepsilon)\subseteq U$, па је за $n_0 := \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$ и $n>n_0$ важи $a_n\in U$. Дакле,
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ у $\mathcal{S}$.

► $\left(-\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$: $[0,1)\in\mathcal{O}(0)$, али $[0,1)\cap\{-\frac{1}{n} \mid n\in\mathbb{N}\} = \emptyset$,
па овај низ не конвергира.



▨

Тополошки производ

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in X_i,\ i=1,\dots,n\}$$

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda = \Big\{ x : \Lambda \to \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \;\Big|\; (\forall \lambda\in\Lambda)\ \underbrace{x(\lambda)}_{x_\lambda} \in X_\lambda \Big\}$$

Специјално, $\prod_{\lambda\in\Lambda} X = \{x : \Lambda \to X\} =: X^{\Lambda}$.

$\boxed{\text{Став}}$ Ако су $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ и $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ две фамилије, онда

(а) $(\forall\lambda\in\Lambda)\ A_\lambda \subseteq B_\lambda \Rightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \subseteq \prod_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$;

(б) $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \subseteq \prod_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ и $(\forall\lambda\in\Lambda)\ A_\lambda \neq \emptyset \Rightarrow (\forall\lambda\in\Lambda)\ A_\lambda \subseteq B_\lambda$;

(в) $\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \cap \left(\prod_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right) = \prod_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda \cap B_\lambda)$;

(г) $\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \cup \left(\prod_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right) \subseteq \prod_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda \cup B_\lambda)$.

- $(\forall\lambda\in\Lambda)\ X_\lambda \neq \emptyset \Leftrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \neq \emptyset$.

Дефинишемо две топологије на производу.

Нека су $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$, $\lambda\in\Lambda$, тополошки простори.

$\boxed{1}$ $\mathcal{T}_{box}$ – „box" топологија

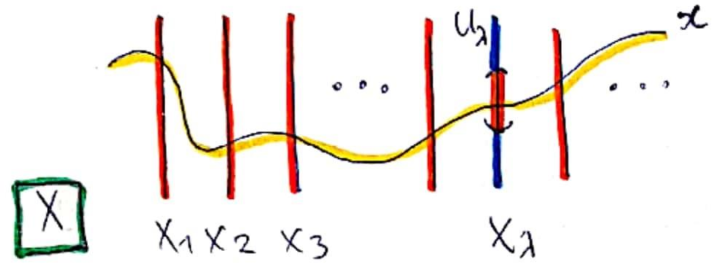
база: $\mathcal{B}_{box} = \left\{ \prod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \mid (\forall \lambda \in \Lambda)\ U_\lambda \in \mathcal{T}_\lambda \right\}$

$\boxed{2}$ $\mathcal{T}$ – Тихоновљева топологија

предбаза: $\mathcal{S} = \left\{ p_\lambda^{-1}(U_\lambda) \mid U_\lambda \in \mathcal{T}_\lambda,\ \lambda \in \Lambda \right\}$,

где су $p_\lambda : X \to X_\lambda$ пројекције ($p_\lambda(x) \overset{def}{=} x_\lambda$)

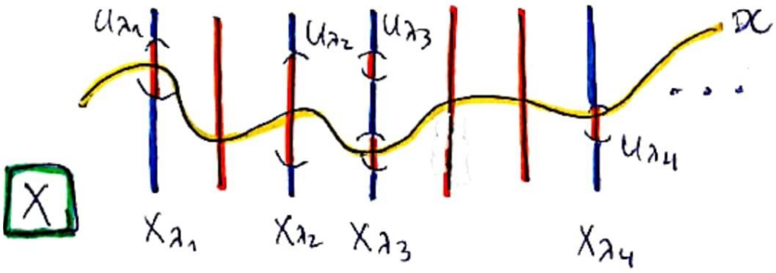
► Један елемент предбазе:



$x \in p_\lambda^{-1}(U_\lambda) \Leftrightarrow x_\lambda = p_\lambda(x) \in U_\lambda$

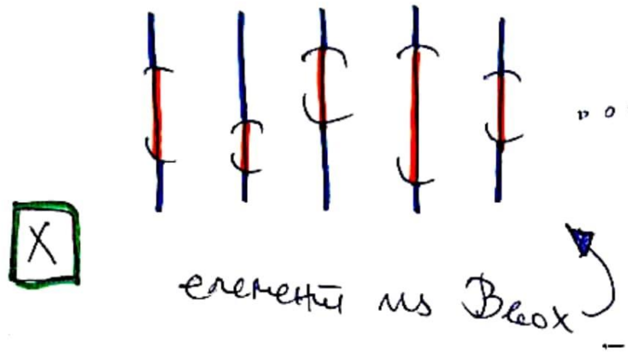
(остале координате су произвољне)

► Један елемент базе: $B = \bigcap_{i=1}^{n} p_{\lambda_i}^{-1}(U_{\lambda_i}),\ U_{\lambda_i} \in \mathcal{T}_{\lambda_i}$



(Задаје се куда пролази „пут")

► $\mathcal{T}_{box} \neq \mathcal{T}$, али увек је $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_{box}$.



у $\mathcal{T}$ дајемо само коначно много ограничења $U_{\lambda_1}, \dots U_{\lambda_n}$, а у $\mathcal{T}_{box}$ за свако $\lambda \in \Lambda$.

Ако је Λ коначан, онда је $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{box}$.

▶ Ако је $B = \prod_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda \in \mathcal{T}$, онда постоји коначан скуп $\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\} \subseteq \Lambda$ и $U_{\lambda_1},\dots,U_{\lambda_n}$ отворени т.д.

$$V_\lambda = \begin{cases} U_\lambda, & \lambda\in\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\} \\ X_\lambda, & \lambda\notin\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\} \end{cases}$$

Пример Нека је $X_\lambda = \{0,1\} =: X$, $\mathcal{T}_\lambda = \mathcal{T}_d$. Тада је $\prod_{n\in\mathbb{N}} X = X^{\mathbb{N}}$. Нека је $A = \{(0,0,\dots,0,\dots)\}$ – нула низ.
Онда $A \in \mathcal{T}_{box}$, али $A \notin \mathcal{T}$ (јер ниједан базни није у A).

Теорема Нека су $(X,\mathcal{T}_X)$ и $(Y_\lambda,\mathcal{T}_\lambda)$, $\lambda\in\Lambda$ тополошки простори и $\prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$ производ са топологијом Тихонова. Ако је $f: X \to \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$, онда

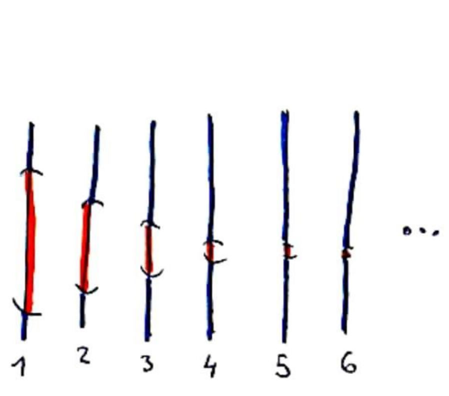
$$f \text{ је непрекидно} \iff (\forall \lambda\in\Lambda)\ p_\lambda\circ f \text{ је непрекидно.}$$

Пример Теорема не важи у box топологији.
Нека је $\Delta: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\Delta(x) := (x,x,x,\dots)$.

$p_n\circ\Delta = \mathbb{1}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ јесте непрекидно за свако $n\in\mathbb{N}$, али Δ није непрекидно у $\mathcal{T}_{box}$.

Нека је $B := \prod_{n\in\mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \in \mathcal{B}_{box} \subseteq \mathcal{T}_{box}$

$\Delta^{-1}(B) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\} \notin \mathcal{U}$



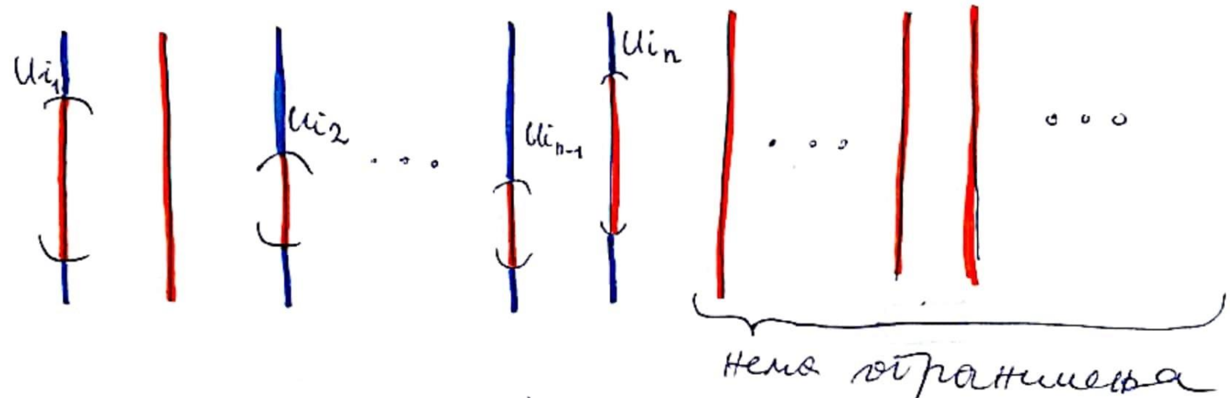
$\Rightarrow \Delta$ није непрекидно.

