КОХОМОЛОГИЈА РАСЛОЈЕЊА

– САДРЖАЈ –

VI Кохомологија раслојења

VI.1. Дефиниција и примери раслојења (подсећање)

Дефиниција 1: F, E, B тополошки простори. Непрекидно пресликавање $p: E \to B$ са својством да за свако $b \in B$ постоји отворена околина U_b $(b \in U_b \in \mathcal{T}_B)$ и хомеоморфизам $h: p^{-1}(U_b) \to U_b \times F$ т.д. комутира дијаграм десно,

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_b) \arrow[rr, "h", "\approx"'] \arrow[dr, "p"'] & & U_b \times F \arrow[dl, "p_1"] \\ & U_b & \end{tikzcd}$$

називамо <u>раслојењем са слојем F</u>. Тада пишемо

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] & E \arrow[d, "p"] \\ & B \end{tikzcd}$$

E - <u>тотални простор</u>

B - <u>базни простор</u>

h - <u>локална тривијализација</u>

$A \subseteq U_b \Rightarrow$

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(A) \arrow[rr, "h|_{p^{-1}(A)}", "\approx"'] \arrow[dr, "p"'] & & A \times F \arrow[dl, "p_1"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

$$F_b := p^{-1}(\{b\}) \xrightarrow[\approx]{h} \{b\} \times F \approx F$$

Дакле, избором тачке $b \in B$ и локалне тривијализације h добијамо утапање слоја F у тотални простор E:

$$F \xrightarrow{\approx} F_b \hookrightarrow E.$$

p непрекидно, отворено, „на" $\Longrightarrow$ $\boxed{p \text{ је количничко}}$

$\boxed{p \text{ је Серова фибрација.}}$

<u>B паракомпактан</u> $\Longrightarrow$ $\boxed{p \text{ је фибрација.}}$

Примери: 1) Тривијално раслојење $B\times F \xrightarrow{p_1} B$.

2)
$$\begin{tikzcd} I \arrow[r] & M \arrow[d, "p"] \\ & S^1 \end{tikzcd}$$
M ← Мебијусова трака

p ← пројекција на централну кружницу.

3) Натkривање = Раслојење с дискретним слојем (базни простор је повезан)

4) (специјалан случај примера 3))
$$\begin{tikzcd} S^0 \arrow[r] & S^n \arrow[d, "p"] \\ & \mathbb{R}P^n \end{tikzcd} \qquad \underline{n\in\mathbb{N}_0}$$
$C_p \approx \mathbb{R}P^{n+1}$

5)
$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r] & S^{2n+1} \arrow[d, "p"] \\ & \mathbb{C}P^n \end{tikzcd} \qquad \underline{n\in\mathbb{N}_0}$$
$C_p \approx \mathbb{C}P^{n+1}$

6)
$$\begin{tikzcd} S^3 \arrow[r] & S^{4n+3} \arrow[d, "p"] \\ & \mathbb{H}P^n \end{tikzcd} \qquad \underline{n\in\mathbb{N}_0}$$
$C_p \approx \mathbb{H}P^{n+1}$

7)
$$\begin{tikzcd} S^7 \arrow[r] & S^{15} \arrow[d, "p"'] \arrow[dr] & \ni (z_1,z_2) \arrow[d, mapsto] \\ & S^8 & \mathbb{O}\cup\{\infty\} \arrow[l, "\approx"'] \ni z_2^{-1}\cdot z_1 \end{tikzcd}$$
(z_1, z_2) ← октониони

$\mathbb{O} = \mathbb{R}^8$

$\mathbb{O}P^1 := S^8$

$\mathbb{O}P^2 := C_p$.

- Штифелове многострукости

X тополошки векторски простор над $\mathbb{R}$ или над $\mathbb{C}$ (надаље ћемо радити са $\mathbb{R}$, а све исто важи и за $\mathbb{C}$).

То значи да је X тополошки и векторски простор т. д. су $+ : X\times X \to X$ и $\cdot : \mathbb{R}\times X \to X$ непрекидна пресликавања.

<u>$k\in\mathbb{N}$</u> $\quad \widetilde{V}_k(X) := \{(v_1, v_2, \dots, v_k)\in X^k \mid v_1,\dots,v_k$ линеарно независни$\} \subset X^k$

Нпр. $\widetilde{V}_1(X) = X\setminus\{0\}$, $\widetilde{V}_n(\mathbb{R}^n) = GL_n(\mathbb{R})$, $\widetilde{V}_n(\mathbb{C}^n) = GL_n(\mathbb{C})$.

Нека још имамо и скаларни производ $\langle\cdot,\cdot\rangle : X^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, који је и <u>непрекидно</u> пресликавање.

$$V_k(X) := \{(v_1, v_2, \dots, v_k)\in X^k \mid \langle v_i, v_j\rangle = \delta_i^j, \ 1\le i,j\le k\} \subset \widetilde{V}_k(X) \subset X$$

$V_k(X)$ и $\widetilde{V}_k(X)$ су тополошки простори с топологијом наслеђеном од X^k.

Дефинишимо пресликавање $GS : \widetilde{V}_k(X) \longrightarrow V_k(X)$ (<u>Грам-Шмитов поступак ортогонализације</u>) као композицију сл. k пресликавања:

$$\widetilde{V}_k(X) \xrightarrow{g_1} \widetilde{V}_k(X) \xrightarrow{g_2} \widetilde{V}_k(X) \xrightarrow{g_3} \dots \xrightarrow{g_{k-1}} \widetilde{V}_k(X) \xrightarrow{g_k} \widetilde{V}_k(X)$$

$$(v_1, v_2, \dots, v_k) \overset{g_1}{\longmapsto} \left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, v_2, \dots, v_k\right)$$

$$(v_1, v_2, v_3, \dots, v_k) \overset{g_2}{\longmapsto} \left(v_1, \frac{v_2 - \langle v_2, v_1\rangle v_1}{\|v_2 - \langle v_2, v_1\rangle v_1\|}, v_3, \dots, v_k\right)$$

$$\vdots$$

$$(v_1, \dots, v_l, \dots, v_k) \overset{g_l}{\longmapsto} \left(v_1, \dots, \frac{v_l - \sum_{i=1}^{l-1}\langle v_l, v_i\rangle v_i}{\|v_l - \sum_{i=1}^{l-1}\langle v_l, v_i\rangle v_i\|}, \dots, v_k\right), \quad \underline{2\le l\le k}$$

Ако је $(v_1, v_2, \dots, v_k) \in V_k(X)$, онда је $g_l(v_1, v_2, \dots, v_k) = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ за све $l=\overline{1,}$ а лако се види и да је слика ове композиције баш $V_k(X)$. Takође, јасно је да су пресликавања $g_1, g_2, \dots, g_k$ непрекидна (јер су непрекидна по координатама; $+, \cdot, \langle\cdot,\cdot\rangle$ непрекидна), па је, дакле, $GS : \widetilde{V}_k(X) \longrightarrow V_k(X)$ једна ретракција.

$\boxed{\text{Став 2:}}$ $GS : \widetilde{V}_k(X) \to V_k(X)$ је јака деформациона ретракција.

Δ: Довољно је утврдити да је $\underbrace{g_l \simeq \mathbb{1}_{\widetilde{V}_k(X)} \ (\mathrm{rel}\ V_k(X))}$ за све $l=\overline{1,k}$.

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{V}_k(X) \arrow[rr, "g_l"] \arrow[dr, "\alpha_l"'] & \arrow[d, phantom, "\curvearrowright"] & \widetilde{V}_k(X) \\
& \widetilde{V}_k(X) \arrow[ur, "\beta_l"'] &
\end{tikzcd}$$

$\alpha_l(v_1,\dots,v_k) = (v_1,\dots,v_l - \sum_{i=1}^{l-1}\langle v_l,v_i\rangle v_i,\dots$

$(\alpha_1 = \mathbb{1}_{\widetilde{V}_k(X)})$

$\beta_l(v_1,\dots,v_k) = (v_1,\dots,\frac{v_l}{\|v_l\|},\dots,v_k)$

$H : \widetilde{V}_k(X)\times I \to \widetilde{V}_k(X)$, $H(v_1,\dots,v_k,t) := (v_1,\dots,v_l - t\cdot\sum_{i=1}^{l-1}\langle v_l,v_i\rangle v_i,\dots,v_k)$

$$H : \mathbb{1}_{\widetilde{V}_k(X)} \simeq \alpha_l \ (\mathrm{rel}\ V_k(X))$$

$G : \widetilde{V}_k(X)\times I \to \widetilde{V}_k(X)$, $G(v_1,\dots,v_k,t) := (v_1,\dots,(1-t)v_l + t\,\frac{v_l}{\|v_l\|},\dots,v_k)$

$$G : \mathbb{1}_{\widetilde{V}_k(X)} \simeq \beta_l \ (\mathrm{rel}\ V_k(X))$$

Приметимо да је $V_1(\mathbb{R}^n)=S^{n-1}$, $V_n(\mathbb{R}^n)=O(n)$; $V_1(\mathbb{C}^n)=S^{2n-1}$, $V_n(\mathbb{C}^n)=U(n)$. Из става 2 сад следи да је

$$\underline{\underline{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\simeq S^{n-1}}};\ \underline{\underline{GL_n(\mathbb{R})\simeq O(n)}};\ \underline{\underline{\mathbb{C}^n\setminus\{0\}\simeq S^{2n-1}}};\ \underline{\underline{GL_n(\mathbb{C})\simeq U(n)}}.$$

Приметимо још и да пресликавања g_l, $l=\overline{1,k}$ (из дефиниције пресл. GS) чувају линеарни омотач $(\mathcal{L}(g_l(v_1,\dots,v_k)) = \mathcal{L}(v_1,\dots,v_k))$, што значи да, ако ј
Y тополошки векторски потпростор од X, онда је

$$GS|_{\widetilde{V}_k(Y)} = GS : \widetilde{V}_k(Y) \to V_k(Y).$$

И више од тога: ako je $GS(v_1, v_2, \dots, v_k) = (w_1, w_2, \dots, w_k)$, онда је, за све $l = \overline{1,k}$, $\mathcal{L}(w_1, w_2, \dots, w_l) = \mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_l) =: W_l$ и базе $(v_1, v_2, \dots, v_l)$ и $(w_1, w_2, \dots, w_l)$ одређују исту оријентацију простора W_l. (OP)

Напомена: У комплексном (као и у реалном) случају ово значи да је детерминанта матрице преласка са једне на другу базу строго позитиван реалан број.

Докажимо ову чињеницу индукцијом по $l \in \{1, 2, \dots, k\}$.

$l=1$: $w_1 = \frac{1}{\|v_1\|} \cdot v_1$ ✓

$l \geq 2$: $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_l) = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_{l-1}) \oplus \mathcal{L}(v_l) \overset{\text{ИХ}}{=} \mathcal{L}(w_1, \dots, w_{l-1}) \oplus \mathcal{L}(v_l)$

$$= \mathcal{L}(w_1, \dots, w_{l-1}, v_l) = \mathcal{L}(w_1, \dots, w_{l-1}, w_l) \quad ✓$$

$$\boxed{w_l = \frac{1}{\left\| v_l - \sum\limits_{i=1}^{l-1} \langle v_l, w_i \rangle w_i \right\|} \cdot \left(v_l - \sum_{i=1}^{l-1} \langle v_l, w_i \rangle w_i \right)}$$

$$(v_1, \dots, v_{l-1}, v_l) \overset{\text{ИХ}}{\sim} (w_1, \dots, w_{l-1}, v_l) \sim (w_1, \dots, w_{l-1}, w_l) \quad ✓$$

матрица преласка: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & & 0 & \langle v_l, w_1 \rangle \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \\ \vdots & \vdots & & 1 & \langle v_l, w_{l-1} \rangle \\ 0 & 0 & & 0 & \left\| v_l - \sum\limits_{i=1}^{l-1} \langle v_l, w_i \rangle w_i \right\| \end{bmatrix}$

Став 2,5: Нека је $L : X \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow Y$ изоморфизам између (тополошких) векторских простора X и Y. Нека још и на X и на Y имамо скаларне производе и нека је $k \in \mathbb{N}$. Тада је композиција

$$V_k(X) \xrightarrow{L \times \dots \times L} \widetilde{V}_k(Y) \xrightarrow{GS} V_k(Y) \xrightarrow{L^{-1} \times \dots \times L^{-1}} \widetilde{V}_k(X) \xrightarrow{GS} V_k(X)$$

једнака идентичком пресликавању $\mathbb{1}_{V_k(X)}$.

Δ: $\underline{\underline{(v_1, v_2, \dots, v_k) \in V_k(X)}}$ произв.

$$(v_1, \dots, v_k) \xmapsto{L \times \dots \times L} (L(v_1), \dots, L(v_k)) \xmapsto{GS} (w_1, \dots, w_k) \xmapsto{L^{-1} \times \dots \times L^{-1}} (L^{-1}(w_1), \dots, L^{-1}(w_k)) \xmapsto{GS} (u_1, \dots, u_k)$$

Докажимо индукцијом по $l \in \{1, 2, \dots, k\}$ да је $\underline{\underline{u_l = v_l}}$, $\underline{l = \overline{1,k}}$.

$\underline{\underline{l=1}}$: $u_1 = \dfrac{1}{\|L^{-1}(w_1)\|} \cdot L^{-1}(w_1) \underset{(\wedge)}{=} \dfrac{\cancel{\|L(v_1)\|}}{\|v_1\|} \cdot \dfrac{1}{\cancel{\|L(v_1)\|}} \cdot v_1 = v_1$ ✓

$w_1 = \dfrac{1}{\|L(v_1)\|} \cdot L(v_1)$ $\qquad$ $\|v_1\| = 1$

$\underline{\underline{l \geq 2}}$: $\underline{A_l := \mathcal{L}(v_1, \dots, v_l) \text{ оријентисан базом } (v_1, \dots, v_l)}$, $A_l \leq X$

$B_l := L(A_l)$ оријентисан базом $(L(v_1), \dots, L(v_l))$, $B_l \leq Y$

$\overset{(OP)}{\Longrightarrow}$ B_l је оријентисан базом $(w_1, \dots, w_l)$

$\Longrightarrow$ $A_l = L^{-1}(B_l)$ је оријентисан базом $(L^{-1}(w_1), \dots, L^{-1}(w_k))$

$\overset{(OP)}{\Longrightarrow}$ A_l је оријентисан базом $(u_1, \dots, u_l)$

$\overset{(ИХ)}{\Longrightarrow}$ $\underline{A_l \text{ је оријентисан базом } (v_1, \dots, v_{l-1}, u_l)}$ $\quad (*)$

Обе базе $\overset{\text{у } (*)}{\text{су}}$ ортонормиране, па су, дакле, u_l и v_l јединични вектори у A_l ортогонални на $\underset{\mathcal{L}(v_1, \dots, v_{l-1})}{A_{l-1}}$, $u_l, v_l \in A_{l-1}^{\perp_{A_l}}$, $\dim(A_{l-1}^{\perp_{A_l}}) = 1$. $(A_{l-1}^{\perp_{A_l}} := A_l \cap A_{l-1}^{\perp})$

$\Longrightarrow$ $\underline{u_l = \pm v_l}$ (у комплексном случају: $\underline{u_l = \lambda \cdot v_l}$, $\lambda \in S^1$)

Међутим, матрица преласка са базе $(v_1, \dots, v_{l-1}, u_l)$ на базу $(v_1, \dots, v_{l-1}, v_l)$

$\begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \pm 1 \end{bmatrix}$ има строго позитивну детерминанту $((*))$ ... $\Longrightarrow$ $\boxed{u_l = v_l}$ ✓

Став 3: $\underline{n \geq 2}$. (а) $V_{n-1}(\mathbb{R}^n) \approx SO(n)$;

(б) $V_{n-1}(\mathbb{C}^n) \approx SU(n)$.

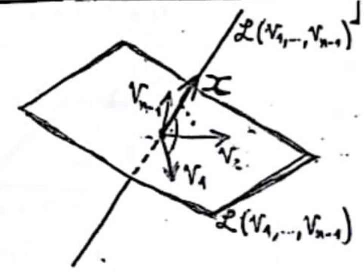
Δ: (а) $SO(n) = \{ A \in \underbrace{M_n(\mathbb{R})}_{\approx \mathbb{R}^{n^2}} \mid A \cdot A^T = E ,\ \det A = 1 \}$

$f : SO(n) \to V_{n-1}(\mathbb{R}^n)$, $A = [v_1\ v_2\ \cdots\ v_{n-1}\ v_n] \in SO(n)$

вектори-колоне

$\underline{f(A) := (v_1, v_2, \ldots, v_{n-1})} \in V_{n-1}(\mathbb{R}^n)$.

Пресликавање f је очигледно непрекидно. Да бисмо доказали да је и хомеоморфизам, треба да установимо да за дато $\underline{(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}) \in V_{n-1}(\mathbb{R}^n)}$ постоји јединствени вектор $\underline{x \in \mathbb{R}^n}$ т.д.



$[v_1\ v_2\ \cdots\ v_{n-1}\ x] \in SO(n)$ и да x непрекидно зависи од координата вектора $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$. Ово је геометријски видљиво и јасно, али докажимо то и формално.

$$v_i = (v_{i,1}, v_{i,2}, \ldots, v_{i,n}),\quad i = \overline{1,n-1}$$

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Дакле, n-торка x је решење сл. система једначина:

$$\underline{\underline{(*)}} \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1 \\ v_{i,1} x_1 + v_{i,2} x_2 + \cdots + v_{i,n} x_n = 0, \quad i = \overline{1,n-1} \\ \begin{vmatrix} v_{1,1} & v_{2,1} & \cdots & v_{n-1,1} & x_1 \\ v_{1,2} & v_{2,2} & \cdots & v_{n-1,2} & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ v_{1,n} & v_{2,n} & \cdots & v_{n-1,n} & x_n \end{vmatrix} = 1 \end{cases}$$

Прва једначина је, међутим, последица осталих (и чињенице да је $(v_1,\dots,v_{n-1}) \in V_{n-1}(\mathbb{R}^n)$). Наиме, матрица $[v_1\ v_2 \cdots v_{n-1}\ \frac{x}{\|x\|}]$ је свакако ортогонална (ако важи (*)), па је

$$\pm 1 = \det\left[v_1\ v_2 \cdots v_{n-1}\ \frac{x}{\|x\|}\right] = \frac{1}{\|x\|}\underbrace{\det[v_1\ v_2 \cdots v_{n-1}\ x]}_{\overset{(*)}{=}\,1} = \frac{1}{\|x\|}$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{\|x\|=1}}.$$

Дакле, остаје да се докаже да систем (*) има јединствено решење и да је то решење непрекидна функција коефицијената система (јер су ти коефицијенти непрекидне функције од $(v_1,\dots,v_{n-1})$). Међутим, ово ће следити непосредно из Крамеровог правила ако докажемо да је детерминанта система (*) различита од нуле (јер је (*) систем од n линеарних једначина са n непознатих).

$$\Delta = \begin{vmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} & \cdots & v_{1,n} \\ v_{2,1} & v_{2,2} & \cdots & v_{2,n} \\ \vdots & & & \\ v_{n-1,1} & v_{n-1,2} & \cdots & v_{n-1,n} \\ V_1 & V_2 & \cdots & V_n \end{vmatrix} = V_1^2 + V_2^2 + \cdots + V_n^2 > 0. \quad \checkmark$$

бар један од минора $V_1, V_2, \dots, V_n$ је $\neq 0$ јер је $\operatorname{rank}[v_1\ v_2 \cdots v_{n-1}] = n$ ($(v_1,\dots,v_{n-1}) \in V_{n-1}(\mathbb{R}^n$

$$V_1 = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} v_{1,2} & v_{2,2} & \cdots & v_{n-1,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{1,n} & v_{2,n} & \cdots & v_{n-1,n} \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} v_{1,2} & \cdots & v_{1,n} \\ v_{2,2} & \cdots & v_{2,n} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n-1,2} & \cdots & v_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

$$V_2 = (-1)^{n+2} \begin{vmatrix} v_{1,1} & v_{2,1} & \cdots & v_{n-1,1} \\ v_{1,3} & v_{2,3} & \cdots & v_{n-1,3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{1,n} & v_{2,n} & \cdots & v_{n-1,n} \end{vmatrix} = \cdots$$

$$\vdots$$

(б) $SU(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A \cdot \bar{A}^T = E,\ \det A = 1\}$ . . . Слично...

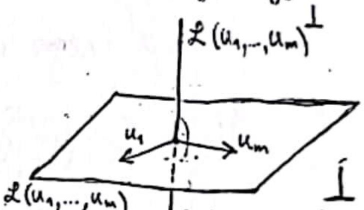
8) Враћамо се примерима раслојења (с полеђине листа $\boxed{105}$).

$$\boxed{1 \leq m < k \leq n}$$

$$\begin{array}{ccc} V_{k-m}(\mathbb{R}^{n-m}) \longrightarrow V_k(\mathbb{R}^n) & \qquad & V_{k-m}(\mathbb{C}^{n-m}) \longrightarrow V_k(\mathbb{C}^n) \\ \underline{\underline{(P)}} \qquad\qquad \big\downarrow p & & \underline{\underline{(Ц)}} \qquad\qquad \big\downarrow p \\ V_m(\mathbb{R}^n) & & V_m(\mathbb{C}^n) \end{array}$$

$$\underline{\underline{p(v_1, v_2, \dots, v_k) := (v_1, v_2, \dots, v_m)}}$$

Докажимо услов локалне тривијалности за (Р), а слично се доказује и за (Ц).



$\underline{\underline{(u_1, u_2, \dots, u_m) \in V_m(\mathbb{R}^n)}}$ произв.

Нека је $\underline{\underline{(u_{m+1}, \dots, u_n)}}$ нека (фиксирана) ортонормирана база за $\mathcal{L}(u_1,\dots,u_m)^\perp \leq \mathbb{R}^n$

$$\boxed{U := \Big\{ (v_1,\dots,v_m) \in V_m(\mathbb{R}^n) \;\Big|\; \underbrace{\det[v_1\ v_2 \dots v_m\ u_{m+1} \dots u_n]}_{\text{нетр. ф-ја од } (v_1,\dots,v_m)} \neq 0 \Big\} \in \mathcal{T}_{V_m(\mathbb{R}^n)}}$$

$\underline{(u_1,\dots,u_m) \in U}$ ✓

$L : \mathcal{L}(u_1,\dots,u_m)^\perp \longrightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ изоморфизам одређен са $L(u_{m+i}) = e_i$, $i = \overline{1, n-m}$

$\Pi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{L}(u_1,\dots,u_m)^\perp$ ортогонална пројекција

Π је, наравно, непрекидно, а и L је непрекидно јер је $L(v)$ $(n-m)$-торка реалних бројева која представља последњих $(n-m)$ координата вектора v у бази $(u_1,\dots,u_m,u_{m+1},\dots,u_n)$ простора $\mathbb{R}^n$ (првих m координата су нуле).

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(U) \arrow[rr, dashed, "h"] \arrow[dr, "p"'] & \arrow[d, phantom, "\text{(ЛТ)}"] & U \times V_{k-m}(\mathbb{R}^{n-m}) \arrow[dl, "p_1"] \\
& U &
\end{tikzcd}$$

$$h(v_1,v_2,\dots,v_m,v_{m+1},\dots,v_k) := \Big(\underbrace{(v_1,v_2,\dots,v_m)}_{=p(v_1,\dots,v_k)},\ GS\big(L(\pi(v_{m+1})),\dots,L(\pi(v_k))\big)\Big)$$

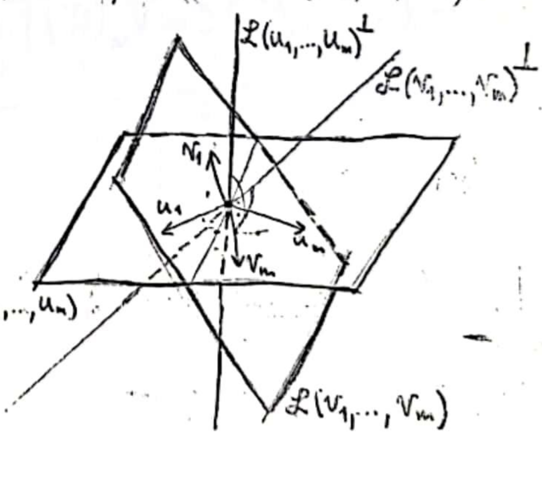
Да бисмо показали да је h добро дефинисано, треба да проверимо да су вектори $\pi(v_{m+1}),\dots,\pi(v_k)$ линеарно независни, јер је у том случају $(L(\pi(v_{m+1})),\dots,L(\pi(v_k)))\in\widetilde{V}_{k-m}(\mathbb{R}^{n-m})$ (L је изоморфизам), па се $GS:\widetilde{V}_{k-m}(\mathbb{R}^{n-m})\to V_{k-m}(\mathbb{R}^{n-m})$ може применити на ову $(k-m)$-торку.

Та чињеница следи из наредног помоћног тврђења:

<u>(ПТ)</u> Нека је $(v_1,v_2,\dots,v_m)\in U$. Тада је

$$\pi_{v_1,\dots,v_m} := \pi\big|_{\mathcal{L}(v_1,\dots,v_m)^\perp} : \mathcal{L}(v_1,\dots,v_m)^\perp \to \mathcal{L}(u_1,\dots,u_m)^\perp$$

изоморфизам.



Δ: Како је $\pi_{v_1,\dots,v_m}$ хомоморфизам (лин. пресл.) и $\dim(\mathcal{L}(v_1,\dots,v_m)^\perp)=\dim(\mathcal{L}(u_1,\dots,u_m)^\perp)=n-m$, то је довољно показати да је $\pi_{v_1,\dots,v_m}$ „на".

<u>$w\in\mathcal{L}(u_1,\dots,u_m)^\perp$</u> произв.

$\Rightarrow (\exists_1\, \alpha_{m+1},\dots,\alpha_n\in\mathbb{R})\quad w=\alpha_{m+1}u_{m+1}+\dots+\alpha_n u_n$

? $(\exists \beta_1,\dots,\beta_m\in\mathbb{R})\ \underbrace{\beta_1u_1+\dots+\beta_mu_m+\underbrace{\alpha_{m+1}u_{m+1}+\dots+\alpha_nu_n}_{=:w}}_{=:x}\in\mathcal{L}(v_1,\dots,v_m)^{\perp}$?

