

Анализа 2, 3.09.2025.

Писмени испит

MP

1. На простору ограничених реалних низова X дато је пресликавање

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R} \quad d(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{|x_n - y_n|}}{2^n}.$$

Нека је задат и подскуп

$$A = \left\{ x \in X \mid \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x_n|}{2^n} \leq 1 \right\}.$$

- (а) Доказати да је пресликавање d метрика.
- (б) Испитати затвореност и отвореност скупа A .
- (в) Испитати повезаност скупа A .
- (г) Испитати компактност скупа A .

2. Дато је функција

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = x^2 + 2yz - z^2,$$

где је скуп D одређен са

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4} \right\}.$$

- (а) Доказати да функција f достиже минимум и максимум на скупу D .
- (б) Одредити слику скупа D при пресликавању функцијом f .

3. Израчунати запремину тела у првом октанту ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$) ограниченог површима

$$y^2 + z^2 = 4, \quad x^2 = y^2 + z^2 + 1 \quad \text{и} \quad x = 2.$$

4. Израчунати интеграл

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

ако је векторско поље \vec{F} задато са

$$\vec{F} = (yz + e^x, xz + 2y, xy + z),$$

а крива γ са

$$\gamma(t) = (t, \sin t, \cos t), \quad t \in [0, \pi].$$