$\boxed{1.}$ Нека је $A = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0\}$.

(а) $\overline{A} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ у $\mathcal{T}$;

(б) Да ли то важи у $\mathcal{T}_{box}$?

▲ (а) Нека је $y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и $B = \bigcap\limits_{j=1}^{n} p_{i_j}^{-1}(U_{i_j})$, $U_{i_j} \in \mathcal{U}$, $1 \le j \le n$, неки базни скуп т.д. $y \in B$. Покажимо да је $A \cap B \neq \emptyset$.



„прођемо" кроз све U_{i_j} произвољно, а на даље само 0

Нека је $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ низ дати са

$$x_k = \begin{cases} x_k \in U_k, & \text{за } k \in \{i_1, \dots, i_n\} \\ 0, & \text{за } k \notin \{i_1, \dots, i_n\} \end{cases}$$

Тада је $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, па $x \in A$ и $x \in B \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$

$\Rightarrow y \in \overline{A}$. Дакле, $\overline{A} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(б) $U = (1,2)^{\mathbb{N}} \in \mathcal{T}_{box}$, али $U \cap A = \emptyset$, па је $\overline{A} \neq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (јер нпр. $x_n = \frac{3}{2}$, $n \in \mathbb{N}$ није у $\overline{A}$). ▨

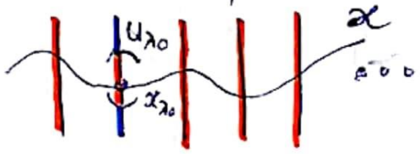
$\boxed{2.}$ Нека је дата фамилија тополошких простора $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ и $A_\lambda \subseteq X_\lambda$ за $\lambda\in\Lambda$.

(а) $\overline{\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda} = \prod\limits_{\lambda\in\Lambda}\overline{A_\lambda}$;

(б) $\operatorname{int}\Big(\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Big) \subseteq \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{int} A_\lambda$.

▲ (а) $\subseteq$: Нека је $x\in\overline{\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda}$. Показујемо $(\forall\lambda\in\Lambda)\, x_\lambda\in\overline{A_\lambda}$.

Нека је $\lambda_0\in\Lambda$, $U_{\lambda_0}\in\mathcal{T}_{\lambda_0}$ произвољн т.д. $x_{\lambda_0}\in U_{\lambda_0}$ и $U = p_{\lambda_0}^{-1}(U_{\lambda_0})$.



Како је U базни и $x\in U$, то по претпоставци $U\cap\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\neq\emptyset$, па постоји $y\in U\cap \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$.

$$\left.\begin{array}{l} y\in U \Rightarrow y_{\lambda_0}\in U_{\lambda_0} \\[2ex] y\in \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \Rightarrow y_{\lambda_0}\in A_{\lambda_0} \end{array}\right\} \Rightarrow y\in U_{\lambda_0}\cap A_{\lambda_0}$$

$\Rightarrow\ U_{\lambda_0}\cap A_{\lambda_0}\neq\emptyset \Rightarrow x_{\lambda_0}\in\overline{A_{\lambda_0}}$.

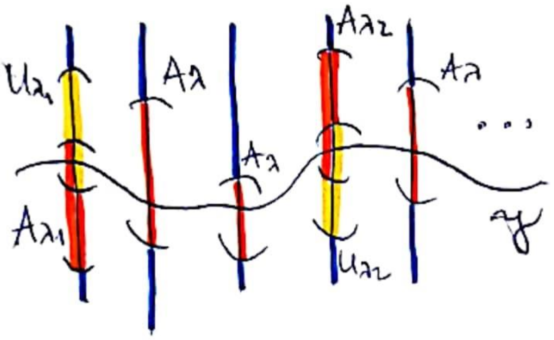
$\supseteq$: Нека је $x\in\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}\overline{A_\lambda}$ и нека је $B=\bigcap\limits_{i=1}^{n} p_{\lambda_i}^{-1}(U_{\lambda_i})$,

$U_{\lambda_i}\in\mathcal{T}_{\lambda_i}$, произвољни базни који садржи x.

Показујемо $B\cap\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\neq\emptyset$.

Како је $x_{\lambda_i} \in U_{\lambda_i}$, то $A_{\lambda_i} \cap U_{\lambda_i} \neq \emptyset$ (јер $x_{\lambda_i} \in \overline{A_{\lambda_i}}$), па постоји $y_{\lambda_i} \in A_{\lambda_i} \cap U_{\lambda_i}$.

За $\lambda \notin \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ одаберемо $y_\lambda \in A_\lambda$ произвољно.



$$\left.\begin{array}{l} y \in \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \\ y \in B \end{array}\right\} \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \cap B \neq \emptyset \Rightarrow x \in \overline{\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda}.$$

Специјално за $A_\lambda = \emptyset$ за неко λ, тврђење тривијално важи.

(б) Нека је $x \in \mathrm{int}\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)$. Тада постоји базни

$$B = \bigcap_{i=1}^{n} p_{\lambda_i}^{-1}(U_{\lambda_i}),\ U_{\lambda_i} \in \mathcal{T}_{\lambda_i} \text{ т.д. } x \in B \subseteq \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda, \text{ тј.}$$

$$B = \prod_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda, \text{ где је } B_\lambda = \begin{cases} U_\lambda, & \lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \\ X_\lambda, & \lambda \notin \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \end{cases}$$

Одавде $x_\lambda \in B_\lambda$, за свако $\lambda \in \Lambda$, па је $B_\lambda \subseteq A_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$ (на основу дела (б) из става на стр. 84.)

1° $\lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$: $x_{\lambda_i} \in U_{\lambda_i} \subseteq A_{\lambda_i} \Rightarrow x_{\lambda_i} \in \mathrm{int}\, A_{\lambda_i}$

2° $\lambda \notin \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$: $A_\lambda = X_\lambda \Rightarrow x_\lambda \in \mathrm{int}\, A_\lambda = X_\lambda$.

Дакле, $\mathrm{int}\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \subseteq \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{int}\, A_\lambda$. ▨

Када би било $A_\lambda \neq X_\lambda$ за бесконачно много λ, онда $\mathrm{int}\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) = \emptyset$, иначе $\mathrm{int}\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) = \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{int}\, A_\lambda$.

3. Нека су X и Y тополошки простори и $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$. Тада $\partial(A \times B) = (\overline{A} \times \partial B) \cup (\partial A \times \overline{B})$.

▲ $\partial(A \times B) = \overline{A \times B} \cap \overline{(A \times B)^c} \overset{(*)}{=}$

$$= \overline{A} \times \overline{B} \cap \left(\overline{A^c \times Y \cup X \times B^c} \right) =$$

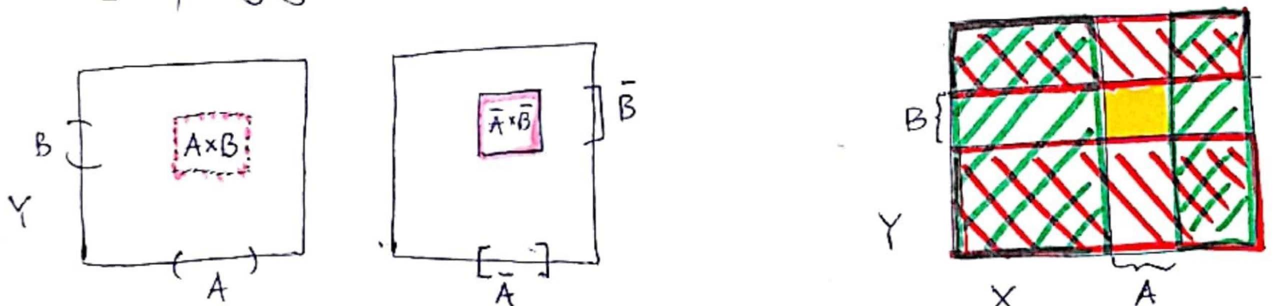
$$= \overline{A} \times \overline{B} \cap \left(\overline{A^c \times Y} \cup \overline{X \times B^c} \right) =$$

$$= \overline{A} \times \overline{B} \cap \left(\overline{A^c} \times Y \cup X \times \overline{B^c} \right) =$$

$$= \left(\overline{A} \times \overline{B} \cap \overline{A^c} \times Y \right) \cup \left(\overline{A} \times \overline{B} \cap X \times \overline{B^c} \right) =$$

$$= \partial A \times \overline{B} \cup \overline{A} \times \partial B. \ \blacksquare$$

Илустрација корака $(*)$:

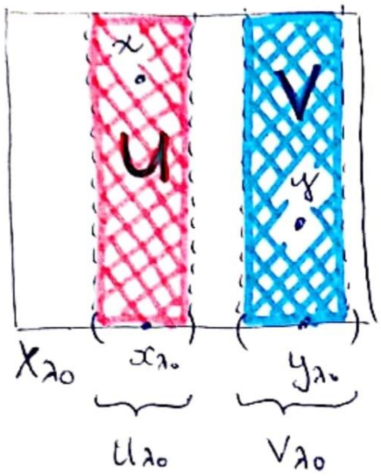


$\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$ $\qquad$ $(A \times B)^c = \underbrace{A^c \times Y}_{} \cup \underbrace{X \times B^c}_{}$

4. $T_{3\frac{1}{2}}$ је продуктивно својство (тј. $X_\lambda \ T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow \prod X_\lambda \ T_{3\frac{1}{2}}$).