$\Pi(x)=w$ ✓

$$\underline{\underline{(**)}}\quad\begin{cases}0=\langle x,v_1\rangle=\langle u_1,v_1\rangle\cdot\beta_1+\dots+\langle u_m,v_1\rangle\cdot\beta_m+\langle w,v_1\rangle\\ \quad\vdots\\ 0=\langle x,v_m\rangle=\langle u_1,v_m\rangle\cdot\beta_1+\dots+\langle u_m,v_m\rangle\cdot\beta_m+\langle w,v_m\rangle\end{cases}$$

Да ли систем (**) има решење?

$$0\underset{(v_1,\dots,v_m)\in U}{\neq}\det[v_1\ \cdots\ v_m\ u_{m+1}\ \cdots\ u_n]=\det\left([v_1\cdots v_m\ u_{m+1}\cdots u_n]^T\right)$$

$$=\pm\det\left([v_1\cdots v_m\ u_{m+1}\cdots u_n]^T\right)\cdot\underbrace{\det\overbrace{[u_1\cdots u_m\ u_{m+1}\cdots u_n]}^{\in O(n)}}_{=\pm1}$$

$$=\pm\det\left([v_1\cdots v_m\ u_{m+1}\cdots u_n]^T\cdot[u_1\cdots u_m\ u_{m+1}\cdots u_n]\right)$$

$$=\pm\left|\begin{array}{ccc|ccc}\langle v_1,u_1\rangle&\cdots&\langle v_1,u_m\rangle&\langle v_1,u_{m+1}\rangle&\cdots&\langle v_1,u_n\rangle\\ \vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\ \langle v_m,u_1\rangle&\cdots&\langle v_m,u_m\rangle&\langle v_m,u_{m+1}\rangle&\cdots&\langle v_m,u_n\rangle\\ \hline &&&1&&0\\ &0&&&\ddots&\\ &&&0&&1\end{array}\right|$$

$$=\pm\begin{vmatrix}\langle v_1,u_1\rangle&\cdots&\langle v_1,u_m\rangle\\ \vdots&&\vdots\\ \langle v_m,u_1\rangle&\cdots&\langle v_m,u_m\rangle\end{vmatrix}$$

детерминанта система (**) ✓

~~[illegible]~~

Сада, како је $(v_1,\dots,v_m,v_{m+1},\dots,v_k)\in p^{-1}(U)\subseteq V_k(\mathbb{R}^n)$, то су $v_{m+1},\dots,v_k$ линеарно независни вектори у $\mathcal{L}(v_1,\dots,v_m)^{\perp}$, па пошто $(v_1,\dots,v_m)=$ $=p(v_1,\dots,v_m,v_{m+1},\dots,v_k)\in U$, из (ПТ) закључујемо да су и $\Pi(v_{m+1}),\dots,\Pi(v_k)$ линеарно независни вектори.

Дакле, h је добро дефинисано, непрекидно јер су Π, L, GS непрекидна пресликавања, а очигледно и дијаграм (ЛТ) комутира.

Остаје да покажемо да је h хомеоморфизам. ~~[illegible]~~

$$\xi : U\times V_{k-m}(\mathbb{R}^{n-m})\longrightarrow p^{-1}(U)$$

$$\xi(\underbrace{v_1,v_2,\dots,v_m}_{\in U},\underbrace{w_1,\dots,w_{k-m}}_{\in V_{k-m}(\mathbb{R}^{n-m})}):=\left(v_1,v_2,\dots,v_m, GS\left(\Pi^{-1}_{v_1,\dots,v_m}(L^{-1}(w_1)),\dots,\Pi^{-1}_{v_1,\dots,v_m}(L^{-1}(w_{k-m}))\right)\right)$$

На основу доказа тврђења (ПТ), вектор $\Pi^{-1}_{v_1,\dots,v_m}(w)=w+\beta_1u_1+\dots+\beta_m u_m$ непрекидно зависи од $w, v_1,\dots,v_m$, јер ~~је~~ је $(\beta_1,\dots,\beta_m)$ решење система (**) чији коефицијенти непрекидно зависе од $w,v_1,\dots,v_m$, па по Крамеровом правилу. Како су и L^{-1} и GS непрекидна пресликавања, то закључујемо да је ξ добро дефинисано непрекидно пресликавање.

Коначно, на основу става 2,5 (примењеног на изоморфизам $L\circ\Pi_{v_1,\dots,v_m}:\mathcal{L}(v_1,\dots,v_m)^{\perp}\rightarrowtail\mathbb{R}^{n-m}$ и његов инверз $\Pi^{-1}_{v_1,\dots,v_m}\circ L^{-1}$) закључујемо да је $\xi\circ h=\mathbb{1}_{p^{-1}(U)}$ и $h\circ\xi=\mathbb{1}_{U\times V_{k-m}(\mathbb{R}^{n-m})}$, тј. $\xi=h^{-1}$, па је, дакле, (P) заиста раслојење.

Лема 4: Нека је
$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] & E \arrow[d, "p"] \\ & B \end{tikzcd}$$
раслојење, при чему су F и B (тополошке) многострукости. Тада је и E (тополошка) многострукост димензије $\dim B + \dim F$.

Δ: E је Хаусдорфов: $e_1, e_2 \in E$, $e_1 \neq e_2$

1° $p(e_1) \neq p(e_2) \xRightarrow{B \text{ је } T_2} (\exists U_1, U_2 \in \mathcal{T}_B)$ $p(e_1) \in U_1$, $p(e_2) \in U$
$U_1 \cap U_2 = \emptyset$

$\Rightarrow$ $e_1 \in p^{-1}(U_1) \in \mathcal{T}_E$, $e_2 \in p^{-1}(U_2) \in \mathcal{T}_E$,
$p^{-1}(U_1) \cap p^{-1}(U_2) = \emptyset$. ✓✓

2° $p(e_1) = p(e_2) =: b \in U \in \mathcal{T}_B$
$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "h", "\approx"'] \arrow[dr, "p"'] & & U \times F \arrow[dl, "p_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

U, F су T_2 $\Rightarrow$ $U \times F$ је T_2

$\Rightarrow$ $\underset{e_1 \neq e_2}{p^{-1}(U)}$ је T_2 $\Rightarrow \left(\exists V_1, V_2 \in \mathcal{T}_{p^{-1}(U)} \subseteq \mathcal{T}_E\right)$ $p^{-1}(U) \in \mathcal{T}_E$

$e_1 \in V_1$, $e_2 \in V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. ✓✓

E је локално $\mathbb{R}^n$: $e \in E$ произв., $p(e) \in U \in \mathcal{T}_B$
$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "h", "\approx"'] \arrow[dr, "p"'] & & U \times F \arrow[dl, "p_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

$n := \dim B + \dim F$ $\quad e \in p^{-1}(U) \in \mathcal{T}_E$

$\Rightarrow$ $U \times F$ је многострукост дим. n

$\Rightarrow$ $p^{-1}(U)$ је многостр. дим. n $\Longrightarrow \left(\exists V \in \mathcal{T}_{p^{-1}(U)} \subseteq \mathcal{T}_E\right)$ $e \in V \approx \mathbb{R}$

■

Од раније знамо да је $V_k(\mathbb{R}^n)$ $(n-k-1)$-повезан простор, при чему $\boxed{-1\text{-повезан}} \Longleftrightarrow \boxed{\text{непразан}}$.

$\boxed{\text{Теорема 5:}}$ Нека је $\underline{1 \le k \le n}$.

(а) $\underline{\underline{V_k(\mathbb{R}^n)}}$ је затворена $(n-k-1)$-повезана многострукост димензије $\underline{n-1} + \underline{n-2} + \cdots + \underline{n-k} = \underline{\underline{\binom{n}{2} - \binom{n-k}{2}}}$.

(б) $\underline{\underline{V_k(\mathbb{C}^n)}}$ је затворена $(2n-2k)$-повезана (реална) многострукост димензије

$$\underline{2n-1} + \underline{2n-3} + \cdots + \underline{2(n-k)+1} = \underline{\underline{n^2 - (n-k)^2}}.$$

Δ: $V_k(\mathbb{R}^n) \in \mathcal{F}_{(\mathbb{R}^n)^k}$, тј. $V_k(\mathbb{C}^n) \in \mathcal{F}_{(\mathbb{C}^n)^k}$, јер су одређени са коначно много једначина: $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_i^j$, $1 \le i, j \le k$; а леве стране ових једначина су непрекидне ф-је на $(\mathbb{R}^n)^k$, односно $(\mathbb{C}^n)^k$.

Такође, $V_k(\mathbb{R}^n) \subset \underbrace{S^{n-1} \times \cdots \times S^{n-1}}_{k}$, $V_k(\mathbb{C}^n) \subset \underbrace{S^{2n-1} \times \cdots \times S^{2n-1}}_{k}$, па су и ограничени.

$\Longrightarrow$ $V_k(\mathbb{R}^n)$ и $V_k(\mathbb{C}^n)$ су компактни. ✓

(а) индукцијом по $k \in \{1, 2, \dots, n\}$

$\underline{k=1}$: $V_1(\mathbb{R}^n) = S^{n-1}$ $(n-2)$-пов. мног. дим. $n-1$. ✓

$\underline{k \ge 2}$: (Р) за $m=1$:

$$\begin{array}{ccc} V_{k-1}(\mathbb{R}^{n-1}) & \longrightarrow & V_k(\mathbb{R}^n) \\ & & \big\downarrow p \\ & & S^{n-1} \end{array}$$

(IX), лема 4 $\Longrightarrow$ $V_k(\mathbb{R}^n)$ је многостр. дим. $(n-1) + (n-2 + \cdots + n-k)$.

$\underline{i \le n-k-1}$: $\cdots \to \pi_i(V_{k-1}(\mathbb{R}^{n-1})) \to \pi_i(V_k(\mathbb{R}^n)) \to \pi_i(S^{n-1}) \to \cdots$

$(i \ge 0)$

$\pi_i(V_{k-1}(\mathbb{R}^{n-1})) \overset{\text{(IX)}}{=} 0$, $\pi_i(S^{n-1}) = 0$ ✓

(б) индукцијом по $k \in \{1,2,\dots,n\}$

$\underline{k=1}$: $V_1(\mathbb{C}^n) = S^{2n-1}$ $(2n-2)$-повез. многостр. дим. $2n-1$. ✓

$\underline{k \geq 2}$: (Ц) за $m=1$:

$$\begin{tikzcd} V_{k-1}(\mathbb{C}^{n-1}) \arrow[r] & V_k(\mathbb{C}^n) \arrow[d, "p"] \\ & S^{2n-1} \end{tikzcd}$$

(ИХ), лема 4 $\Longrightarrow$ $V_k(\mathbb{C}^n)$ је многостр. дим. $(2n-1)+(2n-3+\cdots+2(n-k)+$

$\underline{i \leq 2n-2k}$: $\quad \cdots \to \pi_i(V_{k-1}(\mathbb{C}^{n-1})) \to \pi_i(V_k(\mathbb{C}^n)) \to \pi_i(S^{2n-1}) \to \cdots$

$(i \geq 0)$ $\qquad \pi_i(V_{k-1}(\mathbb{C}^{n-1})) \overset{\text{(ИХ)}}{=} 0, \qquad \pi_i(S^{2n-1}) = 0$ ✓

$\boxed{\text{Дефиниција 6:}}$ $V_k(\mathbb{R}^n)$ - <u>реална</u> <u>Штифелова многострукост</u>,

$V_k(\mathbb{C}^n)$ - <u>комплексна Штифелова многострукост</u>.

Дакле, $\dim O(n) = \dim \underbrace{SO(n)}_{\text{путно пов.}} = \binom{n}{2}$; $\dim \underbrace{U(n)}_{\text{путно пов.}} = n^2$, $\dim \underbrace{SU(n)}_{\text{2-повез.}} = n^2 - 1$

Подсетимо се, такође, да два раслојења, $\begin{tikzcd} F \arrow[r, "i"] & E \arrow[d, "p"] \\ & B \end{tikzcd}$ и $\begin{tikzcd} \tilde{F} \arrow[r, "\tilde{i}"] & \tilde{E} \arrow[d, "\tilde{p}"] \\ & \tilde{B} \end{tikzcd}$ идентификујемо (сматрамо једнаким) ако постоје хомеоморфизми на дијаграму десно такви да тај дијаграм комутира.

$$(\text{X}) \quad \begin{tikzcd} \tilde{F} \arrow[r, dashed, "\approx"] \arrow[d, "\tilde{i}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & F \arrow[d, "i"] \\ \tilde{E} \arrow[r, "\approx"] \arrow[d, "\tilde{p}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & E \arrow[d, "p"] \\ \tilde{B} \arrow[r, "\approx"] & B \end{tikzcd}$$

Ако је $p: E \to B$ раслојење са слојем F и $f: X \to B$ (непр.) пресликавање, онда је <u>повлачење пресликавања p помоћу f</u>, $\tilde{p}: f^*(E) \to X$ $\left(f^*(E) = \{(x,e) \mid f(x) = p(e)\} \subseteq X \times E\right)$, такође раслојење са слојем F. Тада, за $x \in X$, дијаграм десно комутира.

$$\begin{tikzcd}
\{x\} \times F_{f(x)} \arrow[r, "\approx"] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & F_{f(x)} \arrow[d, hook] \\
f^*(E) \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\tilde{p}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & E \arrow[d, "p"] \\
X \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(x,e) \arrow[r, mapsto, "q"] \arrow[d, "\tilde{p}"'] & e \\
x &
\end{tikzcd}$$

Специјално, ако је $B' \subset B$ и $j: B' \hookrightarrow B$, онда је

$$j^*(E) = \{(b,e) \in B' \times E \mid j(b) = b = p(e)\}$$

$$= \{(p(e), e) \mid e \in p^{-1}(B')\} \approx p^{-1}(B'),$$

$$(p(e),e) \longleftrightarrow e$$

па (имајући у виду (X)) добијамо <u>рестрикцију раслојења p на B'</u> и, за $b \in B'$, комутативан дијаграм десно.

$$\begin{tikzcd}
F_b \arrow[r, equal] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & F_b \arrow[d, hook] \\
p^{-1}(B') \arrow[r, hook] \arrow[d, "p_{B'}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & E \arrow[d, "p"] \\
B' \arrow[r, hook, "j"] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
e \arrow[d, "p_{B'}"'] \\
p(e)
\end{tikzcd}$$

VI. 2. Теорема Лере–Хирша

Код тривијалног раслојења $\begin{tikzcd} F \arrow[r, hook] & B \times F \arrow[d, "p_1"] \\ & B \end{tikzcd}$ знамо да је кохомолошка алгебра тоталног простора $B \times F$ изоморфна тензорском производу кохомолошких алгебри базног простора B и слоја F ако је бар једна од ове две алгебре (са одговарајућим коефицијентима) слободан градуисани модул коначног типа (Кинетова формула, теорема 37 II).

Теорема Лере-Хирша донекле уопштава Кинетову формулу на фибрације које не морају бити тривијалне, али задовољавају одређене услове. Заправо, одмах ћемо доказати релативну верзију ове теореме из које се, као специјални случај, добија апсолутна верзија. У ту сврху, уводимо најпре један нов појам.

Дефиниција 7: Нека је $p:E\to B$ (Серова) фибрација и $E'\subseteq E$ т. д. је $E'=\emptyset$ или је рестрикција $p'=p|_{E'}:E'\to B$ такође (Серова) фибрација. Тада кажемо да имамо релативну (Серову) фибрацију и пишемо

$$(E,E')\xrightarrow{p}B \quad \text{или} \quad \begin{tikzcd}(F,F') \arrow[r] & (E,E') \arrow[d, "p"] \\ & B\end{tikzcd},$$

где је $F=F_b=p^{-1}(\{b\})$, $F'=F'_b=p'^{-1}(\{b\})=F_b\cap E'$ за неко $b\in B$. (F,F') - слој рел. фибрације p над тачком $b\in B$.

Пример: Нека је $n\in\mathbb{N}$ и $p:E\to B$ раслојење са слојем D^n: $\begin{tikzcd}D^n \arrow[r] & E \arrow[d, "p"] \\ & B\end{tikzcd}$ (диск-раслојење).

Тада свака локална тривијализација $h:p^{-1}(U)\longrightarrow U\times D^n$, $U\in\mathcal{T}_B$, за све $b\in U$ индукује хомеоморфизам $h_b:F_b\xrightarrow{\approx}D^n$ $(h_b=p_2\circ h|_{F_b})$.

За $x\in D^n$ важи да је $H_n(D^n,D^n\setminus\{x\})\cong\tilde{H}_{n-1}(D^n\setminus\{x\})\cong\begin{cases}\mathbb{Z}, & x\in\mathring{D}^n\\ 0, & x\in S^{n-1}\end{cases}$

$\Rightarrow H_n(F_b,F_b\setminus\{e\})\cong\begin{cases}\mathbb{Z}, & h_b(e)\in\mathring{D}^n\\ 0, & h_b(e)\in S^{n-1}\end{cases}$ за све $e\in F_b$.

$$\underbrace{E':=\{e\in E \mid H_n(F_{p(e)},F_{p(e)}\setminus\{e\})=0\}}$$

$$\begin{tikzcd}p^{-1}(U) \arrow[rr, "h", "\approx"'] \arrow[dr, "p"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & U\times D^n \arrow[dl, "p_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}E'\cap p^{-1}(U) = p'^{-1}(U) \arrow[rr, "h'=h|_{E'\cap p^{-1}(U)}", "\approx"'] \arrow[dr, "p'"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & U\times S^{n-1} \arrow[dl, "p_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Ова дефиниција не зависи од локалне тривијализације, а јасно је да при произвољној локалној тривијализацији $h:p^{-1}(U)\to U\times D^n$ тачкама из $E'\cap p^{-1}(U)$ одговарају тачке из $U\times S^{n-1}$

$\Longrightarrow$ $p'=p|_{E'}:E'\to B$ је раслојење са слојем S^{n-1} (сферно раслојење).

$$\Longrightarrow \quad \begin{tikzcd} (D^n, S^{n-1}) \arrow[r] & (E,E') \arrow[d, "p"] \\ & B \end{tikzcd}$$ је релативна Серова фибрација.

Теорема 8: (Лере-Хирш, релативна верзија)

Нека је R комутативан прстен и $(E,E') \xrightarrow{p} B$ релативна Серова фибрација таква да важе сл. два услова:

1) за свако $b \in B$ (за сваки слој (F_b, F_b')) градуисани R-модул $H^*(F_b, F_b'; R)$ је слободан и коначног типа;

2) постоје (хомогене) класе $c_\alpha \in H^*(E,E';R)$, $\alpha \in A$, такве да за свако $b \in B$ важи да класе $i_b^*(c_\alpha)$, $\alpha \in A$ (где је $i_b : (F_b, F_b') \hookrightarrow (E,E')$), чине базу слободног R-модула $H^*(F_b, F_b'; R)$.

Тада, за произвољно $b_0 \in B$, ако је $(F, F') := (F_{b_0}, F_{b_0}')$, $i : (F,F') \hookrightarrow (E,E')$ и $S : H^*(F,F';R) \longrightarrow H^*(E,E';R)$ хомоморфизам градуисаних R-модула одређен са $S(i^*(c_\alpha)) := c_\alpha$, $\alpha \in A$, онда је пресликавање

$$\boxed{\Phi : H^*(B;R) \otimes_R H^*(F,F';R) \longrightarrow H^*(E,E';R),}$$

$$\Phi(\beta \otimes \gamma) := \underbrace{p^*(\beta)}_{\in H^*(E;R)} \cdot S(\gamma),$$

изоморфизам градуисаних R-модула.

Δ: У доказу, за све кохомолошке групе подразумевамо R коефицијенте, а такође $\otimes := \otimes_R$.

Најпре, Φ је заиста хомоморфизам градуисаних R-модула, јер је композиција два таква хомоморфизма.

$$\begin{tikzcd} H^*(B) \otimes H^*(F,F') \arrow[r, "p^* \otimes S"] \arrow[dr, "\Phi"'] & H^*(E) \otimes H^*(E,E') \arrow[d, "\cup"] \\ & H^*(E,E') \end{tikzcd}$$

За $b_1, b_2 \in B$ уочимо изоморфизам слободних продуисаних R-модула:

$$\underbrace{\varphi_{b_1,b_2} : H^*(F_{b_1}, F'_{b_1}) \twoheadrightarrow H^*(F_{b_2}, F'_{b_2})}, \quad \underline{\underline{\varphi_{b_1,b_2}\left(i^*_{b_1}(c_\alpha)\right) := i^*_{b_2}(c_\alpha)}}, \ \underline{\alpha\in A}$$

Докажимо сад да, ако, уз претпоставке 1) и 2), закључак теореме важи за неко (било које) $b_0 \in B$, онда важи за све $b \in B$. (То ће нам омогућити да, при доказивању, на погодан начин биремо тачку $b_0 \in B$.) (HC)

За $b \in B$, нека је $\underbrace{S_b : H^*(F_b, F'_b) \to H^*(E,E')}$, $\underline{S_b(i^*_b(c_\alpha)) := c_\alpha}$, $\underline{\alpha\in A}$, $(S_{b_0} = S)$

$\underbrace{\Phi_b : H^*(B)\otimes H^*(F_b,F'_b) \longrightarrow H^*(E,E')}$, $\underline{\Phi_b(\beta\otimes\varepsilon) := p^*(\beta)\cdot S_b(\varepsilon)}$ $\quad (\Phi_{b_0} = \Phi)$.

$$\begin{tikzcd}
H^*(F,F') \arrow[dr, "S"] & \\
 & H^*(E,E') \\
H^*(F_b,F'_b) \arrow[uu, "\varphi_{b,b_0}"] \arrow[ur, "S_b"'] &
\end{tikzcd}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{tikzcd}
H^*(B)\otimes H^*(F_b,F'_b) \arrow[d, "1\otimes\varphi_{b,b_0}"'] \arrow[dr, "\Phi_b"] & \\
H^*(B)\otimes H^*(F,F') \arrow[r, "\Phi"'] & H^*(E,E')
\end{tikzcd}$$

$$S(\varphi_{b,b_0}(\underline{i^*_b c_\alpha})) = S(i^*(c_\alpha)) = c_\alpha = S_b(\underline{i^*_b c_\alpha}), \ \alpha\in A \quad ✓✓$$

$$\begin{tikzcd}
\beta\otimes\varepsilon \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & p^*(\beta)\cdot S_b(\varepsilon) \arrow[d, equal, "✓"] \\
\beta\otimes\varphi_{b,b_0}(\varepsilon) \arrow[r, mapsto] & p^*(\beta)\cdot S(\varphi_{b,b_0}(\varepsilon))
\end{tikzcd}$$

$\Longrightarrow$ (HC) ✓✓

Нека је сад $f : X \to B$ непр. пресликавање. Повлачења Серових фибрација p и $p' = p|_{E'}$ помоћу f нам дају релативну Серову фибрацију $(f^*(E), f^*(E')) \xrightarrow{\tilde p}$ коју називамо повлачењем рел. Серове фибрације p помоћу f.

Докажимо да, ако p задовољава услове теореме, онда и $\tilde p$ задовољава услове теореме.

$$\begin{tikzcd}
e \arrow[d, mapsto, "j"'] & (F,F') \arrow[r, equal] \arrow[d, "j"] & (F,F') \arrow[d, "i"] \\
(x,e) & (f^*(E), f^*(E')) \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\tilde p"'] & (E,E') \arrow[d, "p"] \\
 & X \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

$\underline{\underline{x\in X}}$, $\quad F := F_{f(x)}$, $\quad F_x = \{x\}\times F_{f(x)} = F$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (x,e) \text{ "=" } e$

Слично, $F' := F'_{f(x)}$, $\quad F'_x = F'$

1) ✓✓

2) $q^*(c_\alpha) \in H^*(f^*(E), f^*(E'))$, $\alpha\in A$ ✓✓

Такође, ако је $S_x : H^*(F,F') \longrightarrow H^*(f^*(E), f^*(E'))$ хомоморфизам R-модула дат са

$$S_x(\underbrace{j^* q^* c_\alpha}_{\text{базни у } H^*(F,F')}) := q^* c_\alpha, \quad \alpha \in A,$$

онда комутира дијаграм (1):

$$\begin{tikzcd}
 & H^*(F,F') \arrow[dl, "S_x"'] \arrow[dr, "S"] \arrow[d, phantom, "(1)"] & \\
H^*(f^*(E), f^*(E')) & & H^*(E,E') \arrow[ll, "q^*"']
\end{tikzcd}$$

$$S_x(\underbrace{j^* q^* c_\alpha}_{= i^* c_\alpha}) = q^* c_\alpha = q^* S \underline{i^* c_\alpha}, \quad \alpha \in A. \checkmark$$

Поред тога, ако је

$$\Phi_x : H^*(X) \otimes H^*(F,F') \longrightarrow H^*(f^*(E), f^*(E'))$$

дато са $\Phi_x(\xi \otimes \gamma) = \tilde{p}^*(\xi) \cdot S_x(\gamma)$, онда комутира и дијаграм (2).

$$\begin{tikzcd}
H^*(B) \otimes H^*(F,F') \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "f^* \otimes 1"'] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & H^*(E,E') \arrow[d, "q^*"] \\
H^*(X) \otimes H^*(F,F') \arrow[r, "\Phi_x"] & H^*(f^*(E), f^*(E'))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\beta \otimes \gamma \arrow[r, mapsto] \arrow[dd, mapsto] & p^*(\beta) \cdot S(\gamma) \arrow[d, mapsto] \\
 & q_E^* p^* \beta \cdot q^* S(\gamma) \arrow[d, phantom, "(1)\,\|"] \\
f^*(\beta) \otimes \gamma \arrow[r, mapsto] & \tilde{p}^* f^* \beta \cdot S_x(\gamma)
\end{tikzcd}$$

На основу природности дугог тачног низа хомотопских група и 5-леме, из (E) и (E') видимо да, ако је f n-еквиваленција ($n \in \mathbb{N}_0$), онда су и q_E и $q_{E'}$ n-еквиваленције, па онда и у кохомологији индукују изоморфизме у димензијама $< n$. Зато и q индукује изоморфизме у кохомологији у димензијама $< n$ (*)

$$\begin{tikzcd}
f^*(E) \arrow[r, "q_E"] \arrow[d, "\tilde{p}"'] \arrow[dr, phantom, "(E)"] & E \arrow[d, "p"] \\
X \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
f^*(E') \arrow[r, "q_{E'}"] \arrow[d, "\tilde{p}'"'] \arrow[dr, phantom, "(E')"] & E' \arrow[d, "p'"] \\
X \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

(опет на основу 5-леме и природности дугог тачног кохомолошког низа пара;

$$\begin{tikzcd}
(f^*(E'), \emptyset) \arrow[r, hook] \arrow[d, "q_{E'}"'] & (f^*(E), \emptyset) \arrow[r, hook] \arrow[d, "q_E"] & (f^*(E), f^*(E')) \arrow[d, "q"] \\
(E', \emptyset) \arrow[r, hook] & (E, \emptyset) \arrow[r, hook] & (E, E')
\end{tikzcd}$$

).

