

GEOMETRIJA 3

Materijal za studente

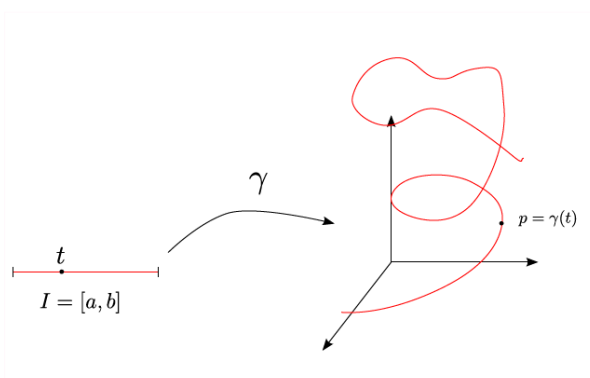
Mirjana Đorić

Matematički fakultet
Univerziteta u Beogradu
maj 2021.

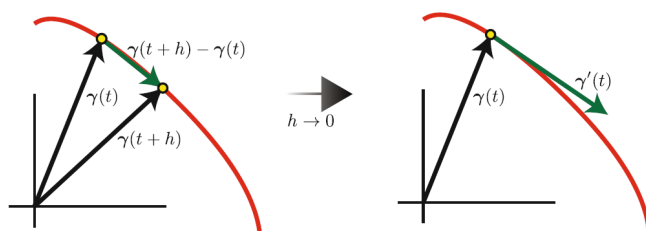
1 KRIVE

1.1 Osnovne definicije i primeri

Definicija 1.1. Diferencijabilna parametrizovana kriva u $\mathbb{R}^n$, $n > 1$ klase C^k ($k \geq 1$) je C^k preslikavanje $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ otvorenog intervala $I \subset \mathbb{R}$. Promenljiva t se naziva parametar, a interval I domen. Kriva α je **regularna** ukoliko je $\alpha'(t) \neq 0$ za svako $t \in I$. Skup tačaka $\{\alpha(t) : t \in I\}$ je **trag krive**. **Vektorsko polje (polje vektora) duž krive** α je funkcija Y koja svakom $t \in (a, b)$ dodeljuje vektor $Y(t) \in \mathbb{R}^n$ u tački $\alpha(t)$. **Vektor brzine** krive α u t_0 je $\alpha'(t_0)$. Polje vektora brzine je $\alpha'(t)$. **Brzina krive** α u t_0 je intenzitet (dužina) vektora brzine za $t = t_0$, tj. $\|\alpha'(t_0)\|$. **Brzina krive** α je funkcija $v(t) = \|\alpha'(t)\|$. Za krivu $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ kažemo da je **jedinične brzine** ukoliko je $\|\alpha'(t)\| = 1$ za $t \in I$. **Tangentni vektor** krive α u t_0 je $T(t_0) = \frac{\alpha'(t_0)}{\|\alpha'(t_0)\|}$.



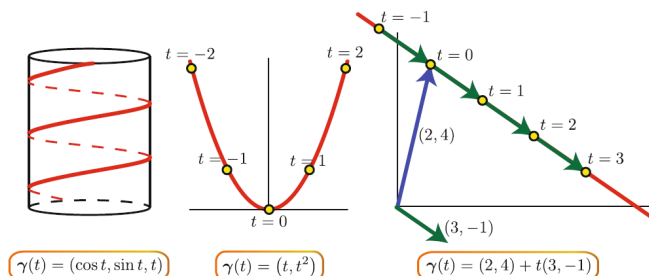
$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)), \quad \alpha'(t) = (\alpha'_1(t), \dots, \alpha'_n(t)), \quad Y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$$



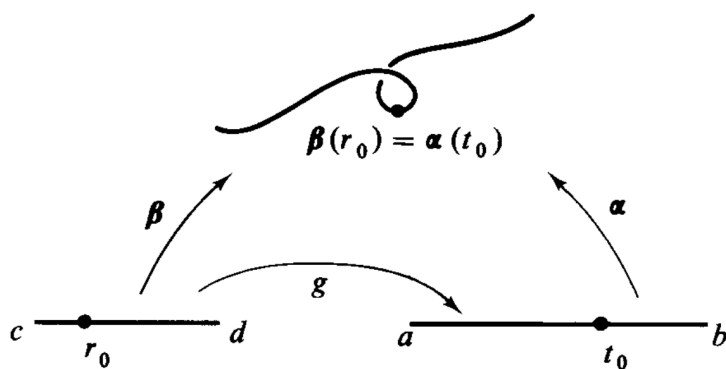
Primer:

- prava $\alpha(t) = (x_0 + u_1 t, y_0 + u_2 t, z_0 + u_3 t)$, $t \in (-\infty, \infty)$ $\alpha(t) = p + tu$;
- parabola $\alpha(t) = (t, t^2)$, $t \in (-\infty, \infty)$;
- kružnica $\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, $r > 0$;
- elipsa $\alpha(t) = (a \cos t, b \sin t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, $a, b > 0$;

- heliks $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, $a > 0$, $t \in (-\infty, \infty)$.



Definicija 1.2. Regularne parametrizovane krive $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ i $\beta : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^n$ klase C^k su **ekvivalentne** ($\alpha \sim \beta$) ukoliko postoji difeomorfizam $\phi : (c, d) \rightarrow (a, b)$ klase C^k tako da je $\beta = \alpha \circ \phi$.



Funkcija $\phi : (c, d) \rightarrow (a, b)$ je difeomorfizam (klase C^k) ukoliko je ϕ bijekcija i ϕ i ϕ^{-1} su diferencijabilne funkcije (klase C^k).

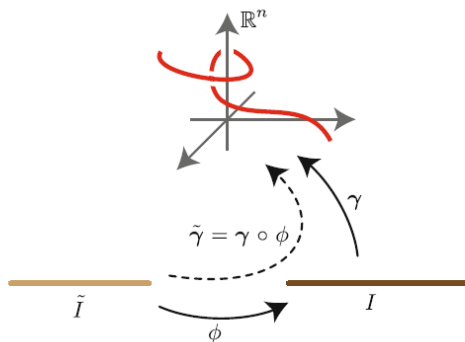
Ukoliko je $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ regularna parametrizovana kriva klase C^k i $\alpha \sim \beta$, tada je i β regularna parametrizovana kriva klase C^k .

Lema 1.1. Relacija $\sim$ navedena u Definiciji 1.2 je relacija ekvivalencije.

Definicija 1.3. Klasa ekvivalencije relacije $\sim$ navedene u Definiciji 1.2 je **regularna diferencijabilna neparametrizovana kriva**.

Kriva β je **reparametrizacija** krive α , ϕ je "dozvoljena promena parametra". Za β se kaže da je **pozitivna reparametrizacija** krive α ukoliko je $\phi' > 0$, a **negativna reparametrizacija** krive α ukoliko je $\phi' < 0$. Ukoliko ne postoji mogućnost zabune, regularnu diferencijabilnu neparametrizovanu krivu ćemo često nazivati **regularna kriva**, ili samo **kriva**. Napomenimo da se termin "kriva" često koristi i za trag krive tj. za skup $\mathcal{S} = \{\alpha(t), t \in I\}$. Za preslikavanje α često kažemo da je

”parametrizacija skupa” $\mathcal{S}$, ”parametarski oblik” skupa $\mathcal{S}$, da ”parametarski definiše” skup $\mathcal{S}$, ili, slobodnije, da je ”parametrizacija krive” $\mathcal{S}$. Tako kažemo i da je ”kriva α parametarski zadana, definisana”.



Lema 1.2. Neka je β reparametrizacija krive α . Tada je

$$\beta'(u) = \phi'(u) \alpha'(\phi(u)), \quad (1.1)$$

pri čemu je $\beta = \alpha \circ \phi$, $\phi : (c, d) \rightarrow (a, b)$, $c < u < d$.

Za neko svojstvo krive kažemo da je geometrijsko ako ono ne zavisi od parametrizacije, ili ako samo zavisi od izbora orijentacije.

Definicija 1.4. Tangentno vektorsko polje na regularnu krivu $\alpha(t)$ je polje vektora $T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$.

Neka je β dozvoljena reparametrizacija krive α . Dokazati da je $T_\beta(t) = \pm T_\alpha(\phi(t))$.