▲ Нека су X_λ, $\lambda \in \Lambda$, $T_{3\frac{1}{2}}$ простори.

$\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ је T_1: Нека су $x, y \in \prod\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$, $x \neq y$. Тада постоји $\lambda_0 \in \Lambda$ т.д. $x_{\lambda_0} \neq y_{\lambda_0}$, па како је X_{λ_0} T_1, то постоје $U_{\lambda_0}, V_{\lambda_0} \in \mathcal{T}_{\lambda_0}$ т.д. $x_{\lambda_0} \in U_{\lambda_0} \setminus V_{\lambda_0}$ и $y_{\lambda_0} \in V_{\lambda_0} \setminus U_{\lambda_0}$.



Узмимо $U := p_{\lambda_0}^{-1}(U_{\lambda_0}) \in \mathcal{T}$ и $V := p_{\lambda_0}^{-1}(V_{\lambda_0}) \in \mathcal{T}$. Тада је $x \in U \setminus V$, $y \in V \setminus U$, па је $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ T_1.

$\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ је потпуно регуларан:

Нека је $\tilde{x} \in \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ и $F \neq \emptyset$ затворен у $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ т.д. $\tilde{x} \notin F$.

Тражимо непрекидну функцију т.д. $f(\tilde{x}) = 1$, $f(F) = \{0\}$.

Како $\tilde{x} \in F^c \in \mathcal{T}$, то постоји базни $B = \bigcap_{i=1}^{n} p_{\lambda_i}^{-1}(U_{\lambda_i})$, $U_{\lambda_i} \in \mathcal{T}_{\lambda_i}$, т.д. $\tilde{x} \in B \subseteq F^c$. Сви X_{λ_i} су потпуно регуларни, па постоје функције $f_i : X_{\lambda_i} \longrightarrow [0,1]$ т.д. $f_i(\tilde{x}_{\lambda_i}) = 1$, $f_i(U_{\lambda_i}^c) = \{0\}$.

Нека је $f : \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \to [0,1]$ дата са $f(x) := \prod_{i=1}^{n} f_i(p_{\lambda_i}(x))$.

▷ f је непрекидна;

▷ $f(\tilde{x}) = \prod_{i=1}^{n} f_i(\tilde{x}_{\lambda_i}) = 1$;

▷ $x \in F$, да ли је $f(x) = 0$?

$F \subseteq B^c \Rightarrow (\exists j \in \{1, \dots, n\})\ x_{\lambda_j} \notin U_{\lambda_j} \Rightarrow$

$\Rightarrow f_j(x_{\lambda_j}) = 0 \Rightarrow f(x) = 0.$

Дакле $f(F) = \{0\}$.

Коначно, $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ је потпуно регуларан. ∎

Компактност

Дефиниција Тополошки простор $(X, \mathcal{T})$ је компактан ако сваки отворен покривач од X има коначан потпокривач.

Дефиниција $A \subseteq X$ је компактан ако је $(A, \mathcal{T}_A)$ компактан. $\mathcal{K}_X \overset{\text{df}}{=} \{A \subseteq X \mid A \text{ компактан}\}$

Дефиниција фамилија $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ има својство коначног пресека ако свака коначна подфамилија има непразан пресек.

Став X је компактан ако и само ако свака фамилија $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \mathcal{F}_X$ која има својство коначног пресека има непразан пресек.

▲ $\Rightarrow$: Нека $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \mathcal{F}_X$ има с.к.п.

тдс. $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \emptyset \quad /^c$

$$\Rightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c = X \text{ - отворен покривач од } X$$

$\Rightarrow$ постоји коначан потпокривач:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_{\lambda_i}^c = X \quad /^c$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_{\lambda_i} = \phi \quad ↯$$

$\Leftarrow$: пос. X није компактан, па постоји отворен покривач $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ који нема коначан покривач. Тада $\phi = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda^c$, па $\{U_\lambda^c\}_{\lambda\in\Lambda}$ нема с.к.п. одакле постоје $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ т.д. $\bigcap_{i=1}^{n} U_{\lambda_i}^c = \phi$, тј. $\bigcup_{i=1}^{n} U_{\lambda_i} = X$ ↯ ■

Последица Ако је X компактан и $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ опадајућа фамилија непразних и затворених скупова ($F_{n+1} \subseteq F_n$, $n \in \mathbb{N}$), онда је $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \phi$.

Став $f: X \to Y$ непрекидно и X компактан, онда је и $f(X)$ компактан.

Став Ако је X компактан, онда $\mathcal{F}_X \subseteq \mathcal{K}_X$.

Став Ако је X Хаусдорфов, онда $\mathcal{K}_X \subseteq \mathcal{F}_X$.

Последица X компактан и $T_2 \Rightarrow \mathcal{K}_X = \mathcal{F}_X$.

$\boxed{1.}$ Испитати компактност простора:

(а) $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$; (б) $([0,1], \mathcal{S}_{[0,1]})$; (в) $(X, \mathcal{T}_d)$; (г) $(X, \mathcal{T}_{cf})$.

▲ (а) $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} [k, k+1)$ – отворен покривач који нема коначан потпокривач $\Rightarrow$ није компактан.

(б) $[0,1] = \bigcup\limits_{n=2}^{\infty} [0, 1-\frac{1}{n}) \cup \{1\}$ – нема коначан потпокривач

$\{1\} = [0,1] \cap [1,2) \in \mathcal{S}_{[0,1]}$

$\Rightarrow$ није компактан.

(в) $X = \bigcup\limits_{x\in X} \{x\}$ – има коначан потпокривач само ако је X коначан.

Дакле, $(X,\mathcal{T}_d)$ је компактан акко је коначан.

(г) Нека је $X = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$, U_λ^c – коначни.

Нека је $\lambda_0 \in \Lambda$ фиксирано и $U_{\lambda_0}^c = \{x_1, \dots, x_k\}$.

Тада постоје $U_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_k}$ т.д. $x_i \in U_{\lambda_i}$.

Одавде је $X = \bigcup\limits_{i=0}^{k} U_{\lambda_i}$, па је X компактан. ■

Дефиниција X је псеудокомпактан ако је свако непрекидно пресликавање $f: X \to \mathbb{R}$ ограничено.

Дефиниција X је пребројиво компактан ако

Сваки отворен пребројив покривач има коначан потпокривач.

Компактност $\Rightarrow$ пребројива компактност $\Rightarrow$ псеудокомп.

$\boxed{2.}$ (а) Ако је X пребројиво компактан, онда је псеудокомпактан;

(б) $A \subseteq \mathbb{R}^n$ је компактан акко је псеудокомпактан.

(а) Нека је $f : X \to \mathbb{R}$ непрекидна.

Тада је $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{f^{-1}((-n,n))}_{\in \mathcal{T}_X}$, па постоји коначан потпокривач $X = \bigcup_{i=1}^{k} f^{-1}((-n_i, n_i))$. Нека је $N = \max\{n_1, \dots, n_k\}$. Онда је $|f(x)| < N$ за свако $x \in X$, тј. f је ограничена.

(б) $\Rightarrow$: A је компактан $\Rightarrow$ $f(A) \subseteq \mathbb{R}$ је компактан

$\Leftrightarrow$ $f(A)$ је затворен и ограничен

$\Leftarrow$: Нека је A псеудокомпактан и нека је $f : A \to \mathbb{R}$ дато са $f(a) = \|a\|$. f је непрекидно, па је ограничено, одакле је A ограничен. Такође, A је затворен.

тј. $A \neq \bar{A}$ и нека је $a \in \bar{A} \setminus A$ и $f: A \to \mathbb{R}$

дато са $f(x) := \dfrac{1}{\|x-a\|}$.

f није ограничено јер пошто $a \in \bar{A}$, то постоји

низ $(a_n) \subseteq A$ т.д. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, тј. $\lim\limits_{n\to\infty} \|a_n - a\| = 0$.

Ово је у контрадикцији са претпоставком да је X псеудокомпактан (јер би f било ограничено).

Дакле A је затворен.

Коначно, A је ограничен и затворен у $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ A је компактан. ∎

Ако је X T_2, онда:

(1) $(\forall x_0 \in X)(\forall K \in \mathcal{K}_X \setminus \{\emptyset\})\ x_0 \notin K$

$$\Rightarrow (\exists U, V \in \mathcal{T}_X)\ x_0 \in U,\ K \subseteq V,\ U \cap V = \emptyset;$$

(2) $(\forall K, L \in \mathcal{K}_X \setminus \{\emptyset\})\ K \cap L = \emptyset$

$$\Rightarrow (\exists U, V \in \mathcal{T}_X)\ K \subseteq U,\ L \subseteq V,\ U \cap V = \emptyset;$$

(3) Ако је X додатно компактан, онда је T_4.

Ако су $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ две топологије на X и $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$, онда $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ и $\mathcal{K}_1 \supseteq \mathcal{K}_2$.

$\boxed{3.}$ Нека је $(X,\mathcal{T})$ компактан и T_2 и $\mathcal{T}_1 \subsetneq \mathcal{T} \subsetneq \mathcal{T}_2$.

(а) $(X,\mathcal{T}_1)$ није T_2;

(б) $(X,\mathcal{T}_2)$ није компактан.

▲ (а) $(X,\mathcal{T})$ је компактан и T_2, па је $\mathcal{K} = \mathcal{F}$.