Сада, из (*), дијаграма (2) и чињенице (НС) закључујемо да важи следеће. Ако је f слаба хомотопска еквиваленција и ако теорема важи за повлачење $(f^*(E), f^*(E')) \xrightarrow{\tilde{p}} X$, онда важи и за $(E, E') \xrightarrow{p} B$. (ПОБ)

Из теореме о CW-апроксимацији сад закључујемо да је довољно доказати теорему у случају кад је B CW-комплекс.

$\boxed{1^\circ}$ <u>B коначно-димензион</u>

<u>Индукцијом по $\dim B$:</u>

$\dim B = 0 \Longrightarrow$ <u>B је дискретан</u> $\Longrightarrow B = \bigsqcup_{b\in B}\{b\}$

тополошке дисј. уније

$\Longrightarrow E = \bigsqcup_{b\in B} F_b \quad , \quad E' = \bigsqcup_{b\in B} F_b'$

<u>$b_0\in B$</u> фикс.

Треба доказати да је, за све $m\in\mathbb{N}_0$,

$$\Phi : \big(H^*(B)\otimes H^*(F,F')\big)_m \longrightarrow H^m(E,E')$$

$$\big(H^*(B)\otimes H^*(F,F')\big)_m = \bigoplus_{k=0}^{m} H^k(B)\otimes H^{m-k}(F,F') = H^0(B)\otimes H^m(F,F')$$

изоморфизам.

За дато $b\in B$ уочимо следећи комутативни дијаграм ($j_b : \{b\}\hookrightarrow B$):

$$\begin{tikzcd}
H^0(B)\otimes H^m(F,F') \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "j_b^*\otimes 1"'] & H^m(E,E') \arrow[d, "i_b^*"] \\
H^0(\{b\})\otimes H^m(F,F') \arrow[r, dashed, "\psi_b"] \arrow[d, "k\otimes 1"'] & H^m(F_b,F_b') \\
R\otimes H^m(F,F') \arrow[r] & H^m(F,F') \arrow[u, "\varphi_{b_0,b}"']
\end{tikzcd}$$

$$r\otimes\gamma \longmapsto r\cdot\gamma$$

$$\begin{tikzcd}
\beta\otimes\gamma \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & p^*(\beta)\cdot S(\gamma) \arrow[d, mapsto] \\
j_b^*(\beta)\otimes\gamma & \hat{i}_b^* p^*(\beta)\cdot i_b^* S(\gamma) \\
(r\cdot 1)\otimes\gamma \arrow[d, mapsto] & p_b^* j_b^*(\beta)\cdot i_b^* S(\gamma) \\
r\otimes\gamma \arrow[r, mapsto] & r\cdot\gamma
\end{tikzcd}$$

$j_b^*(\beta)\otimes\gamma = (r\cdot 1)\otimes\gamma$

$\hat{i}_b^* p^*(\beta)\cdot i_b^* S(\gamma) \overset{(\circ)}{=} p_b^* j_b^*(\beta)\cdot i_b^* S(\gamma) = (r\cdot 1)\cdot i_b^* S(\gamma) = r\cdot i_b^* S(\gamma) = r\cdot\gamma$

$$\begin{tikzcd}
F_b \arrow[r, hook, "\hat{i}_B"] \arrow[d, "p_b"'] \arrow[dr, phantom, "(\circ)"] & E \arrow[d, "p"] \\
\{b\} \arrow[r, hook, "j_b"] & B
\end{tikzcd}$$

$\varphi_{b_0,b}(\underline{i^* c_\alpha}) = i_b^* c_\alpha = i_b^* S(\underline{i^* c_\alpha})$, $\alpha\in A$

базни у $H^*(F,F')$

$\Longrightarrow \boxed{\varphi_{b_0,b} = i_b^*\circ S}$

$k : H^0(\{b\}) \longrightarrow R$ канонски изоморфизам, $H^0(\{b\}) = R\langle 1\rangle$

Применом $\prod\limits_{b\in B}$ на доњи део дијаграма добијамо:

$$\begin{tikzcd}
 & H^0(B)\otimes H^m(F,F') \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dl, "(\prod_{b\in B} j_b^*)\otimes 1"'] \arrow[d, "\prod_{b\in B}(j_b^*\otimes 1)"] & H^m(E,E') \arrow[d, "\prod_{b\in B} i_b^*"] \\
\left(\prod\limits_{b\in B} H^0(\{b\})\right)\otimes H^m(F,F') \arrow[r, "\Psi"] & \prod\limits_{b\in B}\left(H^0(\{b\})\otimes H^m(F,F')\right) \arrow[r, "\prod_{b\in B}\Psi_b"] & \prod\limits_{b\in B} H^m(F_b,F_b')
\end{tikzcd}$$

Како је $H^m(F,F')$ коначно генерисан, слободан R-модул, то постоји изоморфизам Ψ т. д. дијаграм комутира:

$\Longrightarrow$ Φ је изоморфизам. ✓

$\boxed{\dim B =: n \geq 1}$ Претп. да теорема важи кад год је базни простор CW-комплекс димензије $< n$.

$\{e^n_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$ - скуп свих n-ћелија комплекса B

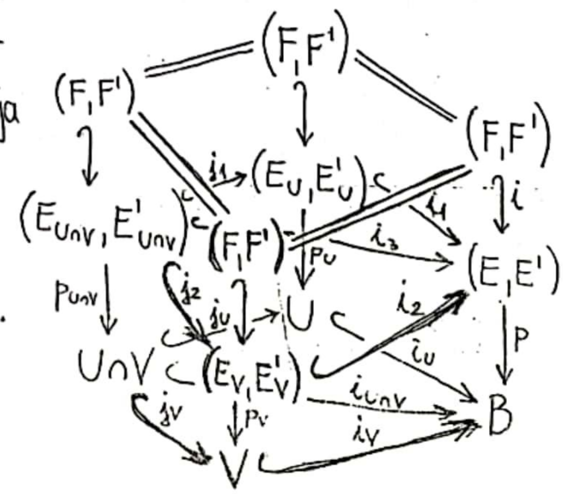
За $\lambda\in\Lambda$ одаберимо $O_\lambda \in e^n_\lambda$.

$\underline{\underline{U := \bigsqcup\limits_{\lambda\in\Lambda} e^n_\lambda}} \in \mathcal{T}_B$, $\underline{\underline{V := B\setminus\{O_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}}} \in \mathcal{T}_B$, $U\cup V = B$

$E_U := p^{-1}(U)$, $E_V := p^{-1}(V)$, $E_{U\cap V} := p^{-1}(U\cap V) = E_U\cap E_V$.

$E'_U := p'^{-1}(U) = E_U\cap E'$, $E'_V = p'^{-1}(V) = E_V\cap E'$, $E'_{U\cap V} = p'^{-1}(U\cap V) = E'_U\cap E'_V$

Нека је $\underline{b_0\in U\cap V}$. Уочимо повлачења релативне фибрације p помоћу инклузија (в. слику десно). Како p задовољава услове теореме, то и сва ова повлачења задовољавају услове теореме. Тада имамо и одговарајуће дијаграме (1) и (2) за сва ова повлачења.



Уочимо Мајер-Вијеторисов низ за исецајућу тројку $(B;U,V)$. На исти начин као у доказу Кинетове формуле добијамо горњи тачни низ на наредном дијаграму (уочени Мајер-Вијеторисов низ тензоришемо слободним R-модулом $H^0(F,F')$, па исто то са $H^1(F,F')$, $H^2(F,F')$, …; затим сваки наредни тачни низ транслирамо за три места удесно; па на крају узмемо њихову директну суму), док је доњи релативни (кохомолошки) Мајер-Вијеторисов низ за $E'\subseteq E$ и исецајуће тројке $(E;E_U,E_V)$ и $(E';E'_U,E'_V)$. 11!

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \bigoplus_{k=0}^{m} H^k(B)\otimes H^{m-k}(F,F') \arrow[r, "(i_U^*\otimes 1,\, i_V^*\otimes 1)"] \arrow[d, "\Phi=\Phi_B"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{I}"] & \bigoplus_{k=0}^{m}\left(H^k(U)\otimes H^{m-k}(F,F')\oplus H^k(V)\otimes H^{m-k}(F,F')\right) \arrow[r, "j_U^*\otimes 1 - j_V^*\otimes 1"] \arrow[d, "\Phi_U\oplus\Phi_V"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{II}"] & {} \\
\cdots \arrow[r] & H^m(E,E') \arrow[r, "(i_1^*,\, i_2^*)"] & H^m(E_U,E'_U)\oplus H^m(E_V,E'_V) \arrow[r, "j_1^*-j_2^*"] & {}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "j_U^*\otimes 1 - j_V^*\otimes 1"] & \bigoplus_{k=0}^{m} H^k(U\cap V)\otimes H^{m-k}(F,F') \arrow[r, "\delta\otimes 1"] \arrow[d, "\Phi_{U\cap V}"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{III}"] & \bigoplus_{k=0}^{m+1} H^k(B)\otimes H^{m+1-k}(F,F') \arrow[r] \arrow[d, "\Phi_B=\Phi"] & \cdots \\
{} \arrow[r, "j_1^*-j_2^*"] & H^m(E_{U\cap V},E'_{U\cap V}) \arrow[r, "\delta"] & H^{m+1}(E,E') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

(1806)

Комутативност квадрата I и II непосредно следи из комутативности дијаграма (2) за одговарајућа повлачења. Остаје да се докаже да и III комутира. Како је $H^*(F,F')$ слободан R-модул с базом $\{i^*c_\alpha \mid \alpha\in A\}$, то је довољно за свако $\alpha\in A$ и све $x\in H^*(U\cap V)$ проверити да је

$$\delta(p_{U\cap V}^*x\cdot i_3^*c_\alpha)\overset{?}{=}p^*\delta(x)\cdot c_\alpha,$$

$$\begin{tikzcd}
x\otimes i^*c_\alpha \arrow[r, mapsto, "\delta\otimes 1"] \arrow[d, mapsto, "\Phi_{U\cap V}"'] & \delta(x)\otimes i^*c_\alpha \arrow[d, mapsto, "\Phi"] \\
p_{U\cap V}^*x\cdot \overbrace{S_{U\cap V}(i^*c_\alpha)}^{i_3^*c_\alpha \overset{(1)}{=}} \arrow[r, mapsto, "\delta"] & ? \qquad p^*\delta(x)\cdot c_\alpha
\end{tikzcd}$$

Нека је $k=|x|$ и $m=k+|c_\alpha|$.

$\varphi\in C^k(U\cap V)$ - коцикл т.д. је $\underline{\underline{x=[\varphi]}}$.

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & C^{k+1}(B) \arrow[dl, "(i_U^\#,\, i_V^\#)"'] \arrow[d, "\nu^\#"] & \\
0 & C^{k+1}(U\cap V) \arrow[l] \arrow[u] & C^{k+1}(U)\oplus C^{k+1}(V) \arrow[l, "j_U^\# - j_V^\#"'] \arrow[u] & C^{k+1}(U+V) \arrow[l, "\beta"'] & 0 \arrow[l] \\
0 & C^{k}(U\cap V) \arrow[l] \arrow[u, "\delta"] & C^{k}(U)\oplus C^{k}(V) \arrow[l, "j_U^\# - j_V^\#"'] \arrow[u, "\delta\oplus\delta"] & C^{k}(U+V) \arrow[l, "\gamma"'] \arrow[u, "\delta"] & 0 \arrow[l] \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & (\delta y_1, \delta y_2) & z\in C^{k+1}(U+V) \text{ коцикл} \arrow[l, mapsto, "\beta"'] \\
\varphi & (y_1, y_2) \arrow[l, mapsto, "j_U^\# - j_V^\#"'] \arrow[u, mapsto] &
\end{tikzcd}$$

$\boxed{\delta(x)=y}$, где је $y\in H^{k+1}(B)$ т.д. је $\nu^* y=[z]$

Ако је $\psi\in C^{k+1}(B)$ коцикл т.д. је $\underline{\underline{y=[\psi]}}$ и ако је $a\in C^k(U+V)$ т.д. је $\delta(a)=z-\nu^\#\psi$, онда за $(\varphi_U,\varphi_V):=(y_1,y_2)-\gamma(a)$ важи да је

$$\boxed{\begin{tikzcd}
 & (\delta\varphi_U, \delta\varphi_V) & \psi \arrow[l, mapsto, "(i_U^\#,\, i_V^\#)"'] \\
\varphi & (\varphi_U, \varphi_V) \arrow[l, mapsto, "j_U^\# - j_V^\#"'] \arrow[u, mapsto, "\delta\oplus\delta"] &
\end{tikzcd}}$$

$$\begin{aligned}
\underline{(\delta\oplus\delta)(\varphi_U,\varphi_V)} &= (\delta y_1,\delta y_2)-\beta\delta(a)\\
&= \cancel{(\delta y_1,\delta y_2)}-\cancel{(\delta y_1,\delta y_2)}+\beta\nu^\#\psi\\
&= \underline{(i_U^\#\psi,\, i_V^\#\psi)}; \quad \underline{(*)}
\end{aligned}$$

$$\underline{(j_U^\#-j_V^\#)(\varphi_U,\varphi_V)}=(j_U^\#-j_V^\#)(y_1,y_2)-(j_U^\#-j_V^\#)\gamma(a)=\underline{\underline{\varphi}}. \quad \underline{\underline{(**)}}$$

Ако је $\xi_\alpha\in C^{m-k}(E,E')$ коцикл т.д. је $\underline{\underline{c_\alpha=[\xi_\alpha]}}$, онда је

$\underline{\underline{p^*\delta(x)\cdot c_\alpha}}=[p^\#\psi]\cdot[\xi_\alpha]=\underline{\underline{[p^\#\psi\smile\xi_\alpha]}}.$

$\underline{\underline{p_{U\cap V}^* x\cdot i_3^* c_\alpha}}=[p_{U\cap V}^\#\varphi]\cdot[i_3^\#\xi_\alpha]=\underline{\underline{[p_{U\cap V}^\#\varphi\smile i_3^\#\xi_\alpha]}}.$

Сад је довољно показати да постоје кoланци $\theta_U\in C^m(E_U,E_U')$ и $\theta_V\in C^m(E_V,E_V')$ т.д. је

$$j_1^\#\theta_U-j_2^\#\theta_V=p_{U\cap V}^\#\varphi\smile i_3^\#\xi_\alpha;$$

$$\delta\theta_U=i_1^\#(p^\#\psi\smile\xi_\alpha);$$

$$\delta\theta_V=i_2^\#(p^\#\psi\smile\xi_\alpha).$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \vdots & & \vdots & & \\
 & & & & & C^{m+1}(E,E') \arrow[dll, "(i_1^\#,i_2^\#)"'] \arrow[d, "\mu^\#"] \\
0 & C^{m+1}(E_{U\cap V},E'_{U\cap V}) \arrow[l] \arrow[u] & & C^{m+1}(E_U,E'_U)\oplus C^{m+1}(E_V,E'_V) \arrow[ll, "j_1^\#-j_2^\#"'] \arrow[u] & & C^{m+1}(E_U+E_V,E'_U+E'_V) \arrow[ll] & \arrow[l] \\
0 & C^{m}(E_{U\cap V},E'_{U\cap V}) \arrow[l] \arrow[u, "\delta"] & & C^{m}(E_U,E'_U)\oplus C^{m}(E_V,E'_V) \arrow[ll, "j_1^\#-j_2^\#"'] \arrow[u, "\delta\oplus\delta"] & & C^{m}(E_U+E_V,E'_U+E'_V) \arrow[ll] \arrow[u, "\delta"] & \arrow[l] \\
 & \vdots \arrow[u] & & \vdots \arrow[u] & & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Нека је $\theta_U := \overbrace{p_U^\# \varphi_U}^{\in C^k(E_U)} \cup \overbrace{i_1^\# \xi_\alpha}^{\in C^{m-k}(E_U,E'_U)} \in C^m(E_U,E'_U)$;

$\theta_V := p_V^\# \varphi_V \cup i_2^\# \xi_\alpha \in C^m(E_V,E'_V)$

$$\begin{tikzcd}
(E'_V,\emptyset) \arrow[r, hook] & (E_V,\emptyset) \arrow[r, hook] & (E_V,E'_V) \\
(E'_{U\cap V},\emptyset) \arrow[r, hook] \arrow[u, hook] \arrow[d, hook] & (E_{U\cap V},\emptyset) \arrow[r, hook] \arrow[u, hook, "k_2"'] \arrow[d, hook, "k_1"'] & (E_{U\cap V},E'_{U\cap V}) \arrow[u, hook, "j_2"'] \arrow[d, hook, "j_1"'] \\
(E'_U,\emptyset) \arrow[r, hook] & (E_U,\emptyset) \arrow[r, hook] & (E_U,E'_U)
\end{tikzcd}$$

$$j_1^\#\theta_U - j_2^\#\theta_V = k_1^\# p_U^\# \varphi_U \cup j_1^\# i_1^\# \xi_\alpha - k_2^\# p_V^\# \varphi_V \cup j_2^\# i_2^\# \xi_\alpha$$
$$\overset{(+)}{=} p_{U\cap V}^\# j_U^\# \varphi_U \cup i_3^\# \xi_\alpha - p_{U\cap V}^\# j_V^\# \varphi_V \cup i_3^\# \xi_\alpha$$
$$= \left(p_{U\cap V}^\# j_U^\# \varphi_U - p_{U\cap V}^\# j_V^\# \varphi_V\right) \cup i_3^\# \xi_\alpha$$
$$\overset{(**)}{=} p_{U\cap V}^\# \varphi \cup i_3^\# \xi_\alpha \quad \checkmark\checkmark$$

$$\begin{tikzcd}
E_{U\cap V} \arrow[r, hook, "k_1"] \arrow[d, "p_{U\cap V}"'] \arrow[dr, phantom, "(+)"] & E_U \arrow[d, "p_U"] \\
U\cap V \arrow[r, hook, "j_U"] & U
\end{tikzcd}$$

$$\delta\theta_U = \delta(p_U^\# \varphi_U \cup i_1^\# \xi_\alpha) = \delta p_U^\# \varphi_U \cup i_1^\# \xi_\alpha$$

став 18р II, $i_1^\#\xi_\alpha$ је коцикл (јер је ξ_α коцикл)

$$= p_U^\# \delta\varphi_U \cup i_1^\# \xi_\alpha \overset{(*)}{=} p_U^\# i_U^\# \psi \cup i_1^\# \xi_\alpha$$
$$\overset{(*)}{=} l_1^\# p^\# \psi \cup i_1^\# \xi_\alpha = i_1^\#(p^\#\psi \cup \xi_\alpha). \quad \checkmark\checkmark$$

$$\begin{tikzcd}
E_U \arrow[r, hook, "l_1"] \arrow[d, "p_U"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & E \arrow[d, "p"] \\
U \arrow[r, hook, "i_U"] & B
\end{tikzcd}$$

Слично, $\delta\theta_V = i_2^\#(p^\#\psi \cup \xi_\alpha)$, па коначно имамо да комутира и квадрат (III) на дијаграму (1806).

$U = \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} e^n_\lambda \simeq \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} *_\lambda$ (дискретан простор (0-дим. CW-комплекс)) $\xRightarrow{\text{(ИХ), (ПОВ)}}$ теорема важи за рел. Серову фибрацију $(E_U,E'_U) \xrightarrow{p_U} U$

$\Longrightarrow$ Φ_U је изоморфизам. (3)

$V = B\setminus\{o_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\} \simeq B^{n-1}$ $\xRightarrow{\text{(ИХ), (ПОВ)}}$ теорема важи за $(E_V,E'_V) \xrightarrow{p_V} V$

(CW-компл. дим. $n-1$) $\Longrightarrow$ Φ_V је изоморфизам. (4)

$U\cap V = \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} e^n_\lambda\setminus\{o_\lambda\} \simeq \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} S^{n-1}_{(\lambda)}$ $\xRightarrow{\text{(ИХ), (ПОВ)}}$ $\Phi_{U\cap V}$ је изоморфизам. (5)

(1806), (3), (4), (5), 5-лема $\Longrightarrow$ Φ је изоморфизам. ✓✓

$\boxed{2^\circ}$ **B бесконачно-димензион**

Као и пре, довољно је доказати да је за неко $b_0 \in B$ (узмимо да је $b_0 \in B^0 \subset B$) и све $m \in \mathbb{N}_0$

$$\Phi : \underbrace{\left(H^*(B) \otimes H^*(F,F')\right)_m}_{\cong \bigoplus_{k=0}^{m} H^k(B) \otimes H^{m-k}(F,F')} \longrightarrow H^m(E,E')$$

изоморфизам.

Нека је $n > m$. (B, B^n) је n-повезан $\Longrightarrow$ $i_n : B^n \hookrightarrow B$ је n-еквиваленција

$$\begin{tikzcd}
(F,F') \arrow[r, equal] \arrow[d, hook] & (F,F') \arrow[d, hook] \\
(E_{B^n}, E'_{B^n}) \arrow[r, hook, "j_n"] \arrow[d] & (E,E') \arrow[d, "p"] \\
B^n \arrow[r, hook, "i_n"] & B
\end{tikzcd}$$

$E_{B^n} = p^{-1}(B^n)$, $E'_{B^n} = E' \cap E_{B^n}$

$\overset{(*)}{\Longrightarrow}$ $j_n : (E_{B^n}, E'_{B^n}) \hookrightarrow (E,E')$ индукује изоморфизме у кохомологији у димензијама $< n$

$\Longrightarrow$ $i_n^* : H^k(B) \to H^k(B^n)$ и $j_n^* : H^k(E,E') \to H^k(E_{B^n}, E'_{B^n})$ су изоморфизми за $k \leq m < n$.

$$\Longrightarrow \quad \begin{tikzcd}
\left(H^*(B) \otimes H^*(F,F')\right)_m \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, tail, "i_n^* \otimes 1"'] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & H^m(E,E') \arrow[d, tail, "j_n^*"] \\
\left(H^*(B^n) \otimes H^*(F,F')\right)_m \arrow[r, tail, two heads, "\Phi_{B^n}", "\boxed{1^\circ}"'] & H^m(E_{B^n}, E'_{B^n})
\end{tikzcd}$$

✓✓ ∎

Овај доказ теореме 8, наравно, ради и у случају кад је $E' = \emptyset$ (тада је $F'_b = F' = f^*(E') = E'_U = E'_V = E'_{U \cap V} = E'_{B^n} = \emptyset$, $k_1 = j_1$, $k_2 = j_2$, $l_1 = i_1, \ldots$) и тако одмах добијамо апсолутну верзију теореме Лере-Хирша.

Последица 9: (Лере-Хиршова теорема) Нека је R комутативан прстен и $p: E \to B$ Серова фибрација таква да важе сл. два услова:

1) за свако $b \in B$ (за сваки слој F_b) градуисани R-модул $H^*(F_b;R)$ је слободан и коначног типа;

2) постоје (хомогене) класе $c_\alpha \in H^*(E;R)$, $\alpha \in A$, такве да за свако $b \in B$ важи да класе $i_b^*(c_\alpha)$, $\alpha \in A$ (где је $i_b: F_b \hookrightarrow E$) чине базу слободног R-модула $H^*(F_b;R)$

Тада, за произвољно $b_0 \in B$, ако је $F := F_{b_0}$, $i: F \hookrightarrow E$ и $S: H^*(F;R) \longrightarrow H^*(E;R)$ хомоморфизам градуисаних R-модула одређен са $S(i^*(c_\alpha)) := c_\alpha$, $\alpha \in A$, онда је пресликавање

$$\boxed{\Phi: H^*(B;R) \otimes_R H^*(F;R) \longrightarrow H^*(E;R),}$$
$$\Phi(\beta \otimes \gamma) := p^*(\beta) \cdot S(\gamma),$$

изоморфизам градуисаних R-модула.

Напомена 1: Слично као код Кинетове формуле, у теореми 8 и последици 9 се претпоставка да је $H^*(F_b, F_b';R)$ (односно $H^*(F_b;R)$) коначног типа (из услова 1)) може заменити претпоставком да је B CW-комплекс са коначно много ћелија у свакој димензији (к.т.) (или да B бар има такву CW-апроксимацију). Наиме, да бисмо имали S и Φ довољна нам је слобода R-модула $H^*(F, F';R)$ (односно $H^*(F;R)$), па ако изоставимо претпоставку „коначног типа", онда имамо и дијаграм (2) из доказа, а и чињеницу (ПОВ). Једино место где је коришћена претпоставка „коначног типа" је у бази индукције на полеђини листа 114, и то за постојање изоморфизма Ψ. Међутим, тај изоморфизам постоји и без те претпоставке ако је B коначан, што следи из претпоставке (КЋ) јер је B ту CW-комплекс димензије нула. И индуктивни корак пролази јер је Λ сад коначан скуп...