Tangentna linija (tangenta) na regularnu krivu α u tački $t = t_0$ je prava:

$$l = \{w \in \mathbb{R}^3 | w = \alpha(t_0) + sT(t_0), s \in \mathbb{R}\}.$$

1.2 Dužina luka krive i prirodna parametrizacija krive

Definicija 1.5. Dužina luka regularne krive $\alpha : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^n$ na intervalu $[a, b]$, $c < a < b < d$ je

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt. \quad (1.2)$$

Tvrđenje 1.1. Neka je β reparametrizacija krive α . Tada je $L(\alpha) = L(\beta)$.

Dokaz:

$$\begin{aligned} L(\beta) &= \int_c^d \|\beta'(t)\| dt \\ &= \int_c^d |\phi'(t)| \|\alpha'(\phi(t))\| dt \\ &= \int_a^b \|\alpha'(s)\| ds \\ &= L(\alpha) \end{aligned}$$

$\phi(t) = s$, $\phi'(t)dt = ds$, razlikovati slučajeve $\phi'(t) > 0$ i $\phi'(t) < 0$.

(a) $\phi'(t) > 0$

$$\begin{aligned} L(\beta) &= \int_c^d \|\beta'(t)\| dt \\ &= \int_c^d |\phi'(t)| \|\alpha'(\phi(t))\| dt \\ &= \int_c^d \phi'(t) \|\alpha'(\phi(t))\| dt \\ &= \int_a^b \|\alpha'(u)\| du \\ &= L(\alpha) \end{aligned}$$

$\phi(t) = u$, $\phi'(t)dt = du$

(b) $\phi'(t) < 0$

$$\begin{aligned}
 L(\beta) &= \int_c^d \|\beta'(t)\| dt \\
 &= \int_c^d |\phi'(t)| \|\alpha'(\phi(t))\| dt \\
 &= \int_c^d (-\phi'(t)) \|\alpha'(\phi(t))\| dt \\
 &= - \int_b^a \|\alpha'(u)\| du \\
 &= \int_a^b \|\alpha'(u)\| du \\
 &= L(\alpha)
 \end{aligned}$$

$$\phi(t) = u, \phi'(t)dt = du$$

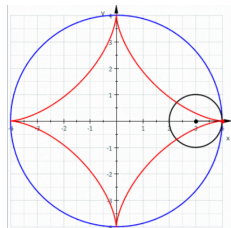
Izračunati dužinu nekoliko krivih.

Dužina luka heliksa $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, $a > 0$, $t \in (0, 2\pi)$.

$$\begin{aligned}
 L(\alpha) &= \int_0^{2\pi} \|\alpha'(t)\| dt \\
 &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2} dt \\
 &= 2\pi \sqrt{a^2 + b^2}.
 \end{aligned}$$

Obim elipse... integral se ne može izraziti preko elementarnih funkcija (eliptički integral).

Dužina luka astroide $\alpha(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t)$, $t \in (0, 2\pi]$, $a > 0$ je $L(\alpha) = 6a$.



Primer 1.1. Izračunati dužinu krivih α i β i ugao između njih:

$$\begin{aligned}
 \alpha(t) &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos t, \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \quad \alpha : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, \\
 \beta(t) &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos t, \frac{1}{2} \cos t, \sin t \right), \quad \beta : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \rightarrow \mathbb{R}^3.
 \end{aligned}$$

$$\alpha(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos t, \sin t, 1), \quad \alpha'(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\sin t, \cos t, 0),$$

$$L(\alpha) = \int_0^{2\pi} \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}}{2} dt = \sqrt{2} \pi$$

$$\beta(t) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos t, \frac{1}{2} \cos t, \sin t \right),$$

$$\beta'(t) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \sin t, -\frac{1}{2} \sin t, \cos t \right)$$

$$L(\beta) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \|\beta'(t)\| dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \pi$$

$$\alpha \cap \beta = \{P\} = \left(\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$X = \alpha'(t) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \sin t, \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t, 0 \right)$$

$$X_P = \alpha' \left(\frac{\pi}{6} \right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4}, 0 \right)$$

$$Y = \beta'(t) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \sin t, -\frac{1}{2} \sin t, \cos t \right)$$