Такође $\mathcal{T}_1 \subsetneq \mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{F}_1 \subsetneq \mathcal{F}$.

Пп. да $(X,\mathcal{T}_1)$ јесте T_2. Онда је $\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{F}_1$, одакле

$$\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{F}_1 \subsetneq \mathcal{F} = \mathcal{K} \Rightarrow \mathcal{K}_1 \subsetneq \mathcal{K},$$

али из $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}$ следи $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}_1$ ↯

(б) Имамо $\mathcal{T} \subsetneq \mathcal{T}_2 \Rightarrow \mathcal{F} \subsetneq \mathcal{F}_2$, $\mathcal{K}_2 \subset \mathcal{K}$.

Пп. $(X,\mathcal{T}_2)$ је компактан. Онда је $\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{K}_2$, па

$$\mathcal{K} = \mathcal{F} \subsetneq \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{K}_2 \Rightarrow \mathcal{K} \subsetneq \mathcal{K}_2 \text{ ↯ } \blacksquare$$

$\boxed{4.}$ Ако је $f: X \to Y$ непрекидно, X компактан, Y T_2, онда је f затворено.

▲ $F \in \mathcal{F}_X \xrightarrow{X \text{ компактан}} F \in \mathcal{K}_X \xrightarrow{f \text{ непр.}} f(F) \in \mathcal{K}_Y$

$\xrightarrow{Y\, T_2} f(F) \in \mathcal{F}_Y$ ■

Последица Ако је $f: X \to Y$ непрекидна бијекција, X компактан, Y T_2, онда је f хомеоморфизам.

▲ Став на стр. 42 + претходни задатак. ■

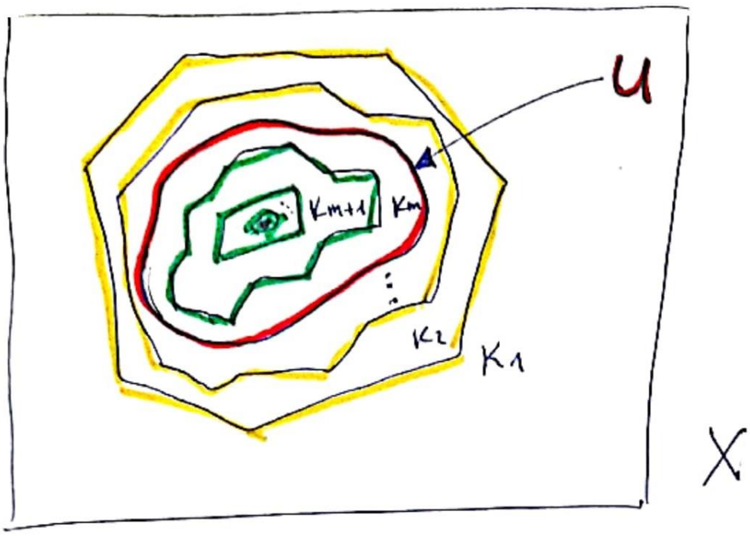
5. Ако је X Хаусдорфов, $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{K}_X \setminus \{\emptyset\}$ опадајућа фамилија, онда је $K := \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} K_n$ непразан, затворен и компактан.

▲ Како је $K_n \in \mathcal{K}_X$ и X T_2, то је $K_n \in \mathcal{F}_X$, за свако $n \in \mathbb{N}$. Даље, $K_n \subseteq K_1$, за $n \in \mathbb{N}$, па $K_n \in \mathcal{F}_{K_1}$ и K_1 је компактан па је $K = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$ (последица 1 на стр. 93).

Како су сви K_n, $n \in \mathbb{N}$, затворени, то је и $K \in \mathcal{F}_X$.

Коначно, $\underbrace{K}_{\text{затворен}} \subseteq \underbrace{K_1}_{\text{компактан}}$, па је и K компактан. ■

Лема Нека је $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ опадајућа фамилија компактних скупова у X. Тада за сваки $U \in \mathcal{T}_X$ т.д. $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} K_n \subseteq U$ важи: $(\exists m \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq m \Rightarrow K_n \subseteq U$.



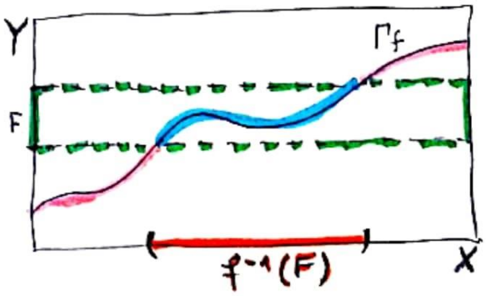
$\boxed{\text{Став}}$ Нека је $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ опадајућа фамилија повезаних компактних и непразних скупова у X и X је T_2. Онда је $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n$ компактан и повезан.

$\boxed{\text{Теорема}}$ Ако је Y компактан, онда је $p_X : X\times Y \to X$ затворено.

$\boxed{\text{Теорема}}$ X_1 и X_2 су компактни акко је $X_1\times X_2$ компактан.

$\boxed{6.}$ Нека је $f: X\to Y$, Y компактан и T_2.

f је непрекидно $\iff \Gamma_f \in \mathcal{F}_{X\times Y}$.



$\Rightarrow$: важи јер је Y T_2.

$\Leftarrow$: Нека је $F\in\mathcal{F}_Y$

$$f^{-1}(F) = \underbrace{p_X}_{\text{затворено}}\Big(\underbrace{(\underbrace{X\times F}_{\text{затворен}})\cap \underbrace{\Gamma_f}_{\text{затворен}}}_{\in\mathcal{F}_{X\times Y}}\Big) \in \mathcal{F}_X \implies f \text{ је непрекидно.}$$

$\boxed{7.}$ Нека је $f: X \to Y$ затворено, „на" и
$$(\forall y \in Y)\ f^{-1}(\{y\}) \in \mathcal{K}_X.$$

(а) Ако је X T_2, онда је Y T_2;

(б) Ако је $K \in \mathcal{K}_Y$, онда је $f^{-1}(K) \in \mathcal{K}_X$.

▲ (а) Нека су $y_1, y_2 \in Y$, $y_1 \neq y_2$. Тада $f^{-1}(\{y_1\}), f^{-1}(\{y_2\}) \in \mathcal{K}_X \setminus \{\emptyset\}$ и дисјунктни су, па постоје $U_1, V_1 \in \mathcal{T}_X$ т.д. $f^{-1}(\{y_1\}) \subseteq U_1$ и $f^{-1}(\{y_2\}) \subseteq V_1$. Нека је $U := \left(f(U_1^c)\right)^c$ и $V := \left(f(V_1^c)\right)^c$. То ће бити тражене околине од y_1 и y_2.

(б) Нека је $K \in \mathcal{K}_Y$ и $f^{-1}(K) \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, $U_\alpha \in \mathcal{T}_X$.

Ако је $y \in K$ произвољно, онда $f^{-1}(\{y\}) \in \mathcal{K}_X$ и $f^{-1}(\{y\}) \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, па постоји коначан потпокривач
$$f^{-1}(\{y\}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_y} U_{\alpha_i}^{(y)} =: U(y)$$

Приметимо:
$$K \subseteq \bigcup_{y \in K} \underbrace{\Big(\underbrace{f\big(\underbrace{U(y)^c}_{\text{затворено}}\big)}_{\text{затворено}}\Big)^c}_{\text{отворено}}$$

(јер $y \in f(U(y)^c)^c$), па постоје $y_1, \dots, y_m$ т.д.
$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} f(U(y_i)^c)^c. \quad / f^{-1}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(K) \subseteq f^{-1}\Big(\bigcup_{i=1}^{m} f(U(y_i)^c)^c \Big) = \bigcup_{i=1}^{m} \underbrace{f^{-1}(f(U(y_i)^c)^c)}_{\dots \subseteq U(y_i)} \subseteq$$

$$\subseteq \bigcup_{i=1}^{m} U(y_i) \Rightarrow f^{-1}(K) \subseteq \underbrace{\bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n_{y_i}} U_{\alpha_j}^{(y_i)}}_{\text{коначна подфамилија.}} \Rightarrow f^{-1}(K) \in \mathcal{K}_X. \blacksquare$$

Локална компактност

Дефиниција Тополошки простор X је локално компактан ако $(\forall x \in X)(\forall G \in \mathcal{O}(x))(\exists H \in \mathcal{O}(x))\ H \subseteq G \wedge H \in \mathcal{K}_X$.

- Ако је X T_2, онда:
  X је локално компактан $\Leftrightarrow (\forall x \in X)(\exists N \in \mathcal{O}(x))\ \overline{N} \in \mathcal{K}_X$.
- Ако је X компактан и T_2, онда је локално компактан.

1. Испитати локалну компактност простора:
(а) $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$; (б) $(X, \mathcal{T}_d)$; (в) $(X, \mathcal{T}_a)$; (г) $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$.

(а) $\mathbb{R}$ је T_2 и за $x \in \mathbb{R}$ је $\underbrace{\overline{(x-\varepsilon, x+\varepsilon)}}_{\overline{N}} \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}}$, па јесте лок. компактан.

(б) За $x \in X$ и $G \in \mathcal{O}(x)$ узмемо $H := \{x\} \in \mathcal{K}_X \Rightarrow$ јесте лок. комп.

(в) $G \in \mathcal{O}(x) \Rightarrow G = X$, па узмемо $H := X \Rightarrow$ јесте лок. комп.