<u>Напомена 2</u>: Ако је <u>$p: E \to B$ Хуревићева фибрација и B путно повезан</u>, онда се у последици 9 услов 2) може заменити једноставнијим условом – <u>да је за једно (било које) $b_0 \in B$ ($F := F_{b_0}$, $i: F \hookrightarrow E$) $i^*: H^*(E;R) \longrightarrow H^*(F;R)$ епиморфизам</u>; при чему се, после, за S може узети било који хомоморфизам градуисаних R-модула са својством да је $i^* \circ S = \mathbb{1}_{H^*(F;R)}$ (такав постоји јер је i^* „на", а $H^*(F;R)$ слободан).

Наиме, тада за произвољно $b \in B$, избором пута $u: I \longrightarrow B$ који спаја b_0 са b и подизања $H: F \times I \longrightarrow E$ т.д. комутирају троуглови на дијаграму десно, добијамо хомотопску еквиваленцију $l_u: F \longrightarrow F_b$, $l_u(y) := H(y,1)$.

$$\begin{tikzcd}
F \times \{0\} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\
F \times I \arrow[r, "u \circ p_I"'] \arrow[ur, dashed, "H"] & B
\end{tikzcd}$$

Тада је H, у ствари, хомотопија између инклузије i и композиције $i_b \circ l_u$, па леви дијаграм на слици испод комутира до на хомотопију.

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[dr, hook, "i"] \arrow[dd, "l_u"', "\simeq"] & & & H^*(F;R) \arrow[dr, dashed, bend left, "S"] & \\
& E \arrow[r, dashed] & {} & & H^*(E;R) \arrow[ul, "i^*"'] \arrow[dl, "i_b^*"] \\
F_b \arrow[ur, hook, "i_b"'] & & & H^*(F_b;R) \arrow[uu, "l_u^*"] &
\end{tikzcd}$$

Зато десни комутира, па ако је $\{\gamma_\alpha \mid \alpha \in A\}$ нека база за $H^*(F;R)$ и $S: H^*(F;R) \longrightarrow H^*(E;R)$ т.д. је $i^* \circ S = \mathbb{1}_{H^*(F;R)}$, онда класе $c_\alpha := S(\gamma_\alpha)$, $\alpha \in A$, очигледно задовољавају услов 2) из последице.

Приметимо још да у овом случају и услов 1) последице 9 можемо

да поједноставимо: <u>$H^*(F;R)$ је слободан и коначног типа</u>, где је $\boxed{11\varepsilon}$
<u>F неки (било који) слој од p.</u>

Теорема Лере-Хирша, тј. њен закључак, се често формулише и на другачији начин. Та друга формулација није незанимљива ни неоперативна, па ћемо је зато и навести. У ту сврху, пређимо на једно алгебарско разматрање.

R - комутативан прстен

M - градуисана R-алгебра с јединицом

N - градуисани R-модул

На градуисаном R-модулу $M\otimes_R N$ уводимо структуру M-модула (прецизније градуисаног модула над градуисаним прстеном M) помоћу хомоморфизма прстена

$$\begin{array}{ccl} M & \longrightarrow & \operatorname{End}(M\otimes_R N) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \\ m & \longmapsto & (a\otimes b \longmapsto \overset{\text{множење у } M}{(m\cdot a)}\otimes b)\,. \end{array}$$

Другим речима, $m\cdot(a\otimes b) := (m\cdot a)\otimes b$ (упореди с гледањем листа $\boxed{11}$).

<u>Ако је N слободан R-модул са базом $\{n_\alpha \mid \alpha\in A\}$, онда је $M\otimes_R N$ слободан M-модул са базом $\{1\otimes n_\alpha \mid \alpha\in A\}$.</u> Наиме,

$$M\otimes_R N \cong M\otimes_R\Big(\bigoplus_{\alpha\in A} R\Big) \cong \bigoplus_{\alpha\in A} M\otimes_R R \cong \bigoplus_{\alpha\in A} M\,.$$

$$a\otimes\Big(\sum_{i=1}^{k} \underset{R}{\underset{\cap}{r_i}}\, n_{\alpha_i}\Big) \longleftrightarrow a\otimes\{r_\alpha\}_{\alpha\in A} \longleftrightarrow \{a\otimes r_\alpha\}_{\alpha\in A} \longleftrightarrow \{r_\alpha a\}_{\alpha\in A}$$

$$r_\alpha = \begin{cases} r_i\,, & \alpha=\alpha_i\,,\ i=\overline{1,k} \\ 0\,, & \text{иначе} \end{cases}$$

Ово су изоморфизми R-модула, али $\bigoplus_{\alpha\in A} M$ је и слободан M-модул, при чему је спољна операција дата са $m\cdot\{a_\alpha\}_{\alpha\in A} := \{\overset{\text{множење у } M}{m\cdot a_\alpha}\}_{\alpha\in A}$, а (канонска) база је $\{m_\alpha \mid \alpha\in A\}$, где је за $\alpha_0\in A$ $\quad (m_{\alpha_0})_\alpha = \begin{cases} 1^{\in M}, & \alpha=\alpha_0 \\ 0\,, & \alpha\neq\alpha_0 \end{cases}$.

Одавде видимо да је наведена композиција заправо и изоморфизам M-модула: $m\cdot\left(a\otimes\left(\sum_{i=1}^{k} r_i n_{\alpha_i}\right)\right)=(m\cdot a)\otimes\left(\sum_{i=1}^{k} r_i n_{\alpha_i}\right)\longleftrightarrow \{r_\alpha\cdot(m\cdot a)\}_{\alpha\in A}=\{m\cdot(r_\alpha a)\}_{\alpha\in A}$

$$= m\cdot\{r_\alpha a\}_{\alpha\in A}$$

као и да је једна база слободног M-модула $M\otimes_R N$ $\{1\otimes n_\alpha \mid \alpha\in A\}$:

$\underline{\underline{\alpha_0\in A}}$ $\quad \underline{\underline{1\otimes n_{\alpha_0}}}\longleftrightarrow \{r_\alpha\cdot \overset{\in M}{1}\}_{\alpha\in A}=\underline{\underline{m_{\alpha_0}}}$.

$$r_\alpha=\begin{cases}\overset{\in R}{1}, & \alpha=\alpha_0\\ 0, & \alpha\neq\alpha_0\end{cases}$$

Погледајмо сад у овом новом светлу теорему Лере-Хирша (посматраћемо теорему 8, а наравно, све исто имамо и за последицу 9, јер је ова специјалан случај теореме 8). Под условима теореме 8, дакле, имамо да је $H^*(B;R)\otimes_R H^*(F,F';R)$ слободан $H^*(B;R)$-модул са базом $\underline{\underline{\{1\otimes i^*c_\alpha \mid \alpha\in A\}}}$.

Сад, и на $H^*(E,E';R)$ можемо да уведемо структуру градуисаног модула над градуисаним прстеном $H^*(B;R)$: $\underbrace{\underset{H^*(B;R)}{\beta}\cdot\underset{H^*(E,E';R)}{\varepsilon}:=p^*(\beta)\cdot\varepsilon}$, тј.

(рел.) „кап" произв

$$H^*(B;R)\longrightarrow \mathrm{End}\left(H^*(E,E';R)\right) \text{ хомоморфизам прстена ...}$$
$$\beta\longmapsto\left(\varepsilon\longmapsto p^*(\beta)\cdot\varepsilon\right)$$

При том је $\underline{\underline{\Phi(\beta\cdot(\beta'\otimes\gamma))}}=\Phi((\beta\cdot\beta')\otimes\gamma)=p^*(\beta\cdot\beta')\cdot S(\gamma)=p^*(\beta)\cdot p^*(\beta')\cdot S(\gamma)$

$$=\beta\cdot\left(p^*(\beta')\cdot S(\gamma)\right)=\underline{\underline{\beta\cdot\Phi(\beta'\otimes\gamma)}},$$

што значи да је Φ и изоморфизам $H^*(B;R)$-модула. Такође,

$$\underline{\underline{\Phi(1\otimes i^*c_\alpha)}}=p^*(1)\cdot S(i^*c_\alpha)=\underline{\underline{c_\alpha}},\quad \underline{\alpha\in A}.$$

(МСН) Приметимо да ако је $p:E\to B$ Серова фибр. т.д. важе услови 1) и 2) Лере-Хиршове теор. (...) онда је $p^*:H^*(B;R)\to H^*(E;R)$ мономорфизам. Наиме, $\alpha\in A$ фикс., $\beta\in H^*(B;R)$, $\beta\neq 0$, $\Rightarrow \beta\cdot c_\alpha=p^*(\beta)\cdot c_\alpha \neq 0$ (из 9') $\Rightarrow \underline{\underline{p^*(\beta)\neq 0}}$.

Овим је доказана следећа теорема, коју исто зовемо „Лере-Хиршова теорема"

Теорема 8': (Лере-Хирш) Нека је R комутативан прстен и $(E,E')\xrightarrow{p}B$ релативна Серова фибрација т.д. важе услови 1) и 2) из теореме 8. Тада је $H^*(E,E';R)$ слободан $H^*(B;R)$-модул са базом $\{c_\alpha \mid \alpha\in A\}$.

(МСН)

Лема 10: Нека је X тополошки простор, $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ највише пребројив скуп (хомогених) кохомолошких класа $x_i \in H^*(X;\mathbb{Z})$, $i=1,2,\dots$, и R комутативан прстен.

(а) Ако је $\underbrace{H^*(X;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3, \dots]}$, онда је
$\boxed{H^*(X;R) = R[y_1, y_2, y_3, \dots]}$, за неке $y_i \in H^*(X;R)$, $|y_i| = |x_i|$, $i=1,2,\dots$

(б) Ако је $\underbrace{H^*(X;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3, \dots]/J(x)}$, где је $J(x)$ идеал у $\mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3, \dots]$ генерисан (највише пребројивим) скупом монома $\{m_1(x), m_2(x), \dots\}$ (под мономом подразумевамо коначан производ $\prod_i x_i^{a_i}$, $a_i \in \mathbb{N}_0$, $a_i = 0$ за $i \geq i_0$; дакле, с коефицијентом 1), онда је
$\boxed{H^*(X;R) = R[y_1, y_2, y_3, \dots]/J(y)}$, за неке $y_i \in H^*(X;R)$, $|y_i| = |x_i|$, $i=1,2,\dots$
где је $J(y)$ идеал у $R[y_1, y_2, y_3, \dots]$ генерисан скупом одговарајућих монома $\{m_1(y), m_2(y), \dots\}$ (нпр. $m_1(x) = x_2^{12} x_5^{123} x_{17}^6 \implies m_1(y) = y_2^{12} y_5^{123} y_{17}^6$)

(в) Ако је $\underbrace{H^*(X;\mathbb{Z}) = \Lambda_{\mathbb{Z}}(x_1, x_2, x_3, \dots)}$, онда је
$\boxed{H^*(X;R) = \Lambda_R(y_1, y_2, y_3, \dots)}$, за неке $y_i \in H^*(X;R)$, $|y_i| = |x_i|$, $i=1,2,\dots$

Напомена: У делу (а) мора да важи да је $|x_i|$ паран за све $i=1,2,\dots$, јер би у супротном било $x_i^2 = -x_i^2 \implies 2x_i^2 = 0 \implies x_i^2 = 0$ ↯.

Слично, у делу (б) мора бити $|x_i|$ паран за све $i=1,2,\dots$ за које је $x_i^2 \neq 0$, тј. за које ни моном x_i ни моном x_i^2 нису међу мономима $m_1(x), m_2(x), \dots$

У делу (в), пак, $|x_i|$ мора бити непаран за све $i=1,2,\dots$, ако имамо бар две класе $x_1, x_2, x_3, \dots$, јер би у супротном, ако је $|x_i|$ паран и $j \neq i$, било $x_i x_j = x_j x_i \neq -x_j x_i$ ↯.

Δ: Нека је $M(x)$ скуп свих монома над променљивим $x_1, x_2, x_3, \dots$ У сва три случаја, $H^*(X;\mathbb{Z})$ је слободан градуисан $\mathbb{Z}$-модул са базом $B(x)$ где је (а) $B(x)=M(x)$; (б) $B(x)=\{m\in M(x) \mid (\forall j)\ m_j(x)\nmid m\}$;
(в) $B(x)=\{m\in M(x) \mid (\forall i)\ x_i^2\nmid m\}$.

Докажимо да је $H^*(X;R)$ слободан градуисан R-модул са одговарајућом базом $B(y)$, где је

$$\underset{(*)}{\boxed{y_i := \varphi_*(x_i)}}, \quad i=1,2,\dots, \quad \underset{\varphi(1)=1}{\varphi:\mathbb{Z}\longrightarrow R} \text{ (једини могући) хомоморфизам прстена}$$

$M(x)$ пребројив $\Longrightarrow$ $B(x)$ пребројив $\Longrightarrow$ $H^*(X;\mathbb{Z})=\bigoplus_{n=0}^{\infty} H^n(X;\mathbb{Z})$ је пребројив

$\xRightarrow[\text{(Хечер, стр. 318)}]{\text{пропозиција 3F.12}}$ $(\forall n\in\mathbb{N}_0)$ $H_n(X)$ је коначно генерисана.

$\xRightarrow{\text{(ПР) с листа } \boxed{13}}$ $H^n(X;\mathbb{Z})\cong F_n\oplus T_{n-1}$, где је $H_n(X)=T_n\oplus F_n$, $n\in\mathbb{N}_0$

торзиони део, слободни део

$H^n(X;\mathbb{Z})$ је слободна $\forall n$ $\Longrightarrow$ $T_{n-1}=0$ за све n

$\Longrightarrow$ $(\forall n\in\mathbb{N}_0)$ $H_n(X)$ је слободна Абелова група

теор. о унив. коеф. (теор. 21 I)

$$\begin{tikzcd}
H^n(X;\mathbb{Z}) \arrow[r, tail, two heads, "\kappa"] \arrow[d, "\varphi_*"'] \arrow[dr, phantom, "\text{став 19(б) I}"] & \mathrm{Hom}(H_n(X),\mathbb{Z}) \arrow[d, "\varphi_*"] \\
H^n(X;R) \arrow[r, tail, two heads, "\kappa"] & \mathrm{Hom}(H_n(X),R)
\end{tikzcd}$$

$n\in\mathbb{N}_0$

Једна база слободне Абелове групе $H^n(X;\mathbb{Z})$ је $B_n(x)=\{m\in B(x) \mid |m|=n\}$.

$e=(e_1,e_2,\dots,e_k):=\kappa(B_n(x))$ база за $\mathrm{Hom}(H_n(X),\mathbb{Z})$

f - нека база за $H_n(X)$, $\bar{f}$ - њој дуална база за $\mathrm{Hom}(H_n(X),\mathbb{Z})$

$f=(f_1,f_2,\dots,f_k)$, $\bar{f}=(\bar{f}_1,\bar{f}_2,\dots,\bar{f}_k)$, $\bar{f}_i(f_j):=\delta_i^j$, $1\le i,j\le k$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk}\end{bmatrix} \in GL_k(\mathbb{Z}) \subset M_k(\mathbb{Z})$$ - матрица преласка с базе $\bar{f}$ на базу e

$$\underbrace{\det A \in \mathbb{Z}^* = \{-1,1\}}, \quad \underline{\underline{(1)}}$$

$e = \bar{f}\cdot A$, тј.

$$e_1 = a_{11}\bar{f}_1 + a_{21}\bar{f}_2 + \cdots + a_{k1}\bar{f}_k$$
$$\vdots$$
$$e_k = a_{1k}\bar{f}_1 + a_{2k}\bar{f}_2 + \cdots + a_{kk}\bar{f}_k$$

φ_* је хомоморфизам Абелових група, $\boxed{\varphi(\underset{\in\mathbb{Z}}{a_{ji}}) = a_{ji} \in R}$

$$\Longrightarrow \varphi_*(e_i) = a_{1i}\,\varphi_*(\bar{f}_1) + a_{2i}\,\varphi_*(\bar{f}_2) + \cdots + a_{ki}\,\varphi_*(\bar{f}_k), \quad i=\overline{1,k}$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\varphi_*(e) = \varphi_*(\bar{f})\cdot A}_{} \in M_k(R) \quad \underline{\underline{(2)}}$$

$$\varphi_*(\bar{f}_i)(f_j) = \varphi(\bar{f}_i(f_j)) = \varphi(\underset{\in\mathbb{Z}}{\delta_i^j}) = \delta_i^j \in R, \quad 1\le i,j\le k$$

$\Longrightarrow \varphi_*(\bar{f})$ је база слободног R-модула $\mathrm{Hom}(H_n(X),R) \cong \mathrm{Hom}(\bigoplus_{j=1}^k \mathbb{Z}\langle f_j\rangle, R)$

$$\cong \bigoplus_{j=1}^k \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}\langle f_j\rangle, R) \cong \bigoplus_{j=1}^k R \cong R^k.$$

$$\underbrace{\det A \overset{(1)}{\in} \{-1,1\} \subseteq R^*}$$

$\overset{(2)}{\Longrightarrow} \varkappa(\varphi_*(B_n(x))) = \varphi_*(\varkappa(B_n(x))) = \varphi_*(e)$ је база слободног R-модула $\mathrm{Hom}(H_n(X),R)$

$\varkappa: H^n(X;R) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_n(X),R)$ је изоморфизам R-модула ((ХРМ) с листа $\boxed{13}$).

$\Longrightarrow B_n(y) \overset{(*)}{=} \varphi_*(B_n(x))$ је база слободног R-модула $H^n(X;R)$. ✓

став 25 II

Остаје да се докаже да важе одговарајуће релације.

(а) $\underline{y_i y_j} \overset{(*)}{=} \varphi_*(x_i)\cdot\varphi_*(x_j) = \varphi_*(x_i x_j) = \varphi_*(x_j x_i) = \varphi_*(x_j)\cdot\varphi_*(x_i) \overset{(*)}{=} \underline{y_j y_i}$. ✓

(б) –||– ; $\underline{m_j(y)} \overset{(*)}{=} \varphi_*(m_j(x)) = \varphi_*(0) = \underline{0}$. ✓

(в) $\underline{y_i^2} \overset{(*)}{=} \varphi_*(x_i)^2 = \varphi_*(x_i^2) = \varphi_*(0) = \underline{0}$;

$y_i y_j \overset{(*)}{=} \varphi_*(x_i)\cdot\varphi_*(x_j) = \varphi_*(x_i x_j) = \varphi_*(-x_j x_i) = -\varphi_*(x_j)\cdot\varphi_*(x_i) \overset{(*)}{=} \underline{-y_j y_i}$. ✓

$\boxed{\text{Теорема 11:}}$ Ако је $1 \le k \le n$ и R комутативан прстен, онда је

$$\boxed{H^*(V_k(\mathbb{C}^n);R) = \Lambda_R(x_{2(n-k)+1}, x_{2(n-k)+3}, \dots, x_{2n-1}),}$$

као градуисана R-алгебра, при чему је $|x_i| = i$ за све $i \in \{2(n-k)+1, 2(n-k)+3, \dots, 2n-3, 2n-1\}$.

Д: Докажимо теорему за случај $R = \mathbb{Z}$, а сви остали случајеви следе из леме 10 (б).

Индукцијом по k:

$k=1$: $V_1(\mathbb{C}^n) = S^{2n-1}$, $H^*(S^{2n-1};\mathbb{Z}) = \Lambda_{\mathbb{Z}}(x_{2n-1})$, $|x_{2n-1}| = 2n-1$. ✓

$k \geq 2$: Уочимо раслојење:

$$\begin{array}{ccc} V_{k-1}(\mathbb{C}^{n-1}) & \xrightarrow{i} & V_k(\mathbb{C}^n) \\ & & \Big\downarrow p \\ & & S^{2n-1} \end{array} \qquad (4) \text{ (лист } \boxed{108})$$

ИХ $\Longrightarrow$ $\underbrace{H^*(V_{k-1}(\mathbb{C}^{n-1});\mathbb{Z}) \overset{(*)}{=} \Lambda_{\mathbb{Z}}(y_{2(n-k)+1}, y_{2(n-k)+3}, \dots, y_{2n-3}), \; |y_j| =}$

$\pi_j(S^{2n-1}) = 0$ за $j \le 2n-2$ $\xRightarrow[\text{хомот. група за (4)}]{\text{дуги тачни низ}}$ i је $(2n-2)$-еквиваленција

$\Longrightarrow$ $i^*: H^j(V_k(\mathbb{C}^n);\mathbb{Z}) \longrightarrow H^j(V_{k-1}(\mathbb{C}^{n-1});\mathbb{Z})$ је изоморфизам за $j < 2n-2$

$\Longrightarrow$ $\exists\, x_j \in H^j(V_k(\mathbb{C}^n);\mathbb{Z})$ $\quad i^* x_j \overset{(1)}{=} y_j$, $\quad j \in \{2(n-k)+1, 2(n-k)+3, \dots, 2n-3\}$

$\xRightarrow{(*)}$ $\underline{i^*: H^*(V_k(\mathbb{C}^n);\mathbb{Z}) \longrightarrow H^*(V_{k-1}(\mathbb{C}^{n-1});\mathbb{Z}) \text{ је „на"}}$; (**)

$\boxed{i^* \text{ је хомоморфизам алгебри}}$

Како је базни простор у (4) сфера S^{2n-1}, која је (пара)компактан, путно повезан T_2-простор, то је (4) и Хуревичева фибрација, па су, на основу напомене 2 (с полеђине листа $\boxed{117}$), испуњени услови Лере-Хиршове теореме, тј. последице 9 ((*) $\Longrightarrow$ 1), (**) $\Longrightarrow$ 2)).

По поменутој напомени 2 треба да нађемо хомоморфизам градуисаних $\mathbb{Z}$-модула

$$S: H^*(V_{k-1}(\mathbb{C}^{n-1});\mathbb{Z}) \longrightarrow H^*(V_k(\mathbb{C}^n);\mathbb{Z})$$

т. д. је $i^*\circ S = \mathbb{1}_{H^*(V_{k-1}(\mathbb{C}^{n-1});\mathbb{Z})}$.

За $(k-1)$-торку $a=(a_{2(n-k)+1}, a_{2(n-k)+3},\dots,a_{2n-3})\in\{0,1\}^{k-1}$ означимо са

$$y^a := y_{2(n-k)+1}^{a_{2(n-k)+1}}\, y_{2(n-k)+3}^{a_{2(n-k)+3}}\cdots y_{2n-3}^{a_{2n-3}} \in H^*(V_{k-1}(\mathbb{C}^{n-1});\mathbb{Z}).$$

$\overset{(*)}{\Longrightarrow}$ Једна база слободног $\mathbb{Z}$-модула $H^*(V_{k-1}(\mathbb{C}^{n-1});\mathbb{Z})$ је $\{y^a \mid a\in\{0,1\}^{k-1}\}$ (2)

За $a\in\{0,1\}^{k-1}$ дефинишемо $S(y^a) := x^a = x_{2(n-k)+1}^{a_{2(n-k)+1}}\, x_{2(n-k)+3}^{a_{2(n-k)+3}}\cdots x_{2n-3}^{a_{2n-3}} \in H^*(V_k(\mathbb{C}^n);\mathbb{Z})$

Како је i^* хомоморфизам алгебри, то заиста, на основу (1), важи да је

$i^*S(y^a) = i^*(x^a) = y^a$ за све $a\in\{0,1\}^{k-1}$. $\overset{(2)}{\Longrightarrow}$ $i^*\circ S = \mathbb{1}_{H^*(V_{k-1}(\mathbb{C}^{n-1});\mathbb{Z})}$

$H^*(S^{2n-1};\mathbb{Z}) = \Lambda_{\mathbb{Z}}(z)$, $|z|=2n-1$ $\overset{(2)}{\Longrightarrow}$ Једна база слободног $\mathbb{Z}$-модула $H^*(S^{2n-1};\mathbb{Z})\otimes H^*(V_{k-1}(\mathbb{C}^{n-1});\mathbb{Z})$ је $\{z^m\otimes y^a \mid m\in\{0,1\},\ a\in\{0,1\}^{k-1}\}$.

$x_{2n-1} := p^*(z)\in H^{2n-1}(V_k(\mathbb{C}^n);\mathbb{Z})$

Последица 9 $\Longrightarrow$ $H^*(S^{2n-1};\mathbb{Z})\otimes H^*(V_{k-1}(\mathbb{C}^{n-1});\mathbb{Z}) \xrightarrow{\Phi} H^*(V_k(\mathbb{C}^n);\mathbb{Z})$,

изоморфизам градуисаних $\mathbb{Z}$-модула

$$\Phi(z^m\otimes y^a) = p^*(z^m)\cdot S(y^a) = x_{2n-1}^m\cdot x^a = \pm x^a\cdot x_{2n-1}^m.$$

$\Longrightarrow$ Једна база слободног $\mathbb{Z}$-модула $H^*(V_k(\mathbb{C}^n);\mathbb{Z})$ је

$$\{x^a\cdot x_{2n-1}^m \mid a\in\{0,1\}^{k-1}, m\in\{0,1\}\} = \{x_{2(n-k)+1}^{a_{2(n-k)+1}}\, x_{2(n-k)+3}^{a_{2(n-k)+3}}\cdots x_{2n-3}^{a_{2n-3}}\, x_{2n-1}^{a_{2n-1}} \mid a_j\in\{0,1\}\}.$$

Остаје да се провери да важе релације: $x_j^2=0$ и $x_jx_\ell = -x_\ell x_j$, за све $j, l \in \{2(n-k)+1, 2(n-k)+3, \dots, 2n-3, 2n-1\}$. Друга од њих одмах следи из чињенице да су све ове класе x_j у непарним димензијама ($|x_j| = j$); а и прва следи одатле уз запажање да је $H^*(V_k(\mathbb{C}^n); \mathbb{Z})$ слободан $\mathbb{Z}$-модул (слободна Абелова група), па нема елемената реда два.

$$\Longrightarrow \boxed{H^*(V_k(\mathbb{C}^n); \mathbb{Z}) = \Lambda_{\mathbb{Z}}(x_{2(n-k)+1}, x_{2(n-k)+3}, \dots, x_{2n-1})} \checkmark$$

Дакле, $H^*(U(n); R) = \Lambda_R(x_1, x_3, \dots, x_{2n-1})$;

$H^*(SU(n); R) = \Lambda_R(x_3, x_5, \dots, x_{2n-1})$, $\quad |x_i| = i$.

