

Анализа 2, 3.09.2025.

Први колоквијум

МР

1. На простору ограничених реалних низова X дато је пресликавање

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R} \quad d(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{|x_n - y_n|}}{2^n}.$$

Нека је задат и подскуп

$$A = \left\{ x \in X \mid \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x_n|}{2^n} \leq 1 \right\}.$$

- (а) Доказати да је пресликавање d метрика.
- (б) Испитати затвореност и отвореност скупа A .
- (в) Испитати повезаност скупа A .
- (г) Испитати компактност скупа A .

2. Дата је функција

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = x^2 + 2yz - z^2,$$

где је скуп D одређен са

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \ x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4} \right\}.$$

- (а) Доказати да функција f достиже минимум и максимум на скупу D .
 - (б) Одредити слику скупа D при пресликавању функцијом f .
3. Дат је систем једначина

$$F_1(x, y, z, \omega) = x^2 + yz - \omega = 0$$

$$F_2(x, y, z, \omega) = 3xy + z^2 - \omega^2 = 0.$$

- (а) Доказати да у околини тачке $(x_0, y_0, z_0, \omega_0) = (1, 1, 1, 2)$ постоји јединствена функција

$$(x, y) = \varphi(z, \omega) = (\varphi_1(z, \omega), \varphi_2(z, \omega))$$

таква да важи

$$F_1(\varphi_1(z, \omega), \varphi_2(z, \omega), z, \omega) = 0,$$

$$F_2(\varphi_1(z, \omega), \varphi_2(z, \omega), z, \omega) = 0,$$

$$\varphi(1, 2) = (1, 1).$$

- (б) Израчунати

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}(1, 2).$$