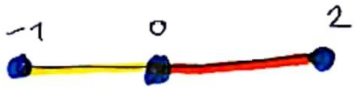
(г) За $x \in \mathbb{R}$ и $G = (-\infty, a) \in \mathcal{O}(x)$ узмемо $H := \left(-\infty, \frac{x+a}{2}\right]$.
Тврдимо H је компактан. Нека је $H \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (-\infty, a_\lambda)$
$\Rightarrow (\exists \lambda_0 \in \Lambda)\ H \subseteq (-\infty, a_{\lambda_0}) \Rightarrow H$ је компактан.

Дакле, $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$ је локално компактан. $\blacksquare$

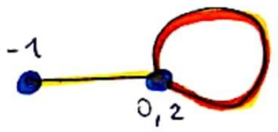
Компактификација

Желимо да од некомпактног направимо компактан простор додавањем тачака. То се може урадити на више начина.

$\boxed{\text{Пример}}$ $X = (-1,0) \cup (0,2)$

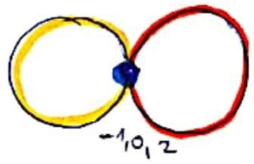
- додато 3 тачке: $[-1,2]$ 

- додато 2 тачке: 

или 

нису хомеоморфни

- додато 1 тачку:



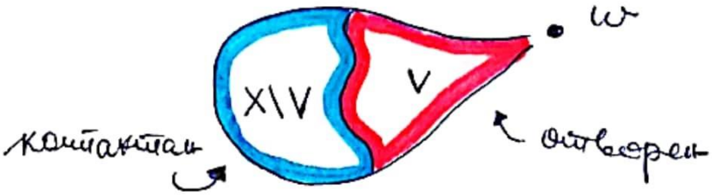
← јединствен простор (до на хомеоморфизам)

Александровљева компактификација (једном тачком)

Нека је $(X, \mathcal{T})$ тополошки простор. Правимо компактан простор $(X^*, \mathcal{T}^*)$.

$$X^* \overset{\text{def}}{=} X \cup \{\omega\} \quad (\omega \text{ – „бесконачно далека тачка"})$$

$$\mathcal{T}^* \overset{\text{def}}{=} \mathcal{T} \cup \{ V \cup \{\omega\} \mid V \in \mathcal{T},\ X \setminus V \in \mathcal{K}_X \}$$



Особине:

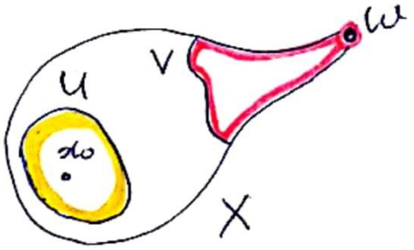
- $(X^*, \mathcal{T}^*)$ је компактан;
- $(X, \mathcal{T}^*_X) = (X, \mathcal{T})$;

  наслеђена топологија
- $(X, \mathcal{T})$ је отворен потпростор од $(X^*, \mathcal{T}^*)$.

$\boxed{\text{Став}}$ X^* је T_2 ако и само ако је X T_2 и локално компактан.

▲ $\Rightarrow$: T_2 је наследно својство па је X T_2. Још да се уверимо да је локално компактан. Како је X T_2, то: X је локално компактан $\overset{★}{\Longleftrightarrow} (\forall x \in X)(\exists U \in \mathcal{O}(x))\ \overline{U} \in \mathcal{K}_X$

Нека је $x_0 \in X$ произвољно. Како је X^* T_2 и $x_0 \neq \omega$, то постоје $U, V \in \mathcal{T}^*$ т.д. $x_0 \in U$, $\omega \in V$, $U \cap V = \emptyset$.



$\Rightarrow \quad U \subseteq X^* \setminus V \in \mathcal{K}_X$.

Нека је $V = V' \cup \{\omega\}$, $V' \in \mathcal{T}$ и $X \setminus V' \in \mathcal{K}_X$ (важи $X \setminus V' = X^* \setminus V$).

Тада је $U \subseteq X \setminus V' \in \mathcal{F}_X$, па $\overline{U} \subseteq X \setminus V' \in \mathcal{K}_X$, тј. $\overline{U}$ је затворен подскуп компакта, па је и он компактан. На основу ★ закључујемо да је X локално компактан.

$\Leftarrow$: Нека су $x, y \in X^*$, $x \neq y$. Желимо да их „раздвојимо".

$\boxed{1^\circ}$ $x, y \in X^* \setminus \{\omega\} \xRightarrow{X \text{ је } T_2}$ постоје $U, V \in \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}^*$

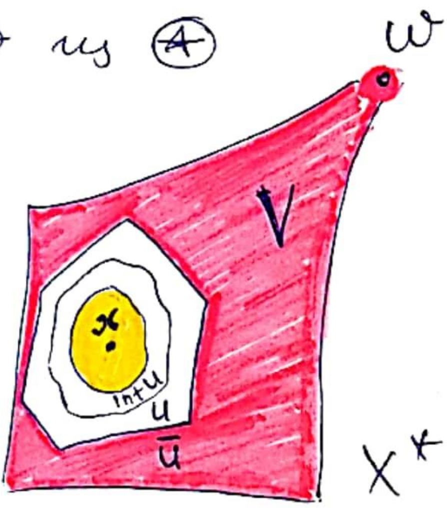
$x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \emptyset$

$\boxed{2^\circ}$ $x \in X$, $y = \omega$

Како је X локално компактан то из (4)

$(\exists U \in \mathcal{O}(x))\ \overline{U} \in \mathcal{K}_x$.

Нека је $V := (\underbrace{X \setminus \overline{U}}_{\in \mathcal{T}}) \cup \{\omega\} \in \mathcal{T}^*$



Тада $x \in \operatorname{int} U$, $\omega \in V$, $(\operatorname{int} U) \cap V = \emptyset$.

Дакле, X^* је T_2. ■

$\boxed{1.}$ Ако је X локално компактан и T_2, онда је $T_{3\frac{1}{2}}$.

▲ X локално компактан и T_2

$\Rightarrow X^*$ је T_2 и компактан

$\Rightarrow X^*$ је T_4 ← није наследно

$\Rightarrow X^*$ је $T_{3\frac{1}{2}}$ ← наследно

$\Rightarrow X$ је $T_{3\frac{1}{2}}$ ■

Ако су $(X, \mathcal{T}_X)$ и $(Y, \mathcal{T}_Y)$ тополошки простори и $f : X \to Y$, оно индукује $f^* : X^* \to Y^*$ са

$$f^*(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} f(x), & x \in X \\ \omega_Y, & x = \omega_X \end{cases}$$

Ако је f непрекидно, f^* <u>не</u> мора бити непрекидно!

Дефиниција Пресликавање f је својствено ако је непрекидно и ако $(\forall K \in \mathcal{K}_Y)\ f^{-1}(K) \in \mathcal{K}_X$.

2. (а) f својствено $\Rightarrow$ f^* непрекидно;

(б) f^* непрекидно и Y T_2 $\Rightarrow$ f својствено.

▲ (а) Приметимо да за $B \subseteq Y$ важи:

$$(f^*)^{-1}(B) = f^{-1}(B),$$

$$(f^*)^{-1}(B \cup \{\omega_Y\}) = f^{-1}(B) \cup \{\omega_X\}.$$

Нека је $U \in \mathcal{T}_Y^*$.

1° $\underline{\omega_Y \notin U}$ $\Rightarrow$ $(f^*)^{-1}(U) = f^{-1}(\underset{\mathcal{T}_Y}{\underset{\cap}{U}}) \in \mathcal{T}_X \subseteq \mathcal{T}_X^*$

2° $\underline{\omega_Y \in U}$ $\Rightarrow$ $U = V \cup \{\omega_Y\}$, $V \in \mathcal{T}_Y$, $Y \setminus V \in \mathcal{K}_Y$

$$(f^*)^{-1}(U) = \underbrace{f^{-1}(V)}_{\in \mathcal{T}_X} \cup \{\omega_X\}$$

Још да ли је $X \setminus f^{-1}(V) \in \mathcal{K}_X$?

$X \setminus f^{-1}(V) = f^{-1}(\underbrace{Y \setminus V}_{\in \mathcal{K}_Y}) \in \mathcal{K}_X$ јер је f својствено.

$\Rightarrow (f^*)^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X^*$.

Дакле, f^* је непрекидно.

(б) $f^* : X^* \to Y^*$ је непрекидно, па је и $f = f^*|_X$ непр.

Нека је $K \in \mathcal{K}_Y$. Покажимо $f^{-1}(K) \in \mathcal{K}_X$.

Како је Y T_2, то је $K \in \mathcal{F}_Y$, па је $Y \setminus K \in \mathcal{T}_Y$ и

одатле је $(Y \setminus K) \cup \{\omega_Y\} \in \mathcal{T}_Y^*$.

$\Rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{непрекидно}}}{(f^*)^{-1}}\left((Y \setminus K) \cup \{\omega_Y\}\right) = f^{-1}(Y \setminus K) \cup \{\omega_X\} \in \mathcal{T}_X^*$

$\Rightarrow X \setminus f^{-1}(Y \setminus K) \in \mathcal{K}_X$, али

$X \setminus f^{-1}(Y \setminus K) = \left(f^{-1}(K^c)\right)^c = f^{-1}\left((K^c)^c\right) = f^{-1}(K)$.