VI. 3. Томова класа; Томов изоморфизам

(ТОГ) ---> $\boxed{132}$ (половине)

У примеру на листу $\boxed{112}$ смо видели како се од диск-раслојења над простором B (рестрикцијом) добија сферно раслојење над B, па самим тим и релативна Серова фибрација над B. Сад ћемо дефинисати (у обрнутом смеру) операцију: сферном раслојењу ћемо доделити диск-раслојење, при чему ће важити $\Gamma \circ \Delta = \mathbb{1}$.

$$\text{диск-раслојење} \underset{\Delta}{\overset{\Gamma}{\rightleftarrows}} \text{сферно раслој.}$$

Γ – одговарајућа рестрикција (в. лист $\boxed{112}$)

У ту сврху докажимо једну лему из опште топологије.

Лема 12: Ако је X тополошки простор, A његов компактан потпростор и $\pi: X \to X/A$ природна сурјекција, онда је, за произвољан тополошки простор Y, пресликавање $\pi \times \mathbb{1}_Y : X \times Y \longrightarrow X/A \times Y$ количничко.

Δ: $\pi \times \mathbb{1}_Y$ је, наравно, непрекидна сурјекција као производ две непр[екидне] сурјекције.

$C \subseteq X/A \times Y$ т.д. је $(\Pi \times \mathbb{1}_Y)^{-1}(C) \in \mathcal{T}_{X\times Y}$ (1)

$C \overset{?}{\in} \mathcal{T}_{X/A\times Y}$

$(\lambda, y_0) \in C$ произв. ? $(\exists W \in \mathcal{T}_{X/A\times Y})\ (\lambda, y_0) \in W \subseteq C$?

① $\lambda = A$

$a \in A$ произв. $(\Pi\times \mathbb{1}_Y)(a, y_0) = (A, y_0) \in C \Longrightarrow (a, y_0) \in (\Pi \times \mathbb{1}_Y)^{-1}(C)$

$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} (\exists U_a \in \mathcal{T}_X)\ (\exists V_a \in \mathcal{T}_Y)$$

$$(a, y_0) \in U_a \times V_a \subseteq (\Pi\times \mathbb{1}_Y)^{-1}(C)$$

$A \subseteq \bigcup_{a\in A} U_a \xrightarrow{A \text{ компакт}} (\exists a_1, \dots, a_n \in A)\ A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{a_i} =: U \in \mathcal{T}_X$

$A \subseteq U \Rightarrow \Pi^{-1}(\Pi(U)) = U \Longrightarrow \Pi(U) \in \mathcal{T}_{X/A}$

$V := \bigcap_{i=1}^{n} V_{a_i} \in \mathcal{T}_Y \Longrightarrow (A, y_0) \in \Pi(U)\times V \in \mathcal{T}_{X/A\times Y}$

$(x,y) \in U\times V \Longrightarrow \exists i_0 \in \{1,2,\dots,n\}\ (x,y) \in U_{a_{i_0}} \times V_{a_{i_0}} \subseteq (\Pi\times\mathbb{1}_Y)^{-1}(C)$

$\Longrightarrow U\times V \subseteq (\Pi\times \mathbb{1}_Y)^{-1}(C) \Longrightarrow \Pi(U)\times V = (\Pi\times\mathbb{1}_Y)(U\times V) \subseteq C.$ ✓

② $\lambda \neq A \Rightarrow (\exists_1 x_0 \in X)\ \Pi(x_0) = \lambda$

$(\Pi\times\mathbb{1}_Y)(x_0, y_0) = (\lambda, y_0) \in C \Rightarrow (x_0, y_0) \in (\Pi\times\mathbb{1}_Y)^{-1}(C)$

$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} (\exists U_0 \in \mathcal{T}_X)\ (\exists V_0 \in \mathcal{T}_Y)$$

$$(x_0, y_0) \in U_0 \times V_0 \subseteq (\Pi\times\mathbb{1}_Y)^{-1}(C). \quad (2)$$

$\boxed{2.1^\circ}$ $U_0 \cap A = \emptyset \Rightarrow \Pi^{-1}(\Pi(U_0)) = U_0 \Rightarrow \Pi(U_0) \in \mathcal{T}_{X/A} \Rightarrow W := \Pi(U_0)\times V_0$ $\overset{(2)}{\Rightarrow}$ ✓

$\boxed{2.2^\circ}$ $U_0 \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \Pi(U_0) \ni A$, $\Pi(U_0)\times V_0 \subseteq C$

$\Rightarrow (A, y_0) \in C \overset{1^\circ}{\Longrightarrow} (\exists U \in \mathcal{T}_X,\ A \subseteq U,\ \Pi(U) \in \mathcal{T}_{X/A})\ (\exists V \in \mathcal{T}_Y)$

$\Pi^{-1}(\_\_) = U \cup U_0 \in \mathcal{T}_X \Rightarrow \in \mathcal{T}_{X/A}$

$(A, y_0) \in \Pi(U)\times V \subseteq C$ (3)

$W := \Pi(U\cup U_0) \times (V \cap V_0) \in \mathcal{T}_{X/A\times Y}$

$$\lambda = \pi(x_0) \overset{(2)}{\in} \pi(U_0) \subseteq \pi(U \cup U_0) \xRightarrow{(2),\,(3)} (\lambda, y_0) \in \pi(U \cup U_0) \times (V \cap V_0) = W$$

$$(2) \Longrightarrow \underline{\pi(U_0) \times V_0 \subseteq C} \quad (4)$$

$$\Rightarrow W = \pi(U \cup U_0) \times (V \cap V_0) = \big(\pi(U) \cup \pi(U_0)\big) \times (V \cap V_0) = \pi(U) \times (V \cap V_0) \cup \pi(U_0) \times (V \cap V$$

$$\subseteq \pi(U) \times V \cup \pi(U_0) \times V_0 \overset{(3)(4)}{\subseteq} C. \quad \blacksquare$$

Још једна општотополошка чињеница ће нам бити корисна: ако су $f: X \to Z$ и $g: Y \to Z$ непрекидна пресликавања и бар једно од њих количничко, онда је и $f \sqcup g : X \sqcup Y \to Z$ количничко. Наиме, $(f \sqcup g)^{-1}(W) = f^{-1}(W) \sqcup g^{-1}(W) \dots$ **(ДУК)**

Знамо да за произвољно непрекидно пресликавање $p: T \to B$, утапање $j: T \hookrightarrow M_p$ и хомотопску еквиваленцију $h_p : M_p \to B$, где је $M_p := (T \times I \sqcup B)/_{(t,0) \sim p(t)}$ цилиндар пресликавања p, имамо комутативан дијаграм десно.

$$\begin{tikzcd}
 & T \times I \sqcup B \arrow[d, "\pi"] \arrow[dd, bend left, "P = p_1 \sqcup 1\!\!1_B"] \\
 & M_p \arrow[d, "h_p"] \\
T \arrow[uur, bend left, "t \mapsto (t,1)"] \arrow[ur, "j"] \arrow[r, "p"] & B
\end{tikzcd}$$

Као што је уобичајено, простор T идентификујемо са његовом сликом при утапању j: $T = j(T) \subset M_p$.

$\boxed{\text{Став 13:}}$ Ако је $p: T \to B$ раслојење са слојем S^{n-1} $(n \in \mathbb{N})$, онда је $h_p : M_p \to B$ раслојење са слојем D^n.

$$\begin{tikzcd}
S^{n-1} \arrow[r] & T \arrow[d, "p"] & & D^n \arrow[r] & M_p \arrow[d, "h_p"] \\
 & B \arrow[rr, dashed, phantom, "\overset{\Delta}{- - - \to}"] & & & B
\end{tikzcd}$$

Δ: $\underline{b\in B}$ произв., $U\in\mathcal{T}_B$, $b\in U$, $\exists h$ 12

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "h", "\approx"'] \arrow[dr, "p"'] & & U\times S^{n-1} \arrow[dl, "p_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

$h_p^{-1}(U)\in\mathcal{T}_{M_p}$, $\pi^{-1}(h_p^{-1}(U)) = (p\circ p_1\sqcup 1\!\!1_B)^{-1}(U)$

$= p^{-1}(U)\times I\sqcup U$

$\Longrightarrow$ рестрикција $\underline{\pi: p^{-1}(U)\times I\sqcup U\longrightarrow h_p^{-1}(U) \text{ је количничко.}}$ (*)

$q: S^{n-1}\times I\longrightarrow D^n$, $q(x,t)=tx$

q количничко $\Rightarrow$

$$\begin{tikzcd} S^{n-1}\times I \arrow[r, "q"] \arrow[dr] & D^n \\ & S^{n-1}\times I/q \arrow[u, "\approx"'] \end{tikzcd}$$

$\qquad\qquad\qquad \| $

$\qquad S^{n-1}\times I/\underbrace{S^{n-1}\times\{0\}}_{\text{компакт}}$

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U)\times I\sqcup U \arrow[rr, "h\times 1\!\!1_I\sqcup 1\!\!1_U", "\approx"'] \arrow[d, "\pi"] \arrow[drr, phantom, "\mathrm{I}"] & & U\times S^{n-1}\times I\sqcup U \arrow[d, "1\!\!1_U\times q\sqcup i_0"] \\ h_p^{-1}(U) \arrow[rr, dashed, "g", "\approx"'] \arrow[dr, "h_p"'] & \mathrm{II} & U\times D^n \arrow[dl, "p_1"] \\ & U. & \end{tikzcd}$$

$\xRightarrow{\text{лема 12}}$ $1\!\!1_U\times q$ је количничко $\xRightarrow{(\text{Д},\text{УК})}$ $\underline{1\!\!1_U\times q\sqcup i_0 \text{ је количничко}}$ (**) ($i_0: U\hookrightarrow U\times D^n$, $y\mapsto(y,0)$)

Докажимо да за произвољне различите тачке $z_1, z_2\in p^{-1}(U)\times I\sqcup U$ и њихове слике $\zeta_1,\zeta_2\in U\times S^{n-1}\times I\sqcup U$ при хомеоморфизму $h\times 1\!\!1_I\sqcup 1\!\!1_U$ важи еквиваленција:

$$\boxed{\pi(z_1)=\pi(z_2)\iff(1\!\!1_U\times q\sqcup i_0)(\zeta_1)=(1\!\!1_U\times q\sqcup i_0)(\zeta_2).} \quad (\bullet)$$

Довољно је то утврдити за тачке $\underline{z_1=(\tau,0)}\in p^{-1}(U)\times I$ и $\underline{z_2=y}\in U$, односно $\underline{\zeta_1}=(h\times 1\!\!1_I)(z_1)=(h(\tau),0)=\underbrace{(p(\tau),h_2(\tau),0)}_{\in U\times S^{n-1}\times I}$ и $\underline{\zeta_2=y}\in U$ (с обзиром на опис пресликавања π и $1\!\!1_U\times q\sqcup i_0$):

$h=(h_1,h_2)$, $h_1=p_1\circ h=p$, $h_2=p_2\circ h$

$$\underline{\pi(\tau,0)=\pi(y)}\iff p(\tau)=y\iff\underline{(1\!\!1_U\times q\sqcup i_0)(p(\tau),h_2(\tau),0)=(1\!\!1_U\times q\sqcup i_0)(y).}$$

$(p(\tau),0)=(y,0)$

$\xRightarrow{(*),\,(**),\,(\bullet)}$ Имамо хомеоморфизам g т.д. комутира дијаграм I.

Како комутира цео дијаграм на горњој слици, а π је „на", то комутира и дијаграм II. ∎

За фиксирано $b\in B$ и $U\in \mathcal{T}_B$ т.д. $b\in U$ и p и h_p су тривијални над U очигледно је да при хомеоморфизму j (из доказа става 13) тачкама из $\{b\}\times S^{n-1}$ одговарају тачке из $\pi(p^{-1}(\{b\})\times\{1\})$, па је зато

$$M_p'=\{e\in M_p \mid H_n(\underbrace{F_{h_p(e)}}_{\text{слој расложења } h_p \text{ над тачком } h_p(e)\in B},\, F_{h_p(e)}\setminus\{e\})=0\}=\pi(T\times\{1\})=j(T).$$

Сад имамо следећи дијаграм:

$$\begin{tikzcd} t \arrow[r, mapsto, "j"] \arrow[dr, mapsto, "p"'] & {[(t,1)]} \arrow[d, mapsto, "h_p'"] \\ & p(t) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T \arrow[rr, bend left, "j"] \arrow[r, "\approx"] \arrow[dr, "p"'] & j(T)=M_p' \arrow[r, hook] \arrow[d, "h_p'"] \arrow[dl, phantom, "(\therefore)"] & M_p \arrow[dl, "h_p"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

$(\therefore)\ \Rightarrow\ \boxed{\Gamma\circ\Delta=1\!\!1}.$

Дакле, кад имамо диск-расложење, имамо и релативно расложење, ~~односно~~ односно релативну Серову фибрацију (пример на листу $\boxed{112}$). Сад видимо да и кад имамо сферно расложење можемо формирати одговарајуће релативно расложење.

Нека је сада дато релативно расложење

$$\boxed{\begin{tikzcd} (D^n,S^{n-1}) \arrow[r] & (E,E') \arrow[d, "p"] \\ & B \end{tikzcd}} \quad (n\in\mathbb{N}) \qquad \text{(ДСР)}$$

Знамо да је, за произвољан прстен R,

$$\boxed{H^i(D^n,S^{n-1};R)\cong \widetilde{H}^{i-1}(S^{n-1};R)\cong \begin{cases} R, & i=n \\ 0, & i\neq n \end{cases}} \qquad \text{(ДС)}$$

Дакле, $H^*(D^n,S^{n-1};R)$ је слободан градуисани R-модул коначног типа (в. услов 1) Лере-Хиршове теореме – теореме 8). Услов 2) теореме 8 за расложење (ДСР) је постојање класе $c\in H^n(E,E';R)$ такве да је i_b^*c генератор слободног цикличног R-модула $H^n(D^n_b,S^{n-1}_b;R)$ за све $b\in B$, где је (D^n_b,S^{n-1}_b) слој релативног расложења (ДСР) над тачком b, а $i_b:(D^n_b,S^{n-1}_b)\hookrightarrow(E,E')$ одговарајућа инклузија.

Ако, дакле, постоји оваква класа c, онда нам теорема 8 даје изоморфизам R-модула

$$\underbrace{\left(H^*(B;R)\otimes_R H^*(D^n,S^{n-1};R)\right)_m}_{\displaystyle \parallel \atop \displaystyle \bigoplus_{k=0}^{m} H^k(B;R)\otimes_R H^{m-k}(D^n,S^{n-1};R)} \xrightarrow{\ \Phi\ } H^m(E,E';R)\,, \quad \text{за све } m\in\mathbb{N}_0$$

Сада, из (ДС) најпре закључујемо да је $\boxed{H^m(E,E';R)=0 \quad \text{за} \quad m<n}$, (T)
а онда и да за $m\geq n$ имамо изоморфизам (који такође означавамо са Φ):

$$\begin{tikzcd}
\underbrace{\bigoplus_{k=0}^{m} H^k(B;R)\otimes_R H^{m-k}(D^n,S^{n-1};R)}_{\cong} \arrow[r, "\Phi"] & H^m(E,E';R) \\
H^{m-n}(B;R)\otimes_R R & \\
\cong & \\
H^{m-n}(B;R) \arrow[uuur, dashed, "\Phi"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\beta\otimes i_b^*(c) \arrow[r, mapsto, "\Phi"] & \overbrace{p^*(\beta)\cdot c}^{\in H^{m-n}(E;R)} \\
\beta\otimes 1 \arrow[u, mapsto] & \\
\beta \arrow[u, mapsto] \arrow[uur, dashed, mapsto, "\Phi"'] &
\end{tikzcd}$$

Дефиниција 14: Класу $c\in H^n(E,E';R)$ са својством да је, за све $b\in B$, i_b^*c генератор слободног цикличног R-модула $H^n(D_b^n,S_b^{n-1};R)$ називамо Томовом класом раслојења (ДСР) са R коефицијентима, а одговарајући изоморфизам

$$\Phi: H^{m-n}(B;R) \xrightarrow{\ \ } H^m(E,E';R)\,, \quad m\in\mathbb{Z},$$
$$\Phi(\beta)=p^*(\beta)\cdot c\,,$$

Томовим изоморфизмом.

У наставку разматрамо питање под којим условима, за дато раслојење (ДСР), постоји Томова класа. Докажимо најпре да постојање Томове класе са $\mathbb{Z}$ коефицијентима гарантује постојање Томове класе са произвољним коефицијентима.

$\boxed{\text{Став 15:}}$ Ако је $c\in H^n(E,E';\mathbb{Z})$ Томова класа раслојења (ДСР) са $\mathbb{Z}$ коефицијентима, R комутативан прстен и $\varphi:\mathbb{Z}\to R$ хомоморфизам прстена ($\varphi(1)=1$), онда је $\varphi_*(c)\in H^n(E,E';R)$ Томова класа раслојења (ДСР) са R коефицијентима.

$$\begin{tikzcd}
H^n(E,E';\mathbb{Z}) \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[d, "i_b^*"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H^n(E,E';R) \arrow[d, "i_b^*"] \\
H^n(D^n_b,S^{n-1}_b;\mathbb{Z}) \arrow[r, "\varphi_*"] & H^n(D^n_b,S^{n-1}_b;R)
\end{tikzcd}$$

Δ: Овај став је директна последица комутативности дијаграма десно (φ_* је кохомолошка операција; в. пример 3) на полеђини листа $\boxed{77}$) и чињенице да доње φ_* пресликава генератор слободне цикличне групе $H^n(D^n_b,S^{n-1}_b;\mathbb{Z})$ у генератор слободног цикличног R-модула $H^n(D^n_b,S^{n-1}_b;R)$ (ово следи из чињенице да је $H_{n-1}(D^n_b,S^{n-1}_b)=0$ и теореме о универзалним коефицијентима; в. доказ леме 10, у којем је доказана и општија чињеница). ■

$$\begin{tikzcd}
(D^n_{f(x)},S^{n-1}_{f(x)}) \arrow[r, equal] \arrow[d, "j_x"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & (D^n_{f(x)},S^{n-1}_{f(x)}) \arrow[d, "i_{f(x)}"] \\
(f^*(E),f^*(E')) \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\tilde{p}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & (E,E') \arrow[d, "p"] \\
X \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

$e \mapsto (x,e)$

Нека је сад $f:X\to B$ непрекидно пресликавање. Тада, за свако $x\in X$, имамо комутативан дијаграм десно, где је $\tilde{p}:(f^*(E),f^*(E'))\to X$ повлачење релативног раслојења (ДСР) помоћу f. Ако је $c\in H^n(E,E';R)$ Томова класа раслојења p са R коефицијентима (где је R неки комутативан прстен), онда је $j_x^*q^*c=i^*_{f(x)}c$ генератор слободног цикличног R-модула $H^n(D^n_{f(x)},S^{n-1}_{f(x)};R)$, па је $q^*c\in H^n(f^*(E),f^*(E');R)$ Томова класа повлачења $\tilde{p}$ (упореди с делом доказа теореме 8 на доњем делу листа $\boxed{113}$). Специјално, ако је c Томова класа раслојења p, $A\subseteq B$, $E_A=p^{-1}(A)$, $E'_A=E_A\cap E'$, $\ldots$, онда је i_A^*c Томова класа рестрикције p_A.

$$\begin{tikzcd}
(E_A,E'_A) \arrow[r, hook, "i_A"] \arrow[d, "p_A"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & (E,E') \arrow[d, "p"] \\
A \arrow[r, hook] & B
\end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{(ПРТИ)}}$ (полеђ. листа $\boxed{131}$)

Ако је $p: E \to B$ Хуревићева фибрација, знамо да постоји придруживање које датом путу $u: I \to B$ од тачке b_1 до тачке b_2 $(u(0)=b_1,\ u(1)=b_2)$ додељује хомотопску еквиваленцију $l_u: F_{b_1} \to F_{b_2}$. Ово придруживање индукује функцију $P_{b_1,b_2} \longrightarrow [F_{b_1}, F_{b_2}]$, $u \longmapsto L_u := [l_u]$, а онда, за $b\in B$, и

$$P_{b_1,b_2} = \{u: I \to B \mid u \text{ је пут},\ u(0)=b_1,\ u(1)=b_2\}$$

дејство фундаменталне групе $\pi_1(B,b)$ на слој F_b до на хомотопију:

$$\pi_1(B,b) \longrightarrow [F_b, F_b]^*, \quad [u] \longmapsto L_{u^{-1}}.$$

Фибрацију p смо називали <u>оријентабилном</u> ако је ово дејство тривијално за све $b\in B$.

При овим конструкцијама главну улогу је одиграла чињеница да p има својство подизања хомотопије (HLP) у односу на F_b и на $F_b\times I\times I$, где је $b\in B$ произв. тачка. Ако је p само Серова фибрација, али таква да су сви њени слојеви F_b CW-комплекси, онда можемо да изведемо све претходне конструкције (јер Серова фибрација има HLP у односу на CW-комплексе).

На пример, ако је

$$\boxed{\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \longrightarrow & E' \\ & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ & & B \end{array}}$$

(CP)

сферно раслојење, онда за $b_1, b_2 \in B$ имамо фју $P_{b_1,b_2} \longrightarrow [S^{n-1}_{b_1}, S^{n-1}_{b_2}]$, $u \longmapsto L_u$. Ове функције (за разне $b_1,b_2\in B$) задовољавају сл. услове:

(i) $u \simeq v$ (rel $\{0,1\}$) $\Longrightarrow L_u = L_v$;

(ii) $u(1)=v(0) \Longrightarrow L_{u\cdot v} = L_v \circ L_u$;

(iii) $L_{c_b} = [1\!\!1_{S^{n-1}_b}]$, где је $c_b: I \to B$ константан пут у т. b ($c_b(t)=b$ за све $t\in$

Захваљујући овим условима имамо и дејство до на хомотопију фундаменталне групе $\pi_1(B,b)$ на слој S^{n-1}_b (за произвољно $b\in B$):

$$\pi_1(B,b) \xrightarrow{\varphi_b} [S_b^{n-1}, S_b^{n-1}]^*, \quad u \longmapsto L_{u^{-1}}.$$

Дефиниција 16: Кажемо да је сферно раслојење (СР) <u>оријентабилно</u> ако је дејство φ_b тривијално за све $b\in B$, тј. ако за произвољну петљу u у произвољној тачки $b\in B$ важи да је $l_u \simeq 1\!\!1_{S_b^{n-1}}$, где је $l_u : S_b^{n-1} \to S_b^{n-1}$ добијено помоћу произвољног подизања H (в. дијаграм десно), $l_u(y) = H(y,1)$.

$$\begin{tikzcd} S_b^{n-1}\times\{0\} \arrow[r, hook] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\ S_b^{n-1}\times I \arrow[r, "u\circ p_I"] \arrow[ur, dashed, "H"] & B \end{tikzcd}$$

Ако је базни простор путно повезан, онда је довољно проверити тривијалност дејства φ_b за једно (било које) $b\in B$. Општије, довољно је утврдити тривијалност дејства φ_b за по једно b из сваке компоненте путне повезаности базног простора B. Наиме, важи следећи став.

Став 17: Ако је $\gamma : I \to B$ пут, $\gamma(0)=b_1$, $\gamma(1)=b_2$, онда је дејство φ_{b_1} тривијално акко је дејство φ_{b_2} тривијално.

Δ: $h_\gamma : [S_{b_1}^{n-1}, S_{b_1}^{n-1}]^* \longrightarrow [S_{b_2}^{n-1}, S_{b_2}^{n-1}]^*$, $h_\gamma[f] := L_\gamma \circ [f] \circ L_{\gamma^{-1}}$

$$\begin{aligned}
\underline{h_\gamma([f]\circ[g])} &= h_\gamma[f\circ g] = L_\gamma\circ[f\circ g]\circ L_{\gamma^{-1}} \\
&= L_\gamma\circ[f]\circ[1\!\!1_{S_{b_1}^{n-1}}]\circ[g]\circ L_{\gamma^{-1}} \\
&\overset{(iii)}{=} L_\gamma\circ[f]\circ L_{c_{b_1}}\circ[g]\circ L_{\gamma^{-1}} \\
&\overset{(i)}{=} L_\gamma\circ[f]\circ L_{\gamma\cdot\gamma^{-1}}\circ[g]\circ L_{\gamma^{-1}} \\
&\overset{(ii)}{=} L_\gamma\circ[f]\circ L_{\gamma^{-1}}\circ L_\gamma\circ[g]\circ L_{\gamma^{-1}} \\
&= \underline{h_\gamma[f]\circ h_\gamma[g]}
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ h_γ је хомоморфизам група

Лако се провери и да је $h_{\gamma^{-1}}\circ h_\gamma = 1\!\!1_{[S_{b_1}^{n-1}, S_{b_1}^{n-1}]^*}$ и $h_\gamma\circ h_{\gamma^{-1}} = 1\!\!1_{[S_{b_2}^{n-1}, S_{b_2}^{n-1}]^*}$, па је h_γ заправо изоморфизам.

Став је сад непосредна последица комутативности дијаграма десно.

$$\begin{tikzcd} \pi_1(B,b_1) \arrow[r, "\varphi_{b_1}"] \arrow[d, "B_\gamma"'] \arrow[dr, phantom, "(+)"] & {[S_{b_1}^{n-1}, S_{b_1}^{n-1}]^*} \arrow[d, "h_\gamma"] \\ \pi_1(B,b_2) \arrow[r, "\varphi_{b_2}"] & {[S_{b_2}^{n-1}, S_{b_2}^{n-1}]^*} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} {[u]} \arrow[r, mapsto] \arrow[dd, mapsto] & L_{u^{-1}} \arrow[d, mapsto] \\ & L_\gamma\circ L_{u^{-1}}\circ L_{\gamma^{-1}} \arrow[d, phantom, "\overset{(ii)}{\|}"] \\ {[\gamma^{-1}\cdot u\cdot\gamma]} \arrow[r, mapsto] & L_{(\gamma^{-1}\cdot u\cdot\gamma)^{-1}} \end{tikzcd}$$

✓

Став 18: Раслојење (СР) је оријентабилно акко за произвољне тачке $b_1, b_2 \in B$ и произвољне путеве $u, v \in P_{b_1, b_2}$ важи $L_u = L_v$.