Дакле, $f^{-1}(K) \in \mathcal{K}_X$, па је f својствено. ■

Теорема $X \approx Y \Rightarrow X^* \approx Y^*$

▲ $h : X \to Y$ хомеоморфизам $\Rightarrow h$ је бијекција

$\Rightarrow h^*$ је бијекција

Како је h хомеоморфизам, то су h и h^{-1} својствена, па су h^* и $(h^{-1})^*$ непрекидна и међусобно инверзна. Дакле, h^* је хомеоморфизам. ■

3. Ако је X компактан и T_2, онда за $x_0 \in X$ је

$$\left(X \setminus \{x_0\} \right)^* \approx X .$$

▲ Нека је $X_0 := X \setminus \{x_0\}$. Дефинишимо $f : X_0^* \to X$

са $f(x) := \begin{cases} x, & x \neq \omega \\ x_0, & x = \omega \end{cases}$

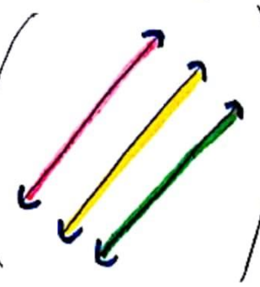
- f је бијекција
- f је непрекидно (слично као у 2. зад.)
- $f : \underset{\text{компакт}}{X_0^*} \to \underset{T_2}{X}$ па је затворено

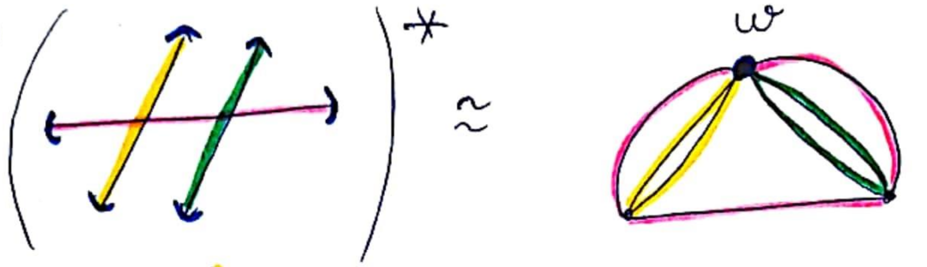
$\Bigg\}$ f је хомеоморфизам. ■

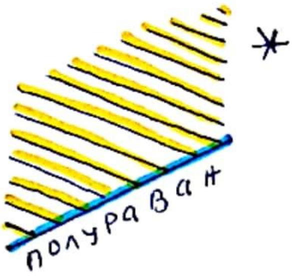
4. Наћи компактификације једном тачком следећих простора:

(а) $(\mathbb{R}^n)^* \approx (S^n \setminus \{*\})^* \approx S^n$

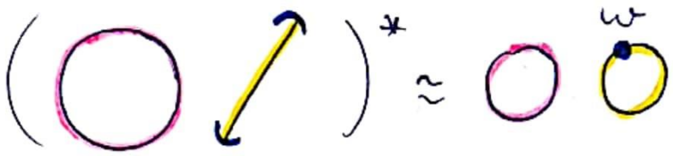
(б) три отворене дужи

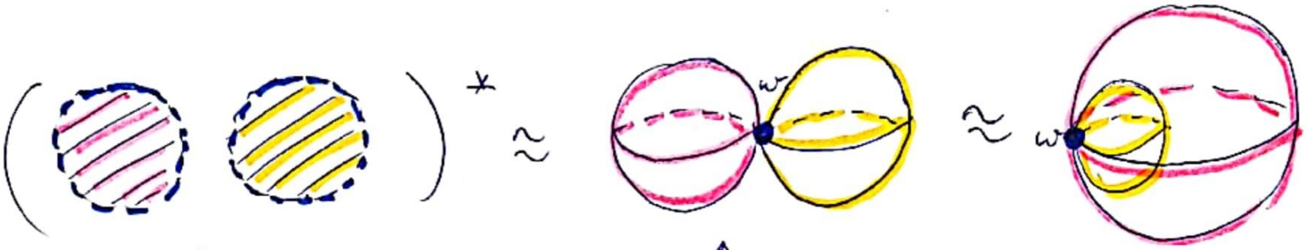
$\Big($  $\Big)^* \approx$ 

(в) 

(г) 

$\approx (D^2 \setminus K)^* \approx D^2 \approx$ 

(д) 

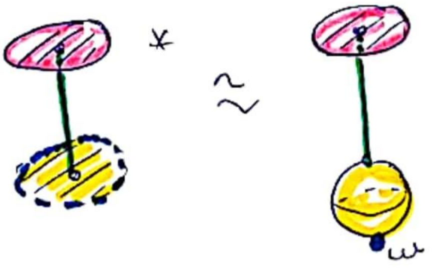
(ђ) 

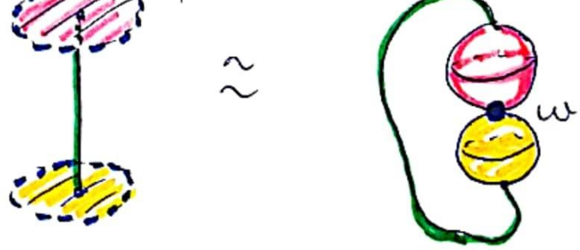
отворени
дискови

приметимо да полазни простори нису хомеоморфни иако компактификације јесу.

(е) 

$\approx$ 

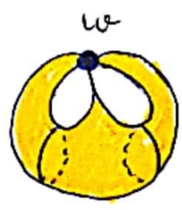
(ж) 

(з) 

(и) 

бесконачан
цилиндар

уштинута
сфера

(ј) $\left(S^2 \setminus \{A, B, C\}\right)^* \approx$ 

различите
на S^2

Линделефовост, сепарабилност, I и II аксиома пребројивости

Нека је $(X, \mathcal{T})$ тополошки простор.

Дефиниција X је Линделефов ако сваки отворен покривач од X има пребројив потпокривач.

Став X је Линделефов акко свака фамилија $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}_X$ са својством пребројивог пресека има непразан пресек.

Дефиниција X је сепарабилан постоји $D \subseteq X$ који је пребројив и свуда густ у X (тј. $\overline{D} = X$).

Дефиниција X задовољава I аксиому пребројивости ако за свако $x \in X$ постоји пребројива локална база $\mathcal{B}_x$.

$\left(\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{T}_x \text{ т.д. } (\forall U \in \mathcal{T}_x)\, x \in U \Rightarrow (\exists B \in \mathcal{B}_x)\, x \in B \subseteq U \right)$

Дефиниција X задовољава II аксиому пребројивости ако има пребројиву базу.

$$\boxed{\begin{array}{ll} & \mathrm{I} \\ & \nearrow \\ \mathrm{II} & \Longrightarrow \text{сепарабилност} \\ & \searrow \\ & \text{Линделефовост} \end{array}}$$

(нигде не важи еквиваленција, видећемо то код $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$)

$\boxed{\mathrm{II} \Rightarrow \mathrm{I}}$ тривијално.

$\boxed{\mathrm{II} \Rightarrow \text{сепарабилност}}$ Нека је $\mathcal{B}$ пребројива база од X, тј. $\mathcal{B} = \{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ и нека је $x_n \in B_n$, $n \in \mathbb{N}$, произвољно. Узмимо $D := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Тада је D пребројив и $\overline{D} = X$, па је X сепарабилан.

$\boxed{\mathrm{II} \Rightarrow \text{Линделефов}}$ Нека је $\mathcal{B}$ пребројива база од X. и $X = \bigcup\limits_{U \in \mathcal{U}} U$, $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ – отворен покривач.

За $x \in X$ постоји $U_x \in \mathcal{U}$ т.д. $x \in U_x$, па постоји и $B_x \in \mathcal{B}$ т.д. $x \in B_x \subseteq U_x$. Имамо

$$X = \bigcup_{x \in X} B_x \underset{\substack{\uparrow \\ \text{база је} \\ \text{пребројива}}}{=} \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{x_i} \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_{x_i} \text{ – пребројив потпокривач}$$

$\boxed{\text{Пример}}$ $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ је Линделефов, сепарабилан, задовољава I аксиому, али <u>не</u> задовољава II аксиому.

$\boxed{\mathrm{I}}$ за $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{B}_x = \{[x, x+\frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ је пребројива локална база.

$\boxed{\text{сепарабилност}}$ $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

$\boxed{\text{Није II}}$ Нека је $\mathcal{B}$ произвољна база од $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$.

За $x \in \mathbb{R}$ постоји $B_x \in \mathcal{B}$ т.д. $x \in B_x \subseteq [x, x+1) \in \mathcal{S}$

Нека је $F : \mathbb{R} \to \mathcal{B}$ дато са $F(x) := B_x$.

За $x \neq y$, БУО $x < y$ је $x \in B_x \subseteq [x, x+1)$ и

$y \in B_y \subseteq [y, y+1)$, па $x \notin B_y$, тј. $B_x \neq B_y$.

Ово управо значи да је F „1-1", па како је $\mathbb{R}$ непребројив, то је и $\mathcal{B}$ непребројив.

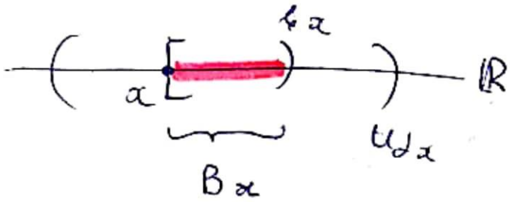
$\boxed{\text{Линделефовост}}$ Нека је $\mathbb{R} = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, $U_\alpha \in \mathcal{S}$

отворен покривач.

За $x \in \mathbb{R}$ постоји $\alpha_x \in A$ т.д. $x \in U_{\alpha_x}$ као и

базни $B_x = [x, b_x) \in \mathcal{S}$ т.д. $x \in B_x \subseteq U_{\alpha_x}$.

Нека је $A := \bigcup_{x \in \mathbb{R}} (x, b_x)$.



Идеја: $\mathbb{R} = A \cup A^c$

1. корак: нађемо пребројив покривач од A

2. корак: A^c је пребројив.

3. корак покријемо посебно A и A^c пребројивим покривачима и то је тражени потпокривач од $\mathbb{R}$

1. корак: $(x, b_x) \in \mathcal{U}$ (стандардна топологија на $\mathbb{R}$)

$(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ задовољава II аксиому $\Rightarrow (A, \mathcal{U}_A)$ задовољава II аксиому (јер је то наследно својство)

$\Rightarrow (A, \mathcal{U}_A)$ је Линделефов, па је

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} (x_i, b_{x_i}) \leftarrow \text{пребројив потпокривач,}$$

одакле је $\boxed{A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_{\alpha x_i}}$ (*) (јер $(x_i, b_{x_i}) \subseteq U_{\alpha x_i}$)

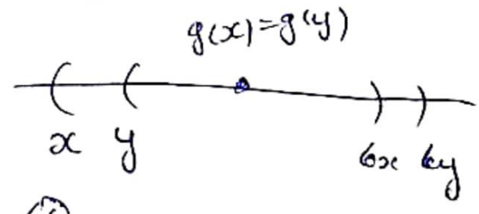
2. корак: A^c је пребројив.

Нека је $g : A^c \longrightarrow \mathbb{Q}$ дефинисано на следећи начин: за $x \in A^c$ имамо $[x, b_x)$ од раније и нека је $q_x \in (x, b_x) \cap \mathbb{Q}$ произвољно.

Дефинишимо $g(x) := q_x$.

g је „1-1": тпс. $x < y$ и $g(x) = g(y)$.

$\Rightarrow y \in (x, b_x) \subseteq A$, али $y \in A^c$ ↯



Дакле, g је „1-1", па како је $\mathbb{Q}$ пребројив, то је и A^c пребројив, одакле $\boxed{A^c \subseteq \bigcup_{x \in A^c} U_{\alpha x}}$ (**)

3. корак: Из (*) и (**) имамо

$$\mathbb{R} = A \sqcup A^c \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_{\alpha x_i}\right) \cup \left(\bigcup_{x \in A^c} U_{\alpha x}\right)$$ – пребројив потпокривач

пребројиве уније

Дакле, $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ је Линделефов. ■

▶ I и II аксиома су наследна својства;

▶ Линделефовост је слабо наследна:

X Линделефов и $A \in \mathcal{F}_X \Rightarrow A$ је Линделефов.

Став Ако је (M, d) метрички простор, онда

M је сепарабилан $\Longleftrightarrow$ M задовољава II аксиому.

▲ $\Leftarrow$: увек важи.

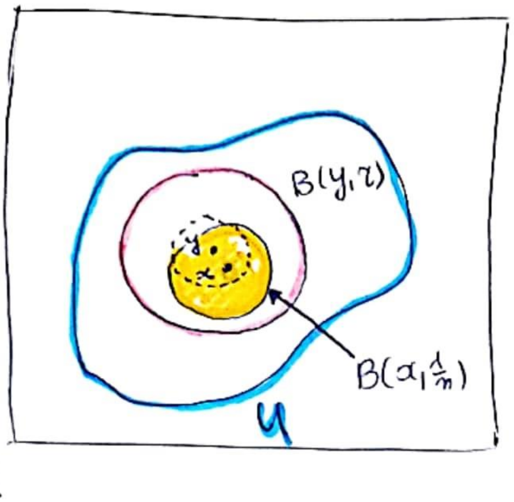
$\Rightarrow$: Нека је $D \subseteq M$ пребројив и $\overline{D} = M$ и нека је

$$\mathcal{B} = \{ B(x, \tfrac{1}{n}) \mid x \in D,\ n \in \mathbb{N} \}.$$

Показујемо да је $\mathcal{B}$ база од M.

Нека је $U \in \mathcal{T}_M$ и $y \in U$. Тада постоји $r > 0$ т.д.

$B(y, r) \subseteq U$. Б.У.О. нека је $r < 1$.



Како је D свуда густ, то $(\exists x \in D)\ x \in B(y, \frac{r}{3})$.
Даље, постоји $n \in \mathbb{N}$ т. д.
$$d(x,y) < \frac{1}{n} < \frac{2r}{3}, \text{ па}$$
је $y \in B(x, \frac{1}{n}) \subseteq U$, одакле закључујемо да $\mathcal{B}$ јесте база и то пребројива, па је M заиста сепарабилан. ■

- $\mathbb{R}^n$ није компактан али јесте Линделефов јер је метрички и сепарабилан $(\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n)$
- $(\mathbb{R}, S)$ није метризабилан.

Заиста, ако тс. да јесте метрички и знамо да је сепарабилан, онда на основу става знамо да задовољава II аксиому пребројивости ↯
(Дакле, није метрички али јесте T_4).

$\boxed{1.}$ Нека је метрички простор (M,d) Линделефов. Доказати да онда он задовољава II аксиому пребројивости.

▲ Нека је $n \in \mathbb{N}$. Тада је $M = \bigcup\limits_{x\in M} B(x, \frac{1}{n})$, па како је M Линделефов, постоји пребројив потпокривач

$$M = \bigcup_{m\in \mathbb{N}} B\left(x_{n,m}, \frac{1}{n}\right).$$

Лако се покаже да је

$$\mathcal{B} = \left\{ B\left(x_{n,m}, \frac{1}{n}\right) \mid n, m \in \mathbb{N} \right\}$$

пребројива база од M, па M задовољава II аксиому. ■

Лема Нека је $(X, \mathcal{T})$ тополошки простор, $x \in X$ и нека је $\mathcal{B}_x$ локална база у x. Тада

$$\bigcap_{B\in\mathcal{B}_x} B = \bigcap_{\substack{U\in\mathcal{T}\\ x\in U}} U.$$

2. Ако је X непребројив, онда $(X, \mathcal{T}_{cc})$ не задовољава I аксиому пребројивости.

▲ Пп. $(\forall x \in X)$ имамо пребројиву локалну базу $\mathcal{B}_x$. Тада је

$$\bigcap_{B\in\mathcal{B}_x} B \overset{\text{лема}}{=} \bigcap_{\substack{U\in\mathcal{T}_{cc}\\ x\in U}} U \overset{*}{=} \{x\} \quad / ^c$$

јер за $y \neq x$ је $\{y\}^c \in \mathcal{T}_{cc}$

$$\underbrace{\underbrace{\bigcup_{B\in\mathcal{B}_x}}_{\text{пребројива унија}} \underbrace{B^c}_{\text{пребројив}}}_{\text{ПРЕБРОЈИВО}} = \underbrace{X \setminus \{x\}}_{\text{непребројив}} \quad ↯ \quad ■$$

3. Нека је X тополошки простор и $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ две топологије на њему т.д. $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$.

(а) $(X, \mathcal{T}_1)$ сепарабилан $\not\Rightarrow$ $(X, \mathcal{T}_2)$ сепарабилан

нпр. $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ јесте, $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_d)$ није;

(б) $(X, \mathcal{T}_2)$ сепарабилан $\Rightarrow$ $(X, \mathcal{T}_1)$ сепарабилан

(в) $(X, \mathcal{T}_1)$ задовољава I акс. $\not\Rightarrow$ $(X, \mathcal{T}_2)$ задовољава I акс.

нпр. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_a)$ задовољава, $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cc})$ не;

(г) $(X, \mathcal{T}_2)$ задовољава I акс. $\not\Rightarrow$ $(X, \mathcal{T}_1)$ задовољава I акс.

нпр. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_d)$ задовољава, $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cc})$ не;

(д) $(X, \mathcal{T}_1)$ задовољава II акс. $\not\Rightarrow$ $(X, \mathcal{T}_2)$ задовољава II акс.

нпр. $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ задовољава, $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ не;

(ђ) $(X, \mathcal{T}_2)$ задовољава II акс. $\not\Rightarrow$ $(X, \mathcal{T}_1)$ задовољава II акс.

нпр. $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ задовољава, $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cf})$ не;

(е) $(X, \mathcal{T}_1)$ је Линделефов $\not\Rightarrow$ $(X, \mathcal{T}_2)$ је Линделефов

нпр. $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ јесте, $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_d)$ није;

(ж) $(X, \mathcal{T}_2)$ је Линделефов $\Rightarrow$ $(X, \mathcal{T}_1)$ је Линделефов. ∎

$\boxed{4.}$ Ако је X регуларан и Линделефов, онда је нормалан.

▲ Нека су $A, B \in \mathcal{F}_X \setminus \{\emptyset\}$ и $A \cap B = \emptyset$. Желимо да направимо дисјунктне околине ова два скупа.