Δ: $\Longrightarrow$) $L_v \circ / \ \underline{L_{v^{-1}} \circ L_u} \overset{(ii)}{=} L_{u \cdot v^{-1}} = \underline{[1\!\!1_{S^{n-1}_{b_1}}]}$

$\boxed{[v \cdot u^{-1}] \in \pi_1(B, b_1) \quad L_{u \cdot v^{-1}} = \varphi_{b_1}[v \cdot u^{-1}] \underset{\text{оријент.}}{=} [1\!\!1_{S^{n-1}_{b_1}}]}$

$\Rightarrow \underline{\underline{L_u}} = [1\!\!1_{S^{n-1}_{b_2}}] \circ L_u \overset{(iii)}{=} L_{c_{b_2}} \circ L_u \overset{(i)}{=} L_{v^{-1} \cdot v} \circ L_u \overset{(ii)}{=} L_v \circ L_{v^{-1}} \circ L_u$

$= L_v \circ [1\!\!1_{S^{n-1}_{b_1}}] = \underline{\underline{L_v}}$. ✓

$\Longleftarrow$) $\underline{\underline{b \in B}}$, $\varphi_b : \pi_1(B, b) \to [S^{n-1}_b, S^{n-1}_b]^*$, $\underline{[u] \in \pi_1(B, b)}$ произв. $\boxed{u^{-1} \in P_{b,b} \quad c_b}$

$\varphi_b[u] = L_{u^{-1}} = L_{c_b} \overset{(iii)}{=} [1\!\!1_{S^{n-1}_b}]$. ✓ ■

Нека је сад R комутативан прстен. Како је $\tilde{H}^{n-1}(\cdot\,; R)$ контраваријантни функтор из категорије тополошких простора у категорију R-модула, $\underbrace{}_{\text{који је, уз то, и хомотопска инваријанта,}}$ то имам(о) антихомоморфизам (за произв. $b \in B$):

$$[S^{n-1}_b, S^{n-1}_b]^* \xrightarrow{\ *_R\ } \mathrm{Aut}_R\left(\tilde{H}^{n-1}(S^{n-1}_b; R)\right), \quad [f] \xmapsto{*_R} f^* =: [f]^*$$

$$\underline{*_R([f] \circ [g])} = *_R[f \circ g] = (f \circ g)^* = g^* \circ f^* = \underline{*_R[g] \circ *_R[f]}.$$

То сад значи да имамо десно дејство фундаменталне групе $\pi_1(B, b)$ на R-моду(л) $\tilde{H}^{n-1}(S^{n-1}_b; R)$, дато као композиција:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(B,b) & \xrightarrow{\varphi_b} & [S^{n-1}_b, S^{n-1}_b]^* \\ & \overset{\psi_b^R}{\searrow} & \downarrow *_R \\ & & \mathrm{Aut}_R(\tilde{H}^{n-1}(S^{n-1}_b; R)) \end{array} \qquad [u] \longmapsto L^*_{u^{-1}}$$

Дефиниција 19: Кажемо да је сферно раслојење (СР) $\underline{R\text{-оријентабилно}}$ ако је дејство ψ_b^R тривијално за све $b \in B$, тј. ако за произвољну петљу u у произвољној тачки $b \in B$ важи да је $L_u^* = 1\!\!1_{\tilde{H}^{n-1}(S^{n-1}_b; R)}$.

Наравно, јасно је да важи следећа импликација:

$\boxed{I}$ (СР) је оријентабилно $\Longrightarrow$ (СР) је R-оријентабилно за сваки ком. прстен

Комутативни дијаграм (+) из доказа става 17 можемо да продужимо на сл. начин:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(B,b_1) \arrow[r, "\varphi_{b_1}"] \arrow[d, "B_\gamma"'] \arrow[dr, phantom, "(+)"] & {[S^{n-1}_{b_1}, S^{n-1}_{b_1}]^*} \arrow[r, "*_R"] \arrow[d, "h_\gamma"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathrm{Aut}_R(\tilde{H}^{n-1}(S^{n-1}_{b_1};R)) \arrow[d, "\sigma_\gamma"] & \ni \alpha \arrow[d, mapsto, "\sigma_\gamma"] \\
\pi_1(B,b_2) \arrow[r, "\varphi_{b_2}"] & {[S^{n-1}_{b_2}, S^{n-1}_{b_2}]^*} \arrow[r, "*_R"'] & \mathrm{Aut}_R(\tilde{H}^{n-1}(S^{n-1}_{b_2};R)) & \ni \underbrace{L^*_{\gamma^{-1}}\circ\alpha\circ L^*_\gamma}
\end{tikzcd}$$

При том се лако види да је σ_γ изоморфизам група и да је $\sigma_\gamma^{-1} = \sigma_{\gamma^{-1}}$, па закључујемо да важи и аналогон става 17: дејство $\Psi^R_{b_1}$ је тривијално акко је дејство $\Psi^R_{b_2}$ тривијално. Дакле, и за R-оријентабилност је довољно проверити тривијалност дејства Ψ^R_b за по једно b из сваке компоненте путне повезаности базног простора B.

$$\begin{tikzcd}
{[f]} \arrow[r, mapsto, "*_R"] \arrow[d, "h_\gamma"'] & {[f]^*} \arrow[d, "\sigma_\gamma"] \\
L_\gamma\circ[f]\circ L_{\gamma^{-1}} \arrow[r, mapsto, "*_R"] & L^*_{\gamma^{-1}}\circ[f]^*\circ L^*_\gamma \ \checkmark
\end{tikzcd}$$

Лако се проверава и да важи аналогон става 18 за R-оријентабилност:

$$\boxed{(CP) \text{ је } R\text{-оријентабилно} \iff (\forall b_1,b_2\in B)(\forall u,v\in P_{b_1,b_2})\ L^*_u = L^*_v} \quad \underline{(K)}$$

$\Rightarrow)$ $L^*_u \underset{\text{в. Δ става 18}}{=} \ldots = (L_v\circ L_{u\cdot v^{-1}})^* = \underbrace{L^*_{u\cdot v^{-1}}}\circ L^*_v = L^*_v$ ✓

$u\cdot v^{-1}\in P_{b_1,b_1}$, R-оријент. $\rightsquigarrow \mathbb{1}_{\tilde{H}^{n-1}(S^{n-1}_{b_1};R)}$

$\Leftarrow)$ $L^*_u \underset{u\in P_{b,b},\ c_b}{=} L^*_{c_b} = [\mathbb{1}_{S^{n-1}_b}]^* = \mathbb{1}_{\tilde{H}^{n-1}(S^{n-1}_b;R)}$ ✓

Поред чињенице $\boxed{\mathrm{I}}$ (с претходне стране) уочимо још и наредне три, које се, иако тривијалне, често примењују у пракси:

$\boxed{\mathrm{II}}$: <u>Свако сферно раслојење над просто повезаним простором B је оријентабилно.</u>

Наиме, тада је $\pi_1(B,b)=0$ за све $b\in B$.

$\boxed{\mathrm{III}}$: <u>Свако сферно раслојење је $\mathbb{Z}_2$-оријентабилно.</u>

Наиме, $\tilde{H}^{n-1}(S^{n-1}_b;\mathbb{Z}_2)\cong\mathbb{Z}_2$, па је $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}_2}(\tilde{H}^{n-1}(S^{n-1}_b;\mathbb{Z}_2))=0$ за све $b\in B$

$\boxed{\mathrm{IV}}$: <u>Сферно раслојење је оријентабилно акко је $\mathbb{Z}$-оријентабилно.</u>

Наиме, $\tilde{H}^{n-1}(S^{n-1}_b;\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}$, па је $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(\tilde{H}^{n-1}(S^{n-1}_b;\mathbb{Z}))\cong\mathbb{Z}_2\cong[S^{n-1}_b,S^{n-1}_b]^*$

Штавише, баш је $*_{\mathbb{Z}}$ изоморфизам. ← Хопфова теор. о степ.

Вратимо се сад релативном раслојењу (ДСР). Оно има одговарајуће сферно раслојење (СР) ($p'=p|_{E'}$).

$$\text{(ДСР)}\quad \begin{tikzcd} (D^n,S^{n-1}) \arrow[r] & (E,E') \arrow[d, "p"] \\ & B \end{tikzcd} \quad \dashrightarrow \quad \text{(СР)}\quad \begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r] & E' \arrow[d, "p'"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Дефиниција 20: Кажемо да је релативно раслојење (ДСР) <u>оријентабилно</u> (<u>R-оријентабилно</u>) ако је њему одговарајуће сферно раслојење (СР) оријентабилно (R-оријентабилно).

Чињенице $\boxed{\mathrm{I}}$, $\boxed{\mathrm{II}}$, $\boxed{\mathrm{III}}$ и $\boxed{\mathrm{IV}}^{c}$ претходног листа нам дају:

$\boxed{\mathrm{I}}$: <u>(ДСР) је оријентабилно $\Longrightarrow$ (ДСР) је R-оријентабилно за сваки ком. прстен R</u>

$\boxed{\mathrm{II}}$: <u>B је просто повезан $\Longrightarrow$ (ДСР) је оријентабилно.</u>

$\boxed{\mathrm{III}}$: (ДСР) је $\mathbb{Z}_2$-оријентабилно.

$\boxed{\mathrm{IV}}$: <u>(ДСР) је оријентабилно $\Longleftrightarrow$ (ДСР) је $\mathbb{Z}$-оријентабилно.</u>

За $b\in B$ означимо са $j_b: S^{n-1}_b \hookrightarrow E'$ инклузију, а од пре имамо ознаку $i_b: (D^n_b, S^{n-1}_b) \hookrightarrow (E,E')$.

Нека су $b_1,b_2\in B$ и $u: I\to B$ пут т.д. је $u(0)=b_1$ и $u(1)=b_2$. Тада имамо хомотопску еквиваленцију l_u т.д. дијаграм десно комутира до на хомотопију (в. напомену 2 на полеђини листа $\boxed{117}$). При том, l_u зависи од подизања H хомотопије $u\circ p_I: S^{n-1}_{b_1}\times I \to B$ (в. дијаграм десно), али само до на хомотопију (ако је H' неко друго подизање и l'_u одговарајућа хомотопска еквиваленција, онда је $l'_u \simeq l_u$).

$$\begin{tikzcd} S^{n-1}_{b_1} \arrow[dr, hook, "j_{b_1}"] \arrow[d, "l_u"', "\simeq"] & \\ S^{n-1}_{b_2} \arrow[r, hook, "j_{b_2}"'] & E' \arrow[from=1-1, to=2-1, phantom, shift left=6, "\simeq"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} S^{n-1}_{b_1}\times\{0\} \arrow[r, hook, "j_{b_1}"] \arrow[d] & E' \arrow[d, "p'"] \\ S^{n-1}_{b_1}\times I \arrow[r, "u\circ p_I"'] \arrow[ur, dashed, "H"] & B \end{tikzcd}$$

$\Downarrow$

<u>$l'^{*}_u = l^{*}_u$ у кохомологији,</u> (3B)

~~Нека је $\overline{l_u}: D^n_{b_1} \to D^n_{b_2}$ неко проширење композиције $S^{n-1}_{b_1} \xrightarrow{l_u} S^{n-1}_{b_2} \hookrightarrow D^n_{b_2}$ (оно постоји јер је $D^n_{b_2} \simeq *$),~~

$$\begin{tikzcd} D^n_{b_1} \arrow[r, dashed, "\overline{l_u}"] & D^n_{b_2} \\ S^{n-1}_{b_1} \arrow[u, hook] \arrow[r, "l_u"] \arrow[ur] & S^{n-1}_{b_2} \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Дефинисаћемо $K_u : (D^n_{b_1}, S^{n-1}_{b_1}) \longrightarrow (D^n_{b_2}, S^{n-1}_{b_2})$, пресликавање парова (које проширује одабрано $l_u: S^{n-1}_{b_1} \to S^{n-1}_{b_2}$) такво да наредни дијаграм лево комутира до на хомотопију кроз пресликавања парова, па ћемо одмах имати и (праву) комутативност дијаграма десно (где је R произвољан комутативан прстен).

$$\begin{tikzcd} (D^n_{b_1}, S^{n-1}_{b_1}) \arrow[d, "K_u"'] \arrow[dr, hook, "i_{b_1}"] \arrow[d, phantom, shift left=6ex, "\overset{(0)}{\simeq}"] & & & H^n(D^n_{b_1}, S^{n-1}_{b_1}; R) & \\ (D^n_{b_2}, S^{n-1}_{b_2}) \arrow[r, hook, "i_{b_2}"'] & (E, E') \arrow[r, dashed] & {} & & H^n(E, E'; R) \arrow[ul, "i^*_{b_1}"'] \arrow[dl, "i^*_{b_2}"] \arrow[ll, phantom, "\overset{(1)}{=}"] \\ & & & H^n(D^n_{b_2}, S^{n-1}_{b_2}; R) \arrow[uu, "K^*_u"] & \end{tikzcd}$$

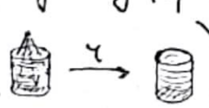
Нека је $H: S^{n-1}_{b_1} \times I \longrightarrow E'$, $H: j_{b_1} \simeq j_{b_2} \circ l_u$ (в. претходну страну, дијаграме). Тада комутира наредни дијаграм лево, а комутира и дијаграм десно.

$$\begin{tikzcd} S^{n-1}_{b_1} \times I \arrow[r, "H"] \arrow[d, hook] & E' \arrow[r, hook, "j"] \arrow[dr, "p'"'] & E \arrow[d, "p"] \\ D^n_{b_1} \times I \arrow[rr, "u \circ p_I"] & & B \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} D^n_{b_1} \times \{0\} \arrow[r, hook, "\bar{j}_{b_1}"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\ D^n_{b_1} \times I \arrow[r, "u \circ p_I"] & B \end{tikzcd}$$

$p'(H(y,t)) = u(t)$ ✓

$(u \circ p_I)(y,0) = u(0) = b_1 = p(y)$ ✓

При том још, за све $y \in S^{n-1}_{b_1}$, важи да је $\underline{j(H(\underline{y,0}))} = j(j_{b_1}(y)) = y = \underline{\bar{j}_{b_1}(\underline{y,0})}$, па имамо комутативан квадрат десно.

Како је $D^n_{b_1} \times \{0\} \cup S^{n-1}_{b_1} \times I$ јаки деформациони ретракт од $D^n_{b_1} \times I$ (), а $D^n_{b_1} \times I$ метрички, то је $(D^n_{b_1} \times I, D^n_{b_1} \times \{0\} \cup S^{n-1}_{b_1} \times I)$ DR-пар. Уз то, $D^n_{b_1} \times I$ је CW-комплекс, а p Серова фибрација, па постоји $\widetilde{H}$ т.д. комутирају оба троугла на дијаграм

$$\begin{tikzcd} D^n_{b_1} \times \{0\} \cup S^{n-1}_{b_1} \times I \arrow[r, "\bar{j}_{b_1} \cup (j \circ H)"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\ D^n_{b_1} \times I \arrow[r, "u \circ p_I"'] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{H}"] & B \end{tikzcd}$$

Из комутативности доњег троугла имамо да, за све $y\in D^n_{b_1}$, важи

$p(\widetilde{H}(y,1)) = u(1) = b_2$, па је $\widetilde{H}(y,1)\in D^n_{b_2}$.

Зато можемо да дефинишемо $\overline{l_u}: D^n_{b_1}\longrightarrow D^n_{b_2}$,

$\overline{l_u}(y) := \widetilde{H}(y,1)$, $y\in D^n_{b_1}$.

$$\begin{tikzcd} D^n_{b_1} \arrow[r, "\overline{l_u}"] & D^n_{b_2} \\ S^{n-1}_{b_1} \arrow[u, hook] \arrow[r, "l_u"] \arrow[ur, phantom, "(*)"] & S^{n-1}_{b_2} \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

За $y\in S^{n-1}_{b_1}$ важи $\overline{l_u}(y) = \widetilde{H}(y,1) \overset{\text{комутативност горњег троугла}}{=} H(y,1) = l_u(y)$, па комутира дијаграм (*).

Нека је $K_u:(D^n_{b_1},S^{n-1}_{b_1})\longrightarrow(D^n_{b_2},S^{n-1}_{b_2})$ одговарајуће пресликавање парова. K_u зависи од избора подизања H и $\widetilde{H}$, али како l_u^* зависи само од пута u_0 (в. (3в) на претходном листу), и то до на $\simeq$ (rel $\{0,1\}$) (особина (i) на листу $\boxed{125}$), то са дијаграма десно видимо да K_u^* зависи само од пута u, и то до на $\simeq$ (rel $\{0,1\}$). Са тог дијаграма видимо и да је K_u^* изоморфизам.

$$\begin{tikzcd} (S^{n-1}_{b_1},\emptyset) \arrow[r, hook] \arrow[d, "l_u"] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & (D^n_{b_1},\emptyset) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\overline{l_u}"] & (D^n_{b_1},S^{n-1}_{b_1}) \arrow[d, "K_u"] \\ (S^{n-1}_{b_2},\emptyset) \arrow[r, hook] & (D^n_{b_2},\emptyset) \arrow[r, hook] & (D^n_{b_2},S^{n-1}_{b_2}) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \cdots & H^n(D^n_{b_1},S^{n-1}_{b_1};R) \arrow[l] \arrow[dr, phantom, "(Д)"] & \widetilde{H}^{n-1}(S^{n-1}_{b_1};R) \arrow[l, "\delta"'] & \arrow[l] \\ \cdots & H^n(D^n_{b_2},S^{n-1}_{b_2};R) \arrow[l] \arrow[u, "K_u^*"] & \widetilde{H}^{n-1}(S^{n-1}_{b_2};R) \arrow[l, "\delta"'] \arrow[u, "l_u^* = L_u^*"'] & \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Пресликавање $\widetilde{H}$ остварује хомотопију између инклузије $\overline{j}_{b_1}: D^n_{b_1}\hookrightarrow E$ и композиције $\overline{j}_{b_2}\circ\overline{l_u}: D^n_{b_1}\longrightarrow E$, а још је и $\widetilde{H}(S^{n-1}_{b_1}\times I) = H(S^{n-1}_{b_1}\times I)\subseteq E'$, па је $\widetilde{H}$ онда и хомотопија између пресликавања парова $(D^n_{b_1},S^{n-1}_{b_1})\xhookrightarrow{i_{b_1}}(E,E')$ и $i_{b_2}\circ K_u:(D^n_{b_1},S^{n-1}_{b_1})\longrightarrow(E,E')$ кроз пресликавања парова. Добили смо, дакле, жељену комутативност дијаграма (0), па коначно имамо и дијаграм (1). ✓

Из чињенице (К) (с полеђине листа $\boxed{126}$) и дијаграма (Д) одмах добијамо наредни став.

Став 21: Релативно раслојење (Д,CP) је R-оријентабилно акко

$$(\forall b_1,b_2\in B)\ (\forall u,v\in P_{b_1,b_2})\quad K_u^* = K_v^*.$$

Желимо да повежемо појам R-оријентабилности релативног раслојења (ДСР) с постојањем Томове класе са R коефицијентима тог раслојења. На полеђини листа $\boxed{124}$ разматрали смо понашање Томове класе у односу на повлачење $\underbrace{\text{раслојења}}_{\text{(ДСР) помоћу пресл. } f:X\to B}$. Урадимо сад то и за R-оријентабилност.

$$\begin{tikzcd}
(D^n_{f(x)}, S^{n-1}_{f(x)}) \arrow[r, equal] \arrow[d, hook, "j_x"'] & (D^n_{f(x)}, S^{n-1}_{f(x)}) \arrow[d, hook, "i_{f(x)}"] \\
(f^*(E), f^*(E')) \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\tilde{p}"'] & (E, E') \arrow[d, "p"] \\
X \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

За фиксирано $x \in X$, докажимо да је $\boxed{\varphi_x = \varphi_{f(x)} \circ f_*}$ (в. дијаграм доле десно), па ћемо одмах имати и да је $\boxed{\psi^R_x = \psi^R_{f(x)} \circ f_*}$.

Нека је $u : I \to X$ петља у т. x. Тада је $f \circ (u^{-1} \circ p_I) = (f \circ u)^{-1} \circ p_I$,

$$\underline{\underline{(f\circ u)^{-1}(t)}} = (f \circ u)(1-t) = f(u(1-t)) = f(u^{-1}(t)) = \underline{\underline{(f \circ u^{-1})(t)}}$$

па ако је $\underline{H : S^{n-1}_{f(x)} \times I \longrightarrow E'}$ одговарајуће подизање, онда је

$$\underline{\underline{\varphi_{f(x)}(f_*[u])}} = \varphi_{f(x)}[f \circ u] = L_{(f\circ u)^{-1}} = \underline{\underline{[l_{f\circ u^{-1}}]}},$$

где је $l_{f\circ u^{-1}}(y) = H(y,1)$, $y \in S^{n-1}_{f(x)}$.

$$\begin{tikzcd}
& S^{n-1}_{f(x)} \arrow[r, equal] \arrow[dl, "\approx"'] \arrow[d, hook] & S^{n-1}_{f(x)} \arrow[d, hook] \\
S^{n-1}_{f(x)} \times \{0\} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & f^*(E') \arrow[r] \arrow[d] & E' \arrow[d, "p'"] \\
S^{n-1}_{f(x)} \times I \arrow[r, "u^{-1}\circ p_I"', "\psi_x"] \arrow[ur, dashed, "\tilde{H}"] \arrow[urr, dashed, "H"] & X \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

$y \mapsto (y,0) \mapsto (x,y)$

Ако је $\underline{\tilde{H} : S^{n-1}_{f(x)} \times I \longrightarrow f^*(E')}$ дато са

$$\boxed{\tilde{H}(y,t) := (u^{-1}(t), H(y,t))}, \quad \underline{(y,t) \in S^{n-1}_{f(x)} \times I},$$

онда је $\tilde{H}$ једно подизање помоћу којег се добија $L_{u^{-1}} = \varphi_x[u]$. Наиме,

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X,x) \arrow[r, "f_*"] \arrow[rr, dashed, bend left] \arrow[drr, dashed, "\psi^R_x"'] & \pi_1(B, f(x)) \arrow[r, "\varphi_{f(x)}"] \arrow[dr, "\psi^R_{f(x)}"] & {[S^{n-1}_{f(x)}, S^{n-1}_{f(x)}]} \arrow[d, "*_R"] \\
& & \mathrm{Aut}_R(\tilde{H}^{n-1}(S^{n-1}_{f(x)}; R))
\end{tikzcd}$$

$\underline{\underline{\varphi_x[u]}} = L_{u^{-1}} = \underline{\underline{[l_{u^{-1}}]}}$, где је $l_{u^{-1}}(y) = \tilde{H}(y,1) = (u^{-1}(1), H(y,1)) = (x, l_{f\circ u^{-1}}(y))$, $y \in S^{n-1}_{f(x)}$.

Уз идентификацију $S^{n-1}_{f(x)} = \underbrace{\{x\} \times S^{n-1}_{f(x)}}_{= S^{n-1}_x}$, ово у ствари значи да је $\underline{\underline{l_{u^{-1}} = l_{f\circ u^{-1}}}}$, тo је, дакле, $\boxed{\varphi_x = \varphi_{f(x)} \circ f_*}$. Овим смо доказали наредну чињеницу: <u>ако је релативно раслојење (ДСР) оријентабилно (R-оријентабилно), онда је и његово повлачење помоћу било ког пресликавања оријентабилно (R-оријентабилно). Специјално, рестрикција (R)оријентабилног раслојења (в. дијаграм десно) је (R)оријентабилно раслојење.</u> (ОРП)

$$\begin{tikzcd}
(E_A, E'_A) \arrow[r, hook, "i_A"] \arrow[d, "p_A"'] & (E, E') \arrow[d, "p"] \\
A \arrow[r, hook] & B
\end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{Теорема 22:}}$ Релативно раслојење (ДСР) има Томову класу са R-коефицијентима акко је R-орјентабилно.

$$\begin{array}{ccc} (D^n, S^{n-1}) & \longrightarrow & (E, E') \\ & \underline{\underline{(ДСР)}} & \downarrow p \\ & & B \end{array}$$

Δ: $\boxed{\Rightarrow)}$ Нека је $c \in H^n(E, E'; R)$ Томова класа, $b_1, b_2 \in B$, $u \in P_{b_1, b_2}$. На основу дијаграма (1) (с полеђине листа $\boxed{127}$), важи да је

$$K_u^* \, \underline{i_{b_2}^* c} = \underline{i_{b_1}^* c}.$$

Дакле, за произвољан пут $u \in P_{b_1, b_2}$, изоморфизам K_u^* пресликава генератор $i_{b_2}^* c$ слободног цикличног R-модула $H^n(D_{b_2}^n, S_{b_2}^{n-1}; R)$ у генератор $i_{b_1}^* c$ слободног цикличног R-модула $H^n(D_{b_1}^n, S_{b_1}^{n-1}; R)$. На основу става 21, (ДСР) је R-орјентабилно.

$\boxed{\Leftarrow)}$ Нека је (ДСР) R-орјентабилно. За $b_0 \in B$ (фиксирано) одаберимо генератор $g_{b_0} \in H^n(D_{b_0}^n, S_{b_0}^{n-1}; R)$.

Ако је $u : I \to B$ пут од т. b_0 до неке тачке $b \in B$, онда, на основу става 21, изоморфизам $K_u^* : H^n(D_b^n, S_b^{n-1}; R) \longrightarrow H^n(D_{b_0}^n, S_{b_0}^{n-1}; R)$ не зависи од пута u, па можемо на канонски начин одабрати и генератор $g_b \in H^n(D_b^n, S_b^{n-1}; R)$, $\boxed{K_u^*(g_b) = g_{b_0}}$.

Дакле, избором генератора $g_b \in H^n(D_b^n, S_b^{n-1}; R)$ за по једно b из сваке од компонената путне повезаности базног простора B, одабрани су генератори g_b за све $b \in B$, са својством

$$\underline{(\forall b_1, b_2 \in B)(\forall u \in P_{b_1, b_2}) \quad K_u^*(g_{b_2}) = g_{b_1}}. \quad \underline{(*)}$$

Нека је сад $f : X \to B$ и $\tilde{p} : (f^*(E), f^*(E')) \longrightarrow X$ повлачење раслојења p помоћу f. Како се слој раслојења $\tilde{p}$ над тачком $x \in X$ поклапа са слојем раслојења p над тачком $f(x) \in B$, што избор генератора g_b, $b\in B$, ~~[illegible]~~ са својством (*) индукује избор генератора $g_{f(x)}\in H^n(D^n_{f(x)}, S^{n-1}_{f(x)};R)$, $x\in X$, који такође задовољава услов(*). Наиме, у разматрању уочи теореме 22, користећи идентификацију $S^{n-1}_{f(x)} = \underbrace{\{x\}\times S^{n-1}_{f(x)}}_{=S^{n-1}_x}$ установили смо да је $l_u = l_{f\circ u}$ за произвољну петљу u у т. x. Међутим, на потпуно исти начин се добија да ово важи и за произвољан пут $u: I\to X$. Зато је и $L^*_u = L^*_{f\circ u}$, па и $K^*_u = K^*_{f\circ u}$ (в. дијаграм(Д) на претх. листу)

Дакле, $(\forall x_1,x_2\in X)(\forall u\in P_{x_1,x_2})\ K^*_u(g_{f(x_2)}) = K^*_{f\circ u}(g_{f(x_2)}) \underset{(*)}{=} g_{f(x_1)}$. ✓

$f\circ u\in P_{f(x_1),f(x_2)}$

Доказаћемо заправо следећу чињеницу:

(Ч) Ако је $\{g_b\}_{b\in B}$ фамилија генератора слободних цикличних R-модула $H^n(D^n_b, S^{n-1}_b;R)$, $b\in B$, таква да важи услов (*), онда постоји јединствена (Томова) класа $c\in H^n(E,E';R)$ са својством да је $i_b^* c = g_b$ за све $b\in B$.

За почетак доказујемо следеће: ако је $f:X\to B$ $(n+1)$-еквиваленција и ако је (Ч) тачно за повлачење $\tilde{p}$, онда је тачно и за p (в. дијаграм десно). (ПОВ)

$$\begin{tikzcd}
(D^n_{f(x)}, S^{n-1}_{f(x)}) \arrow[r, equal] \arrow[d, "j_x"] & (D^n_{f(x)}, S^{n-1}_{f(x)}) \arrow[d, "i_{f(x)}"] \\
(f^*(E), f^*(E')) \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\tilde{p}"] & (E,E') \arrow[d, "p"] \\
X \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

$\{g_b\}_{b\in B}$; (*) $\dashrightarrow$ $\{g_{f(x)}\}_{x\in X}$ (*) ✓

$\gamma\in H^n(f^*(E),f^*(E');R)$ т.д. је $j_x^*\gamma = g_{f(x)}$ за све $x\in X$.

$q^*: H^n(E,E';R)\to H^n(f^*(E),f^*(E');R)$ је изоморфизам јер је f $(n+1)$-еквиваленција (в. чињеницу (*) на полеђини листа $\boxed{113}$, из доказа Лере-Хиршове теор

$c := (q^*)^{-1}(\gamma)$

$b\in B$ произв. , f је 0-екв. $\Rightarrow \exists x\in X\ \exists v\in P_{b,f(x)}$

$i_b^* c \overset{(1)}{=} K_v^* i_{f(x)}^* c \overset{(2)}{=} K_v^* j_x^* q^* c = K_v^* j_x^*\gamma = K_v^* g_{f(x)} \overset{(*)}{=} g_b$. ✓

$$\begin{tikzcd}
H^n(D^n_{f(x)}, S^{n-1}_{f(x)};R) \arrow[rr, "K_v^*"] & & H^n(D^n_b, S^{n-1}_b;R) \\
H^n(f^*(E),f^*(E');R) \arrow[u, "j_x^*"] \arrow[r, phantom, "(2)"] & & H^n(E,E';R) \arrow[ll, "q^*"] \arrow[ull, "i_{f(x)}^*"'] \arrow[u, "i_b^*"'] \arrow[u, phantom, "(1)", shift right=6]
\end{tikzcd}$$

Ако је $\widetilde{c} \in H^n(E,E';R)$ још једна класа са својством да је $i_b^* \widetilde{c} = g_b$ за све $b \in B$, онда је $j_x^* q^* \widetilde{c} \overset{(2)}{=} i_{f(x)}^* \widetilde{c} = g_{f(x)}$ за све $x \in X$.

$$\Longrightarrow q^* \widetilde{c} = \gamma \Longrightarrow \underline{\widetilde{c} = (q^*)^{-1} \gamma = c}.$$

Докажимо сад да (4) важи ако је <u>базни простор B CW-комплекс</u>.

$\boxed{1^\circ}$ <u>B: коначно-димензион</u>

<u>Индукцијом по $\dim B$:</u>

$\dim B = 0 \Longrightarrow B$ је дискретан топол. простор $\Longrightarrow B = \bigsqcup_{b \in B} \{b\}$

$$\Longrightarrow (E,E') = \Big(\bigsqcup_{b\in B} D_b^n, \bigsqcup_{b \in B} S_b^{n-1}\Big)$$

тополошки дисј. уније

(РКД) с листа $\boxed{17}$ $\Longrightarrow$ $\prod_{b \in B} i_b^*$ је изоморфизам, а за свако $b_0 \in B$ имамо наредни комутативни дијаграм (π_{b_0} је одговарајућа пројекција)

$$\begin{tikzcd}
H^n(E,E';R) \arrow[rr, tail, two heads, "\prod_{b\in B} i_b^*"] \arrow[dr, "i_{b_0}^*"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{(+)}{=}"] & \prod_{b \in B} H^n(D_b^n, S_b^{n-1}; R) \arrow[dl, "\pi_{b_0}"] \\
& H^n(D_{b_0}^n, S_{b_0}^{n-1}; R) &
\end{tikzcd}$$

$\{g_b\}_{b \in B}$ скуп генератора слоб. цикличних R-модула $H^n(D_b^n, S_b^{n-1}; R)$, $b \in B$ (услов (*) је тривијално задовољен)

<u>$c \in H^n(E,E';R)$</u> т. д. $\Big(\prod_{b\in B} i_b^*\Big)(c)$ има баш g_{b_0} за b_0-координату;

тј. т. д. је $\pi_{b_0}\Big(\Big(\prod_{b \in B} i_b^*\Big)(c)\Big) = g_{b_0}$, за све $b_0 \in B$.

Из комутативности дијаграма (+) одмах имамо да је $i_{b_0}^* c = g_{b_0}$, $b \in B$ а имамо и јединственост класе c са овом особином.

(dim $B =: m \geq 1$) Прет. да (Ч) важи за релативна расложења $\{g_b\}_{b\in B}$, (*) код којих је базни простор X CW-комплекс димензије $< m$. $\begin{array}{c}(D^n,S^{n-1}) \to (T,T') \\ \downarrow \\ X\end{array}$

$\{e^m_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$ - скуп свих m-ћелија комплекса B

За $\lambda\in\Lambda$ одоберимо $O_\lambda \in e^m_\lambda$.

$$\underline{U := \coprod_{\lambda\in\Lambda} e^m_\lambda \in \mathcal{T}_B}\ ,\quad \underline{V := B\setminus\{O_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}\in\mathcal{T}_B}\ ,\quad \underline{U\cup V = B}$$

$$E_U := p^{-1}(U)\ ,\ E_V := p^{-1}(V)\ ,\ E_{U\cap V} := p^{-1}(U\cap V) = E_U\cap E_V\ ,$$

$$E'_U = E_U\cap E'\ ,\ E'_V = E_V\cap E'\ ,\ E'_{U\cap V} := E'_U\cap E'_V = E_{U\cap V}\cap E'$$

$$U \simeq \coprod_{\lambda\in\Lambda} *_\lambda \xRightarrow{\text{(ИХ)},\,\text{(ПОВ)}} \underline{\exists_1\, c_U\in H^n(E_U,E'_U;R)}\quad \underline{\forall b\in U\ \ (i^U_b)^*(c_U) = g_b}$$

$$V \simeq B^{m-1} \xRightarrow{\text{(ИХ)},\,\text{(ПОВ)}} \underline{\exists_1\, c_V\in H^n(E_V,E'_V;R)}\ \ \underline{\forall b\in V\ \ (i^V_b)^*(c_V) = g_b}$$

$$U\cap V = \coprod_{\lambda\in\Lambda} e^m_\lambda\setminus\{O_\lambda\} \simeq \coprod_{\lambda\in\Lambda} S^{m-1}_{(\lambda)} \xRightarrow{\text{(ИХ)},\,\text{(ПОВ)}} \underline{\exists_1\, c_{U\cap V}\in H^n(E_{U\cap V},E'_{U\cap V};R)}$$

$$\underline{(\forall b\in U\cap V)\ \ (i^{U\cap V}_b)^*(c_{U\cap V}) = g_b} \qquad \text{(ПЈ)}$$

Уочимо релативни кохомолошки Мајер-Вијеторисов низ (подразумевамо R коефицијенте). Како релативно расложење $\begin{array}{c}(D^n,S^{n-1}) \to (E_{U\cap V},E'_{U\cap V}) \\ \downarrow p_{U\cap V} \\ U\cap V\end{array}$ има Томову класу $c_{U\cap V}$, то важи да је $H^{n-1}(E_{U\cap V},E'_{U\cap V}) = 0$ (на основу (Т) са листа $\boxed{124}$)...

$\underline{b\in U\cap V}$

$$\begin{tikzcd}
 & (E_U,E'_U) \arrow[dr, "i_1"] & \\
(D^n_b,S^{n-1}_b) \arrow[ur, "i^U_b"] \arrow[r, "i^{U\cap V}_b"] \arrow[dr, "i^V_b"'] & (E_{U\cap V},E'_{U\cap V}) \arrow[u, "j_1"] \arrow[d, "j_2"'] \arrow[r, "i_b"] & (E,E') \\
 & (E_V,E'_V) \arrow[ur, "i_2"'] &
\end{tikzcd} \qquad (::)$$

$$0 \to H^n(E,E') \xrightarrow{(i_1^*,i_2^*)} H^n(E_U,E'_U)\oplus H^n(E_V,E'_V) \xrightarrow{j_1^*-j_2^*} H^n(E_{U\cap V},E'_{U\cap V}) \to \cdots$$

$$(\forall b\in U\cap V)\ \ (i^{U\cap V}_b)^*\, j_1^* c_U \overset{(::)}{=} (i^U_b)^* c_U \overset{\text{(ПЈ)}}{=} g_b\ ,\ \ (i^{U\cap V}_b)^*\, j_2^* c_V \overset{(::)}{=} (i^V_b)^* c_V \overset{\text{(ПЈ)}}{=} g_b$$

$$\xRightarrow{\text{(ПЈ)}}\ \ j_1^* c_U = j_2^* c_V = c_{U\cap V}$$

$$\Longrightarrow\ \ (c_U,c_V)\in \ker(j_1^*-j_2^*) = \operatorname{im}(i_1^*,i_2^*)$$

$\underline{\underline{c \in H^n(E,E')}}$ т.ј. је $\underline{i_1^* c = c_U}$ и $\underline{i_2^* c = c_V}$.

$\underline{b \in B \text{ произв.}}$ (1°) $b \in U \Rightarrow \underline{i_b^* c = (i_b^U)^* i_1^* c = (i_b^U)^* c_U = g_b}$

(2°) $b \in V \Rightarrow \underline{i_b^* c = (i_b^V)^* i_2^* c = (i_b^V)^* c_V = g_b}$ ✓

Ако је $\tilde{c} \in H^n(E,E')$ још једна класа са својством $(\forall b \in B)\ i_b^* \tilde{c} = g_b$, онда је

$$\left.\begin{array}{l}(\forall b \in U)\ (i_b^U)^* i_1^* \tilde{c} = i_b^* \tilde{c} = g_b \xRightarrow{(\text{ПЈ})} i_1^* \tilde{c} = c_U \\ (\forall b \in V)\ (i_b^V)^* i_2^* \tilde{c} = i_b^* \tilde{c} = g_b \xRightarrow{(\text{ПЈ})} i_2^* \tilde{c} = c_V\end{array}\right\} \xrightarrow{(i_1^*, i_2^*) \text{ је } 1\text{-}1} \tilde{c} = c \ ✓$$

$\boxed{2°}$ B бесконачно-димензион

Како је инклузија $B^{n+1} \hookrightarrow B$ $(n+1)$-еквиваленција, то овај случај следи из претходног и чињенице (ПОВ).

Ако је B произвољан тополошки простор, онда, на основу теореме о CW-апроксимацији, постоје CW-комплекс X и слаба хомотопска еквиваленција $f: X \to B$, па (Ч) важи и у овом општем случају на основу (ПОВ).

Дакле, ако је (ДСР) R-оријентабилно, онда можемо одабрати генераторе $g_b \in H^n(D_b^n, S_b^{n-1}; R)$, $b \in B$, тако да важи услов (*), а онда, на основу (Ч), имамо и Томову класу са R коефицијентима раслојења (ДСР). ∎

Из доказа теореме 22 видимо да је Томова класа са R коефицијентима, код постоји (тј. код је раслојење R-оријентабилно), у потпуности одређена својим сликама при $i_b^*: H^n(E,E';R) \to H^n(D_b^n, S_b^{n-1}; R)$ за по једно b из сваке од компонената путне повезаности базног простора B. Зато из чињенице $\boxed{\text{III}}$ (с листа $\boxed{127}$) добијамо следећу последицу.

$\boxed{\text{Последица 23:}}$ Свако релативно раслојење облика (ДСР) има јединствену Томову класу са $\mathbb{Z}_2$ коефицијентима.

Поред тога, ако је базни простор B R-оријентабилног релативног раслојења (ДСР) путно повезан, онда то раслојење има онолико различитих Томових класа колико има генератора (једночланих база) слободног цикличног R-модула R, тј. онолико колико има инвертибилних елемената у прстену R, дакле, $|R^*|$. Ако B, пак има k компонената путне повезаности, онда (ДСР) има $|R^*|^k$ Томових класа. Нпр., ако је (ДСР) $\mathbb{Z}$-оријентабилно и B путно повезан, онда (ДСР) има тачно две Томове класе са $\mathbb{Z}$ коефицијентима: ако је једна од њих c, друга је $-c$.

~~За крај овог одељка наведимо још једну директну последицу теореме 22 и става 15.~~

~~**Последица 24:** Ако је релативно раслојење (ДСР) $\mathbb{Z}$-оријентабилно, онда је оно и R-оријентабилно за произвољан ком. прстен R~~

(ПРТИ) (в. полеђ. листа $\boxed{124}$)

$m \in \mathbb{Z}$ произв.

$$\begin{tikzcd}
H^{m-n}(B;R) \arrow[r, tail, two heads, "\Phi_c"] \arrow[d, "f^*"'] & H^{m}(E,E';R) \arrow[d, "q^*"] \\
H^{m-n}(X;R) \arrow[r, tail, two heads, "\Phi_{q^*c}"] & H^{m}(f^*(E),f^*(E');R)
\end{tikzcd}$$

С тим у вези, важи и природност Томовог изоморфизма. Прецизније, дијаграм десно комутира, где је Φ_c Томов изоморфизам који одговара Томовој класи c, а Φ_{q^*c} Томов изоморфизам који одговара ~~класи~~ Томовој класи q^*c.

$$\begin{tikzcd}
\beta \arrow[r, mapsto] \arrow[ddd] & p^*(\beta)\cdot c \arrow[d] \\
& q_E^* p^* \beta \cdot q^* c \\
& \| \\
f^*\beta \arrow[r, mapsto] & \tilde{p}^* f^* \beta \cdot q^* c
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(f^*(E), f^*(E')) \arrow[r, "q"] & (E, E') \\
(f^*(E), \emptyset) \arrow[u, hook] \arrow[r, "q_E"] & (E, \emptyset) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
f^*(E) \arrow[r, "q_E"] \arrow[d, "\tilde{p}"'] & E \arrow[d] \\
X \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

Природност Томове класе и Томовог изоморфизма се може формулисати и у мало општијој ситуацији. Нека имамо комутативан дијаграм (П), где су $\tilde{p}$ и p диск-раслојења, а q такво да је за свако $x \in X$ $q|_{D^n_x} : D^n_x \longrightarrow D^n_{f(x)}$ хомеоморфизам. Нека су још и $E' \subset E$ и $T' \subset T$ као у примеру на листу $\boxed{112}$.

$$\begin{tikzcd} D^n_x \arrow[r, "q|_{D^n_x}", "\approx"'] \arrow[d, hook] & D^n_{f(x)} \arrow[d, hook] \\ T \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\tilde{p}"'] \arrow[dr, phantom, "(\Pi)"] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd} \dashrightarrow \begin{tikzcd} (D^n_x, S^{n-1}_x) \arrow[r, "\bar{q}_x"] \arrow[d, hook, "j_x"'] & (D^n_{f(x)}, S^{n-1}_{f(x)}) \arrow[d, hook, "i_{f(x)}"] \\ (T,T') \arrow[r, "\bar{q}"] \arrow[d, "\tilde{p}"'] \arrow[dr, phantom, "(P)"] & (E,E') \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Тада је $q(T') \subseteq E'$ и имамо комутативан дијаграм (Р) релативних раслојења. При том, ако је $c \in H^n(E,E';R)$ Томова класа са R коефицијентима раслојења P, онда је $\bar{q}^* c \in H^n(T,T';R)$ Томова класа са R коефицијентима раслојења $\tilde{p}$ и важи да комутира дијаграм (И), где су Φ_c и $\Phi_{\bar{q}^* c}$ одговарајући Томови изоморфизми, а $m \in \mathbb{Z}$ произвољно. Наиме, за $x \in X$ важи да је $j_x^* \bar{q}^* c = \bar{q}_x^* i_{f(x)}^* c$ генератор слободног цикличног R-модула $H^n(D^n_x, S^{n-1}_x; R)$,

$$\begin{tikzcd} H^{m-n}(B;R) \arrow[r, tail, two heads, "\Phi_c"] \arrow[d, "f^*"'] \arrow[dr, phantom, "(И)"] & H^m(E,E';R) \arrow[d, "\bar{q}^*"] \\ H^{m-n}(X;R) \arrow[r, tail, two heads, "\Phi_{\bar{q}^* c}"] & H^m(T,T';R) \end{tikzcd} \quad (\text{ТОМ})$$

$$\begin{tikzcd} \beta \arrow[r, mapsto] \arrow[dd, mapsto] & p^*(\beta) \cdot c \arrow[d, mapsto] \\ & q^* p^* \beta \cdot \bar{q}^* c \arrow[d, phantom, "\Vert (\Pi)"] \\ f^* \beta \arrow[r, mapsto] & \tilde{p}^* f^* \beta \cdot \bar{q}^* c \end{tikzcd}$$

јер је $i^*_{f(x)} c$ генератор слоб. цикличног R-модула $H^n(D^n_{f(x)}, S^{n-1}_{f(x)}; R)$, а $\bar{q}_x^*$ изоморфизам (на основу 5-леме).

VI.4. Ојлерова класа, Гисинов тачан низ

(ТОГ) (121-123)

Нека је $n \in \mathbb{N}$ и нека је дато сферно раслојење

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r] & E \arrow[d, "p"] \\ & B \end{tikzcd} \quad \text{(СФР)}$$

На основу става 13, хомотопска еквиваленција $h_p : M_p \to B$ је диск-раслојење, па тако (на основу коментара иза поменутог става) добијамо релативно раслојење

$$\begin{tikzcd} (D^n, S^{n-1}) \arrow[r] & (M_p, E) \arrow[d, "h_p"] \\ & B \end{tikzcd} \quad \text{(ЦСФР)}$$

Дефиниција 24: Нека је R комутативан прстен т.д. је сферно раслојење (СФР) R-оријентабилно. Ако је $c \in H^n(M_p, E; R)$ Томова класа са R коефицијентима релативног раслојења (ЦСФР), онда дефинишемо Ојлерову класу са R коефицијентима раслојења (СФР) $e = e_c \in H^n(B; R)$ (која одговара Томовој класи c) на сл. начин:

$$\boxed{e := \left(h_p^*\right)^{-1} i^* c}, \qquad \begin{tikzcd} H^n(M_p, E; R) \arrow[r, "i^*"] & H^n(M_p; R) \\ & H^n(B; R) \arrow[u, "h_p^*"] \end{tikzcd}$$

где је $i : (M_p, \emptyset) \hookrightarrow (M_p, E)$ инклузија.

Дакле, Ојлерова класа је одређена једнакошћу $\boxed{h_p^* e = i^* c}$. Приметимо да, ако је $\Phi = \Phi_c : H^n(B; R) \to H^{2n}(M_p, E; R)$ одговарајући Томов изоморфизам, онда је $\Phi(e) = h_p^* e \cdot c = i^* c \cdot c \underset{\text{став 22р II}}{=} c^2$, па је и ово

Начин задавања Ојлерове класе ($\underline{e = \phi^{-1}(c^2)}$).

Став 25: Ако је $e \in H^n(B;\mathbb{Z})$ Ојлерова класа раслојења (СФР) (која одговара Томовој класи $c \in H^n(M_p,E;\mathbb{Z})$) и $\varphi : \mathbb{Z} \to R$ (канонски) хомоморфизам прстена, онда је $\varphi_* e \in H^n(B;R)$ Ојлерова класа раслојења (СФР) (која одговара Томовој класи $\varphi_* c \in H^n(M_p,E;R)$; в. став 15).

Δ:

$$\begin{tikzcd}
 & H^n(M_p,E;\mathbb{Z}) \arrow[rr, "i^*"] \arrow[dl, "\varphi_*"'] & & H^n(M_p;\mathbb{Z}) \arrow[dl, "\varphi_*"'] \\
H^n(M_p,E;R) \arrow[rr, "i^*"] & & H^n(M_p;R) & \\
 & & & H^n(B;\mathbb{Z}) \arrow[uu, "h_p^*"'] \arrow[dl, "\varphi_*"] \\
 & & H^n(B;R) \arrow[uu, "h_p^*"] &
\end{tikzcd}$$

φ_* је кохомолошка операција $\Rightarrow$ комутирају дијаграми ✓

$$\underline{\underline{h_p^*(\varphi_* e)}} = \varphi_* h_p^* e = \varphi_* i^* c = \underline{\underline{i^*(\varphi_* c)}}$$ ✓

Став 26: (природност Ојлерове класе) Нека је R комутативан прстен т.д. је сферно раслојење (СФР) R-оријентабилно и нека је $f : X \to B$ непр. пресликавање. Ако је $e \in H^n(B;R)$ Ојлерова класа раслојења (СФР) (која одговара Томовој класи $c \in H^n(M_p,E;R)$), онда је $f^* e \in H^n(X;R)$ Ојлерова класа повлачења $\tilde{p}$ (која одговара Томовој класи $\bar{q}^* c \in H^n(M_{\tilde{p}}, f^*(E);R)$ где је $\bar{q} : (M_{\tilde{p}}, f^*(E)) \longrightarrow (M_p,E)$ извесно природно дефинисано пресликавање; в. (ТОМ) на претходном листу и доказ овог става)

$$\begin{tikzcd}
S^{n-1} \arrow[r, equal] \arrow[d] & S^{n-1} \arrow[d] \\
f^*(E) \arrow[r, "q_E"] \arrow[d, "\tilde{p}"'] & E \arrow[d, "p"] \\
X \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

Δ: Дефинишимо (непр.) пресликавање $q : M_{\tilde{p}} \to M_p$ т.д. дијаграм (П) комутира и т.д. је $q|_{D^n_x} : D^n_x \longrightarrow D^n_{f(x)}$ хомеоморфизам за све $x \in X$ (в. (ТОМ) на претходном листу).

$$\begin{tikzcd}
M_{\tilde{p}} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "h_{\tilde{p}}"'] \arrow[dr, phantom, "(\Pi)"] & M_p \arrow[d, "h_p"] \\
X \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

Приметимо најпре да је, за дато $b \in B$,

$$\underline{\underline{D^n_b}} = h_p^{-1}(\{b\}) = \underline{\underline{\Pi(S^{n-1}_b \times I)}}.$$

$$\begin{tikzcd}
E \times I \sqcup B \arrow[d, "\Pi"'] \arrow[dd, bend left, "p \circ p_1 \sqcup 1\!\!1_B"] \\
M_p \arrow[d, "h_p"'] \arrow[r, phantom, "(1)"] & {} \\
B
\end{tikzcd}$$

Наиме, $\Pi^{-1} h_p^{-1}(\{b\}) \overset{(1)}{=} (p \circ p_1 \sqcup 1\!\!1_B)^{-1}(\{b\}) = \underbrace{p^{-1}(\{b\})}_{= S^{n-1}_b} \times I \sqcup \{b\}$,

па је $h_p^{-1}(\{b\}) \overset{\boxed{\Pi \text{ је „на"}}}{=} \Pi(\Pi^{-1} h_p^{-1}(\{b\})) = \Pi(S^{n-1}_b \times I \sqcup \{b\}) \underset{\Pi(b) = \Pi(e,0) \text{ за произв. } e \in S^{n-1}_b}{=} \Pi(S^{n-1}_b \times I)$.