Ако је $x \in A$, онда $x \in B^c$, па из регуларности имамо

$$(\exists U_x \in \mathcal{T}_X)\ x \in U_x \subseteq \overline{U_x} \subseteq B^c.$$

Слично за $y \in B \subseteq A^c$ имамо

$$(\exists V_y \in \mathcal{T}_X)\ y \in V_y \subseteq \overline{V_y} \subseteq A^c.$$

Како је Линделефовост слабо наследна и $A, B \in \mathcal{F}_X$, то су A и B Линделефови, па

$$A \subseteq \bigcup_{x \in A} U_x \quad \Rightarrow \quad A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$$

$$B \subseteq \bigcup_{y \in B} V_y \quad \Rightarrow \quad B \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j$$

пребројиви потпокривачи

Нека је $Y_1 := U_1 \setminus \overline{V_1} \in \mathcal{T}_X$

$$Y_2 := U_2 \setminus (\overline{V_1} \cup \overline{V_2}) \in \mathcal{T}_X$$

$$\vdots$$

$$Y_k := U_k \setminus (\overline{V_1} \cup \overline{V_2} \cup \ldots \cup \overline{V_k}) \in \mathcal{T}_X$$

$$\vdots$$

и нека је $U := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Y_k \in \mathcal{T}_X$.

Тада $A \subseteq U$ јер $\overline{V_k} \cap A = \emptyset$, за свако k.

Слично, нека је $W_k := V_k \setminus (\overline{U_1} \cup \overline{U_2} \cup \ldots \cup \overline{U_k}) \in \mathcal{T}_X$,

и $V := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} W_k \in \mathcal{T}_X$. Јасно, $B \subseteq V$.

Остаје још да покажемо да је $U \cap V = \emptyset$.

Птс. $a \in U \cap V \Rightarrow (\exists k, l \in \mathbb{N})\ a \in Y_k \wedge a \in W_l$.

Б.У.О. $k \geq l$. Тада је

$a \in Y_k = U_k \setminus (\overline{V_1} \cup \ldots \cup \overline{V_l} \cup \ldots \cup \overline{V_k}) \Rightarrow a \notin \overline{V_l}$

$a \in W_l = V_l \setminus (\overline{U_1} \cup \ldots \cup \overline{U_l}) \Rightarrow a \in V_l$ $\lightning$

Дакле, $U \cap V = \emptyset$, па је X нормалан. ■

Количнички простори

Дефиниција Пресликавање $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ је количничко ако је „на" и за свако $B \subseteq Y$ важи:

$$B \in \mathcal{T}_Y \iff f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X.$$

(или, еквивалентно, $B \in \mathcal{F}_Y \iff f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_X$).

Пример $\mathbb{1}_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}, \mathcal{U}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_a)$ је непрекидно и „на", али није количничко.

Став Нека су дата пресликавања $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ и нека је f количничко. Тада:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "g\circ f"] \arrow[dr, "f"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & Z \\ & Y \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

количничко

g је непрекидно $\Longleftrightarrow$ $g \circ f$ је непрекидно.

1. Нека су $p : X \to Y$, $f : Y \to X$ непрекидна т.д. је $p \circ f = \mathbb{1}_Y$. Тада је p количничко.

▲ ▶ $\mathbb{1}_Y$ је „на" $\Longrightarrow$ p је „на"

▶ p је непрекидно ✓

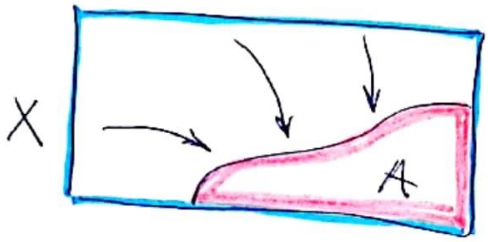
▶ $B \subseteq Y$, $p^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X \overset{?}{\Longrightarrow} B \in \mathcal{T}_Y$

$$B = \mathbb{1}_Y^{-1}(B) = (p \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}\big(\underbrace{p^{-1}(B)}_{\in \mathcal{T}_X}\big) \in \mathcal{T}_Y .$$

Дакле, p је количничко. ■

Дефиниција Нека је $A \subseteq X$. Пресликавање $r: X \to A$ је ретракција ако је непрекидно и $(\forall a \in A)\ r(a) = a$.

Приметимо:



$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "i_A"] \arrow[dr, "\mathbb{1}_A"'] & X \arrow[d, "r"] \\ & A \end{tikzcd}$$

тј. $r \circ i_A = \mathbb{1}_A \xRightarrow{\text{зад. 1}} r$ је количничко

Дефиниција $A \subseteq X$ је ретракт ако постоји ретракција $r: X \to A$.

2. Нека је $p: X \to Y$ количничко, Y повезан и $(\forall y \in Y)\ p^{-1}(\{y\})$ је повезан.

Тада је X повезан.

▲ Нека је $f: X \to \{0,1\}$ непрекидно. Показаћемо да је f константно. Нека је $y \in Y$. p је количничко па је „на", па постоји $x \in X$ т.д. $p(x) = y$.

Нека је $g(y) := f(x)$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & \{0,1\} \\ Y \arrow[ur, dashed, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Да ли је g добро дефинисано?

$p^{-1}(\{y\})$ је повезан, па је $f|_{p^{-1}(\{y\})} = \text{const}$,

па јесте добро дефинисано.

Како је p количничко и f непрекидно, то је на основу става на стр. 119. и g непрекидно.

Како је Y повезан, мора бити $g = \text{const}$, а из $f = g \circ p$ закључујемо да је и $f = \text{const}$.

Дакле, X је повезан. ■

Дефиниција Нека је X тополошки простор, Y скуп и $f : X \longrightarrow Y$ „на". Количничка топологија на Y је $\mathcal{T}_Y \overset{\text{def}}{=} \{U \subseteq Y \mid f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X\}$. (То је најфинија топологија т.д. је f непрекидно.)

► Ако је $\sim$ релација еквиваленције на тополошком простору X, имамо природну пројекцију $\pi : X \xrightarrow{\text{на}} X/\sim$
$x \mapsto [x]$

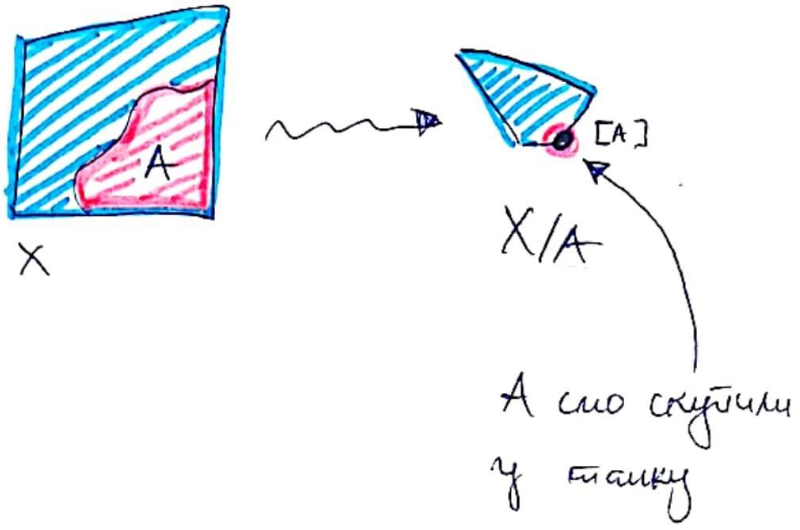
На $X/\sim$ дефинишемо топологију

$$\mathcal{T}_{X/\sim} \overset{\text{def}}{=} \{U \subseteq X/\sim \mid \pi^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X\}$$

$X/\sim$ је количнички простор.

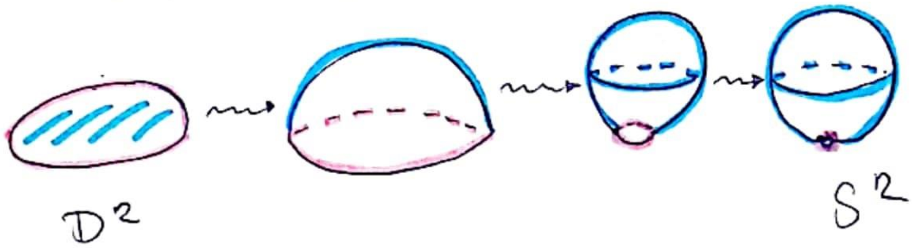
▶ Ако је X тополошки простор и $A \subseteq X$, имамо релацију еквиваленције: $x \sim y \iff x = y \vee x, y \in A$

Тада је $X/A \overset{df}{=} X/\sim$.

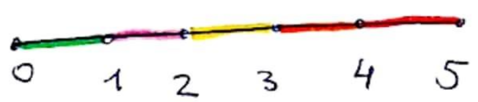


Пример (1) $X/X \cong *$

(2) $D^2/S^1 \cong S^2$



(3)



$/ \{1,2,3,4,5\} \cong$

▶ Ако су X, Y тополошки простори и $f: X \to Y$ непрекидно. Онда $x \sim y \iff f(x) = f(y)$ задаје релацију еквиваленције, па дефинишемо $X/f \overset{df}{=} X/\sim$.

За размишљање: Ако је $\sim$ релација на $\mathbb{R}^2$ дата са $(x,y) \sim (z,t) \iff x - z, y - t \in \mathbb{Z}$, како изгледа $\mathbb{R}^2/\sim$?