Слично, за дато $x \in X$ је

$$D^n_x = \widetilde{\Pi}(S^{n-1}_x \times I) = \widetilde{\Pi}(\underbrace{\{x\} \times S^{n-1}_{f(x)}}_{\subseteq f^*(E),\ = S^{n-1}_x} \times I);$$

$$\begin{tikzcd}
f^*(E) \times I \sqcup X \arrow[d, "\widetilde{\Pi}"'] \arrow[dd, bend left, "\underbrace{\widetilde{p} \circ p_1}_{= p_1} \sqcup 1\!\!1_X"] \\
M_{\widetilde{p}} \arrow[d, "h_{\widetilde{p}}"'] \\
X
\end{tikzcd}$$

док је $D^n_{f(x)} = \Pi(S^{n-1}_{f(x)} \times I)$.

$$\begin{tikzcd}
f^*(E) \times I \sqcup X \arrow[rr, "q_E \times 1\!\!1_I \sqcup f"] \arrow[d, "\widetilde{\Pi}"'] \arrow[dd, bend left, "p_1 \sqcup 1\!\!1_X"] & & E \times I \sqcup B \arrow[d, "\Pi"] \arrow[dd, bend left, "p \circ p_1 \sqcup 1\!\!1_B"] \\
M_{\widetilde{p}} \arrow[rr, dashed, "q"] \arrow[d, "h_{\widetilde{p}}"'] & & M_p \arrow[d, "h_p"] \\
X \arrow[rr, "f"] & & B
\end{tikzcd}$$

$(x,e) \in f^*(E) \Rightarrow f(x) = p(e)$

$(x,e,0) \sim \widetilde{p}(x,e) = x$

$$\begin{tikzcd}
(x,e,0) \arrow[r, mapsto] & (e,0) \arrow[d, mapsto] & x \arrow[r, mapsto] & f(x) = p(e) \arrow[d, mapsto] \\
& {[e,0]} \arrow[rr, equal] & & {[p(e)]}
\end{tikzcd}$$

$\checkmark$

$\Longrightarrow \exists_1 q$ $\checkmark$

Лако се проверава $\underset{\Rightarrow (\Pi)}{}$ да је $f \circ (p_1 \sqcup 1\!\!1_X) = (p \circ p_1 \sqcup 1\!\!1_B) \circ (q_E \times 1\!\!1_I \sqcup f)$, па је и $h_p \circ q = f \circ h_{\widetilde{p}}$ (јер је $h_p \circ q \circ \widetilde{\Pi} = f \circ h_{\widetilde{p}} \circ \widetilde{\Pi}$, а $\widetilde{\Pi}$ „на"). Зато је и $q(D^n_x) \subseteq D^n_{f(x)}$ за све $x \in X$. Међутим, ту је и

$$q(D^n_x) = q(\widetilde{\Pi}(\{x\} \times S^{n-1}_{f(x)} \times I)) = \Pi(q_E \times 1\!\!1_I(\{x\} \times S^{n-1}_{f(x)} \times I))$$
$$= \Pi(S^{n-1}_{f(x)} \times I) = D^n_{f(x)},$$

па је, дакле, $q|_{D^n_x} : D^n_x \longrightarrow D^n_{f(x)}$ „на". Поред [illegible], за две $\underset{}{\overset{(\text{различите}}{}}$ тачке (x, e_1, t_1),

$(x, e_2, t_2) \in \{x\} \times S^{n-1}_{f(x)} \times I$ важи да је

$$\Pi\big(q_E \times 1\!\!1_I (x, e_1, t_1)\big) = \Pi\big(q_E \times 1\!\!1_I (x, e_2, t_2)\big) \iff \Pi(e_1, t_1) = \Pi(e_2, t_2)$$
$$\iff t_1 = t_2 = 0$$
$$\iff \tilde{\Pi}(x, e_1, t_1) = \tilde{\Pi}(x, e_2, t_2);$$

па је $q|_{D^n_x}$ и „1-1". ~~[illegible]~~ Дакле, $q|_{D^n_x} : D^n_x \longrightarrow D^n_{f(x)}$ је непрекидна бијекција из компактног у T_2-простор, па је и хомеоморфизам.

Поред тога, из коментара након става 13 знамо да је $M'_p = E$, односно $M'_{\tilde{p}} = f^*(E)$, а из дефиниције пресл. q лако се види да је $q|_{f^*(E)} = q_E : f^*(E) \longrightarrow E$.

$$\begin{tikzcd}
(M_{\tilde{p}}, f^*(E)) \arrow[r, "\bar{q}"] \arrow[dr, phantom, "(\circ)"] & (M_p, E) \\
(M_{\tilde{p}}, \emptyset) \arrow[r, "q"] \arrow[u, "\tilde{i}"] & (M_p, \emptyset) \arrow[u, "i"'] \\
(f^*(E), \emptyset) \arrow[r, "q_E"] \arrow[u, "\tilde{j}"] & (E, \emptyset) \arrow[u, "j"']
\end{tikzcd}$$

На основу (ТОМ) са листа $\boxed{132}$, имамо комутативан дијаграм (P) релативних раслојења и $\bar{q}^* c \in H^n(M_{\tilde{p}}, f^*(E); R)$ је Томова класа рел. раслојења $h_{\tilde{p}}$.

$$\begin{tikzcd}
(M_{\tilde{p}}, f^*(E)) \arrow[r, "\bar{q}"] \arrow[d, "h_{\tilde{p}}"'] \arrow[dr, phantom, "(P)"] & (M_p, E) \arrow[d, "h_p"] \\
X \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & H^n(M_p, E; R) \arrow[rr, "i^*"] \arrow[dl, "\bar{q}^*"'] \arrow[dr, phantom, "(\circ)"] & & H^n(M_p; R) \arrow[dl, "q^*"'] \\
H^n(M_{\tilde{p}}, f^*(E); R) \arrow[rr, "\tilde{i}^*"] & & H^n(M_{\tilde{p}}; R) \arrow[dr, phantom, "(\Pi)"] & \\
 & & & H^n(B; R) \arrow[uu, "h^*_p"'] \arrow[dl, "f^*"] \\
 & & H^n(X; R) \arrow[uu, "h^*_{\tilde{p}}"] &
\end{tikzcd}$$

$$\underline{\underline{h^*_{\tilde{p}}(f^* e)}} = q^* h^*_p e = q^* i^* c = \underline{\underline{\tilde{i}^*(\bar{q}^* c)}}. \checkmark \blacksquare$$

Из чињенице $\boxed{\mathrm{III}}$ с полеђине листа $\boxed{126}$ и последице 23 закључујемо да свако сферно раслојење има јединствену Ојлерову класу са $\mathbb{Z}_2$ коефицијентима. (О32

За оријентабилно сферно раслојење над путно повезаним простором, пак, знамо да одговарајуће релативно раслојење има тачно две Томове класе са $\mathbb{Z}$ коефицијентима: c и $-c$. Зато то раслојење има највише две Ојлерове класе са $\mathbb{Z}$ коефицијентима: e и $-e$ (није забрањено да буде $e = -e$ тј. $2e = 0$).

Уочимо поново сферно раслојење (СФР).

$$\text{(СФР)}\qquad \begin{array}{c} S^{n-1} \longrightarrow E \\ \downarrow p \\ B \end{array}$$

Теорема 27: Ако је R комутативан прстен такав да је (СФР) R-оријентабилно и $e \in H^n(B;R)$ (нека) Ојлерова класа тог раслојења, онда постоји дуги тачан низ облика $(k \in \mathbb{Z})$

$$\cdots \to H^{k+n-1}(E;R) \to H^k(B;R) \xrightarrow{\cdot \cup e} H^{k+n}(B;R) \xrightarrow{p^*} H^{k+n}(E;R) \to \cdots$$

Δ: Овај тачан низ се добија из дугог тачног кохомолошког низа пара (M_p,E) тако што се групе $H^{k+n}(M_p,E;R)$ помоћу Томовог изоморфизма замене са $H^k(B;R)$, а $H^{k+n}(M_p;R)$ помоћу изоморфизма h_p^* са $H^{k+n}(B;R)$ $(k \in \mathbb{Z})$.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^{k+n-1}(E;R) \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, dashed] & H^{k+n}(M_p,E;R) \arrow[r, "i^*"] & H^{k+n}(M_p;R) \arrow[r, "j^*"] & H^{k+n}(E;R) \arrow[r] & \cdots \\
 & & H^k(B;R) \arrow[u, "\phi"] \arrow[r, dashed, "\cdot \cup e"] & H^{k+n}(B;R) \arrow[u, "h_p^*"] \arrow[ur, dashed, "p^*"] & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
h_p^*\beta \cdot c \arrow[r, mapsto] & h_p^*\beta \cdot i^*c \arrow[d, phantom, "\parallel"] \\
 & h_p^*\beta \cdot h_p^* e \\
\beta \arrow[uu, mapsto, "\phi"] \arrow[r, mapsto] & \beta \cdot e \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & M_p \arrow[d, "h_p"] \\
E \arrow[ur, "j"] \arrow[r, "p"'] & B
\end{tikzcd}$$

(став 22р II)

$\boxed{\phi = \phi_c}$, где је $c \in H^n(M_p,E;R)$ Томова класа т.ј. је $e = e_c$.

■

Дефиниција 28: Дуги тачни низ из теореме 27 називамо Гисиновим низом R-оријентабилног раслојења (СФР) (придруженим Ојлеровој класи e)

Из Гисиновог низа можемо да покажемо да (произвољну) Ојлерову класу раслојења (СФР) можемо видети као опструкцију за постојање секције тог раслојења – пресликавања $s: B \to E$ са својством $p \circ s = 1_B$. Наиме, ако је (било која) Ојлерова класа нетривијална, онда не постоји секција. То указујемо у наредном ставу.

$\boxed{\text{Став 29:}}$ Ако је R комутативан прстен т.д. је (СФР) R-оријентабилно и $e\in H^n(B;R)$ (нека) Ојлерова класа тог раслојења, онда важи сл. импликација:

$$\text{(СФР) има секцију} \implies e=0.$$

Δ: Уочимо део Гисиновог низа:

$$\cdots\longrightarrow H^0(B;R)\xrightarrow{\ \cdot\cup e\ } H^n(B;R)\underset{s^*}{\overset{p^*}{\rightleftarrows}} H^n(E;R)\longrightarrow\cdots$$

$$p\circ s=1_B \implies s^*\circ p^* = 1_{H^n(B;R)} \implies p^* \text{ је „1-1"} \implies (\cdot\cup e)=0$$

$$\implies \underline{\underline{e}} = 1\cup e = (\cdot\cup e)(1) = \underline{\underline{0}}.\ ✓✓$$

$\boxed{\text{Став 30:}}$ (природност Гисиновог низа)

Нека је R комутативан прстен т.д. је (СФР) R-оријентабилно, $e\in H^n(B;R)$ Ојлерова класа и $f:X\to B$ непрек. пресликавање. Тада комутира наредни дијаграм, где је горњи водоравни низ Гисинов низ раслојења p који је придружен Ојлеровој класи e, а доњи Гисинов низ повлачења $\tilde p$ придружен Ојлеровој класи f^*e (в: став 26 и његов доказ

$$\begin{tikzcd}
S^{n-1} \arrow[r, equal] \arrow[d] & S^{n-1} \arrow[d] \\
f^*(E) \arrow[r, "q_E"] \arrow[d, "\tilde p"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & E \arrow[d, "p"] \\
X \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^{k+n-1}(E;R) \arrow[r] \arrow[d, "q_E^*"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H^k(B;R) \arrow[r, "\cdot\cup e"] \arrow[d, "f^*"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H^{k+n}(B;R) \arrow[r, "p^*"] \arrow[d, "f^*"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H^{k+n}(E;R) \arrow[r] \arrow[d, "q_E^*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^{k+n-1}(f^*(E);R) \arrow[r] & H^k(X;R) \arrow[r, "\cdot\cup f^*e"] & H^{k+n}(X;R) \arrow[r, "\tilde p^*"] & H^{k+n}(f^*(E);R) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Δ: Други и трећи квадрат очигледно комутирају, док први комутира на основу дијаграма десно ((•) комутира јер имамо пресликавање парова $\bar q:(M_{\tilde p}, f^*(E))\longrightarrow (M_p,E)$, в. (•) на претходном листу; (И) комутира на основу (ТОМ), в. (И) на листу [illegible]).

$$\begin{tikzcd}
H^{k+n-1}(E;R) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "q_E^*"'] \arrow[dr, phantom, "(\bullet)"] \arrow[rr, dashed, bend left] & H^{k+n}(M_p,E;R) & H^k(B;R) \arrow[l, "\Phi"'] \arrow[dd, "f^*"] \\
H^{k+n-1}(f^*(E);R) \arrow[r, "\delta"] \arrow[drr, dashed, bend right] & H^{k+n}(M_{\tilde p},f^*(E);R) \arrow[from=u, "\bar q^*"] \arrow[r, phantom, "(\text{И})"] & \\
 & & H^k(X;R) \arrow[ul, "\Phi"]
\end{tikzcd}$$

Наведимо сад једну примену Гисиновог низа.

$\boxed{\text{Став 31:}}$ Нека је дато сферно раслојење (СФР) и нека је тотални простор E контрактибилан. Тада:

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \longrightarrow & E \\ & & \downarrow p \\ (\text{СФР}) & & B \end{array}$$

(а) ако је $n=1$, онда је $\boxed{H^*(B;\mathbb{Z}_2)=\mathbb{Z}_2[e]}$, као градуисана $\mathbb{Z}_2$-алгебра, где је $e\in H^1(B;\mathbb{Z}_2)$ Ојлерова класа раслојења (СФР);

(б) ако је $n\geq 2$, онда је (СФР) оријентабилно и за произвољан комутативан прстен R важи да је $\boxed{H^*(B;R)=R[e]}$, као градуисана R-алгебра, где је $e\in H^n(B;R)$ (произвољна) Ојлерова класа раслојења (СФР).

Δ: $E\simeq * \implies E$ путно повезан $\xRightarrow{p \text{ је „на"}}$ B је путно повезан

$$\cdots\to \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\pi_1(E)}} \xrightarrow{p_*} \pi_1(B)\longrightarrow \pi_0(S^{n-1})\longrightarrow \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\pi_0(E)}}\to\cdots$$

$\implies$ За $n\geq 2$ B је просто повезан $\xRightarrow{\boxed{\mathrm{II}}\text{ е поред. листа }\boxed{126}}$ За $n\geq 2$ (СФР) је оријентабилно.

R - ком. прстен, $e\in H^n(B;R)$ - Ојлерова класа од (СФР) (за $n=1$ подразумева да је $R=\mathbb{Z}_2$)

Уочимо одговарајући Гисинов низ (подразумевамо R коефицијенте):

$$\underset{H^{-n}(B)}{\underset{\shortparallel}{0}} \xrightarrow{\cdot\cup e} \underset{R}{\underset{\cong}{H^0(B)}} \overset{p^*}{\rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow} \underset{R}{\underset{\cong}{H^0(E)}} \xrightarrow{0} H^{1-n}(B)\xrightarrow{\cdot\cup e} H^1(B)\xrightarrow{0} 0\to\cdots\to 0\to H^k(B)\xrightarrow{\cdot\cup e} H^{k+n}(B)\to 0$$

$\boxed{\text{И } B \text{ и } E \text{ су путно повез.}}$

Дакле, за све $k\in\mathbb{Z}\setminus\{-n\}$ имамо изоморфизам (R-модула) $H^k(B;R)\overset{\cdot\cup e}{\rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow} H^{k+n}(B;R)$.

Како је $H^0(B;R)=R\langle 1\rangle$, то индукцијом добијамо да је $H^{ln}(B;R)=R\langle e^l\rangle$ за све $l\in\mathbb{N}$, а како је $H^k(B;R)=0$ за $k<0$, то опет индукцијом имамо да је $H^k(B;R)=0$ за све $k>0$ т.д. $n\nmid k$. //

Став 31 даје и алтернативни доказ за чињенице

$\underline{\underline{H^*(\mathbb{R}P^\infty;\mathbb{Z}_2)=\mathbb{Z}_2[x]}}$, $\underline{|x|=1}$; $\underline{\underline{H^*(\mathbb{C}P^\infty;R)=R[w]}}$, $\underline{|w|=2}$; $\underline{\underline{H^*(\mathbb{H}P^\infty;R)=R[w]}}$, $\underline{|w|=4}$

(в. теореме 42 и 45 III). Наиме, $S^\infty \simeq *$, а имамо раслојења

$$\boxed{\begin{tikzcd} S^0 \arrow[r] & S^\infty \arrow[d] \\ & \mathbb{R}P^\infty \end{tikzcd}} \; ; \quad \boxed{\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r] & S^\infty \arrow[d] \\ & \mathbb{C}P^\infty \end{tikzcd}} \; ; \quad \boxed{\begin{tikzcd} S^3 \arrow[r] & S^\infty \arrow[d] \\ & \mathbb{H}P^\infty \end{tikzcd}} \; ; \qquad \underline{\underline{(EK)}}$$

која се добијају помоћу раслојења из примера 4), 5), односно 6) (са полеђине листа $\boxed{105}$ применом директног лимеса ($S^\infty = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}_0} S^n = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}_0} S^{2n+1} = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}_0} S^{4n+3}$, $\mathbb{R}P^\infty = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}_0}\mathbb{R}P^n$, $\mathbb{C}P^\infty = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}_0}\mathbb{C}P^n$, $\mathbb{H}P^\infty = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}_0}\mathbb{H}P^n$, где се заправо $\varinjlim_{n\in\mathbb{N}_0}$ може заменити са $\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0}$, ...).

Штавише, из једног од домаћих знамо да $H^*(B;\mathbb{Z})=\mathbb{Z}[e]$, $|e|=n$, повлачи да је $n=2^k$ за неко $k\in\mathbb{N}$, а на основу последице 4L.10. код Хечера (стр.49 ~~[illegible]~~ заправо важи ~~[illegible]~~ да $n\in\{2,4\}$. ~~[illegible]~~ Дакле, сферно раслојење (СФР) такво да је E контрактибилан постоји само за $n\in\{1,2,4\}$ (в. (EK)).

Помоћу Гисиновог низа можемо добити и следећу (добро познату) чињеницу: $\underline{\text{ако су } l,m,n\in\mathbb{N}_0 \text{ такви да постоји раслојење}}$ $\boxed{\begin{tikzcd} S^l \arrow[r] & S^m \arrow[d, "p"] \\ & S^n \end{tikzcd}}$, $\underline{\text{онда је } l=n-1 \text{ и } m=2n-1}$. Наиме,

$\underline{n=0} \xRightarrow{p \text{ je „на"}} m=0 \implies p$ је хомеоморфизам $\implies S^l = * \;\lightning$.

$\implies \boxed{n\geq 1}$

$\underline{l=0} \implies p$ је дволисно наткривање $\implies p_*(\pi_1(S^m))$ је подгрупа од $\pi_1(S^n)$ индекса 2

$\pi_1(S^k)=0$ за $k\neq 1$, $\pi_1(S^1)\cong\mathbb{Z} \implies \underline{m=n=1}$ ✓

претп. сад да је $l \geq 1$ (а знамо и да је $n \geq 1$):

уочимо Гисинов низ са $\mathbb{Z}_2$ коефицијентима и претп. још да је $\boxed{m \neq l}$

$$\cdots \to \underbrace{H^l(S^m)}_{\overset{(l \notin \{0,m\})}{=0}} \to \underbrace{H^0(S^n)}_{\cong \mathbb{Z}_2} \xrightarrow{\cdot \cup e} H^{l+1}(S^n) \to \cdots$$

$$\Rightarrow H^{l+1}(S^n) \neq 0 \Rightarrow \boxed{l = n-1}$$

$$\cdots \to H^{2n-1}(S^m) \to \underbrace{H^n(S^n)}_{\cong \mathbb{Z}_2} \xrightarrow{\cdot \cup e} \underbrace{H^{2n}(S^n)}_{=0} \to \cdots$$

$$\Rightarrow H^{2n-1}(S^m) \neq 0, \quad 2n-1 \geq 1 \Rightarrow \boxed{m = 2n-1};$$ ✓

случај $\boxed{m = l}$ заправо није ни могућ:

$$\cdots \to \underbrace{H^{n+m}(S^m)}_{\overset{(n \geq 1)}{=0}} \to \underbrace{H^n(S^n)}_{\cong \mathbb{Z}_2} \xrightarrow{\cdot \cup e} \underbrace{H^{n+m+1}(S^n)}_{=0} \to \cdots \quad \lightning.$$ ✓

У вези с тим, презентујмо и алтернативан доказ става 23 V.

$\boxed{\text{Став 23 V:}}$ Нека је $n \geq 2$. Ако је $p: S^{2n-1} \to S^n$ раслојење са слојем S^{n-1}, онда је његова Хопфова инваријанта

$$h(p) = \pm 1.$$

$$\begin{array}{l} S^{n-1} \to S^{2n-1} \\ \qquad\quad \downarrow p \\ \qquad\quad S^n \end{array}$$

Δ: Раслојење је оријентабилно јер је S^n просто повезан ($\boxed{\text{III}}$, полеђ. листа $\boxed{126}$).

$c \in H^n(M_p, S^{2n-1}; \mathbb{Z})$ Томова класа, $\Phi: H^n(S^n; \mathbb{Z}) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow H^{2n}(M_p, S^{2n-1}; \mathbb{Z})$ одговарајући Томов изоморфизам, $e \in H^n(S^n; \mathbb{Z})$ одговарајућа Ојлерова класа.

$$M_p = S^{2n-1} \times I \sqcup S^n /_{(y,0) \sim p(y)} \qquad \begin{array}{c} S^{2n-1} \times I \sqcup S^n \\ \downarrow \pi \\ M_p \end{array}$$

$$V := \pi\left(S^{2n-1} \times \left(\tfrac{2}{3}, 1\right]\right) \in \mathcal{T}_{M_p},$$

$S^{2n-1} = \pi(S^{2n-1} \times \{1\})$ је јаки деформациони ретракт од V

$\Rightarrow$ (M_p, S^{2n-1}) је добар пар.

$$\Rightarrow \quad H^n(M_p, S^{2n-1}; \mathbb{Z}) \xleftarrow{q^*} H^n(\underbrace{M_p/S^{2n-1}}_{=C_p}, \underbrace{S^{2n-1}/S^{2n-1}}_{=*}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\ell^*} H^n(C_p; \mathbb{Z})$$

став 10 II

$$(M_p, S^{2n-1}) \xrightarrow{q} (C_p, *) \xleftarrow{\ell} (C_p, \emptyset)$$

$$\Rightarrow H^n(M_p, S^{2n-1}; \mathbb{Z}) \cong H^n(C_p; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z},$$

$i_x^* c$ је генератор од $H^n(D^n_x, S^{n-1}_x; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ за $x \in S^n$, $i_x : (D^n_x, S^{n-1}_x) \hookrightarrow (M_p, S^{2n-1})$

$$\Rightarrow \boxed{c \text{ је генератор од } H^n(M_p, S^{2n-1}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}.} \quad (*)$$

Уочимо одговарајући Гисинов низ:

$$\cdots \to \underbrace{H^{n-1}(S^{2n-1}; \mathbb{Z})}_{=0} \to H^0(S^n; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cdot \cup e} H^n(S^n; \mathbb{Z}) \xrightarrow{p^*} \underbrace{H^n(S^{2n-1}; \mathbb{Z})}_{=0} \to \cdots$$

$$H^0(S^n; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\langle 1 \rangle \Rightarrow H^n(S^n; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\langle e \rangle, \quad \Phi(e) = c^2$$

$$\Rightarrow \boxed{c^2 \text{ је генератор од } H^{2n}(M_p, S^{2n-1}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}} \quad (**)$$

$$\begin{tikzcd}
H^n(C_p;\mathbb{Z}) \times H^n(C_p;\mathbb{Z}) \arrow[rr, "\cup"] & & H^{2n}(C_p;\mathbb{Z}) \\
H^n(C_p,*;\mathbb{Z}) \times H^n(C_p,*;\mathbb{Z}) \arrow[rr, "\cup"] \arrow[u, "\ell^* \times \ell^*"] \arrow[d, "q^* \times q^*"'] \arrow[urr, phantom, "\text{став 22р II}"] & & H^{2n}(C_p,*;\mathbb{Z}) \arrow[u, "\ell^*"'] \arrow[d, "q^*"] \\
H^n(M_p,S^{2n-1};\mathbb{Z}) \times H^n(M_p,S^{2n-1};\mathbb{Z}) \arrow[rr, "\cup"] \arrow[urr, phantom, "\text{став 22р II}"] & & H^{2n}(M_p,S^{2n-1};\mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

$$\xRightarrow{(*),(**)} h(p) = \pm 1.$$

Конус пресликавања p из доказа става, C_p, је тзв. Томов простор релативног раслојења $(D^n, S^{n-1}) \to (M_p, S^{2n-1})$.

$$\downarrow h_p$$
$$S^n$$

Општије, <u>Томов простор</u> <u>релативног раслојења (ДСР)</u> је количник E/E'. У случају кад је релативно раслојење добијено од сферног раслојења p на начин описан у ставу 13 ((СФР)$\dashrightarrow$(ЦСФР)), онда је његов Томов простор заправо конус пресликавања p, $M_p/E = C_p$.

$$\boxed{\begin{tikzcd} (D^n, S^{n-1}) \arrow[r] & (E,E') \arrow[d, "p"] \\ \underline{\underline{(ДСР)}} & B \end{tikzcd}}$$

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r] & E \arrow[d, "p"] \\ \underline{\underline{(СФР)}} & B \end{tikzcd} \dashrightarrow \begin{tikzcd} (D^n, S^{n-1}) \arrow[r] & (M_p,E) \arrow[d, "h_p"] \\ \underline{\underline{(ЦСФР)}} & B \end{tikzcd}$$

Ако је пар (E,E') добар (такав случај настаје нпр. код раслојења (ЦСФР), тј. пара (M_p,E); в. доказ става 23$\overline{V}$) и (ДСР) R-оријентабилно, онда Томову класу $c\in H^n(E,E';R)$ можемо да видимо и као елемент од $H^n(E/E';R)$ и имамо изоморфизме (за све $k\in\mathbb{Z}$)

$$H^k(B;R) \xrightarrow[\cong]{\Phi_*} H^{k+n}(E,E';R) \xleftarrow[\cong]{q^*} H^{k+n}(E/E',*;R) \xrightarrow[\cong]{\iota^*} \tilde{H}^{k+n}(E/E';R)$$

$$\text{за } k=0:\quad \breve{c} \longleftrightarrow \iota^*(q^*)^{-1}\breve{c}$$

$$(E,E') \xrightarrow{q} (E/E',*) \xhookleftarrow{\iota} (E/E',\emptyset)$$