$$Y_P = \beta' \left(\frac{\pi}{4} \right) = \left(-\frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} \cos \phi &= \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_1) \rangle}{\|\alpha'(t_0)\| \|\beta'(t_1)\|} \\ &= \frac{\langle \alpha' \left(\frac{\pi}{6} \right), \beta' \left(\frac{\pi}{4} \right) \rangle}{\|\alpha' \left(\frac{\pi}{6} \right)\| \|\beta' \left(\frac{\pi}{4} \right)\|} \\ &= \frac{\left\langle \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4}, 0 \right), \left(-\frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\rangle}{\left\| \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4}, 0 \right) \right\| \left\| \left(-\frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\|} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Definicija 1.6. Fiksirajmo broj c , $a < c < b$. **Funkcija dužine luka** (ili samo dužina luka) s_α sa početkom u c regularne krive $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ je funkcija

$$s_\alpha(t) = \int_c^t \|\alpha'(u)\| du, \quad (1.3)$$

za $c \leq t \leq b$.

Za funkciju dužine luka $s_\alpha(t)$ važi $s'_\alpha(t) = \|\alpha'(t)\| = v(t)$.

Lema 1.3. Neka je $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ regularna kriva i β reparametrizacija krive α funkcijom dužine luka krive α , tj. $\alpha(t) = \beta(s_\alpha(t))$. Tada je $\|\beta'(s_\alpha(t))\| = 1$.

Dokaz. Izračunati normu od $\alpha'(t) = \beta'(s_\alpha(t)) s'_\alpha(t) = \|\alpha'(t)\| \beta'(s_\alpha(t))$. $\square$

Teorema 1.1. Neka je $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$, ($n = 2, 3$) regularna kriva. Tada postoji njena reparametrizacija β , čija je brzina jedinična.

Dokaz. Motivisani Lemom 1.3 i činjenicom da je funkcija dužine luka s_α 1–1 funkcija koja slika (a, b) na neki interval (c, d) ($s'_\alpha(t) = \|\alpha'(t)\| > 0$ i $s_\alpha(t)$ je strogo rastuća funkcija), uočimo reparametrizaciju β krive α :

$$\beta(t) = \alpha(\phi(t)) = \alpha(s_\alpha^{-1}(t)).$$

Tada je

$$\beta'(t) = \phi'(t) \alpha'(\phi(t)) = (s_\alpha^{-1})'(t) \alpha'(s_\alpha^{-1}(t)).$$

S obzirom da je $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$, sledi

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= (s_\alpha^{-1})'(t) = \frac{1}{s'_\alpha(s_\alpha^{-1}(t))} = \frac{1}{\|\alpha'(s_\alpha^{-1}(t))\|} = \frac{1}{\|\alpha'(\phi(t))\|} \\ \beta'(t) &= \phi'(t) \alpha'(\phi(t)) = \frac{1}{\|\alpha'(\phi(t))\|} \alpha'(\phi(t)) \\ \|\beta'(t)\| &= 1 \end{aligned}$$

$\square$

Neka je $\beta : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^n$ kriva dobijena reparametrizacijom definisanom Teoremom 1.1, tj.

$$\beta(t) = \alpha(s_\alpha^{-1}(t)).$$

Tada je $v(t) = \|\beta'(t)\| = 1$, $T(t) = \beta'(t)$ i kažemo da je β **parametrizovana jediničnom brzinom**. Takođe kažemo da je β **prirodna parametrizacija, reparametrizacija krive α funkcijom dužine luka krive α , kriva parametrizovana dužinom luka** (videti Tvrdjenje 1.2),.. Naime, u tom slučaju funkcija $s(t)$ "meri dužinu", tj. "koliko se parametar pomeri na intervalu (a, b) , toliki put tačka pređe na krivoj". Uobičajeno je da se tada parametar naziva prirodni parametar i označava sa s , tj. piše se $\beta(s)$, $T(s) = \beta'(s)$...

Odrediti prirodnu parametrizaciju prave, kružnice, elipse, parabole, heliksa...

Tvrđenje 1.2. 1. Za funkciju dužine luka proizvoljne regularne krive jedinične brzine $\beta : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^n$ važi

$$s(t) = \int_c^t \|\beta'(u)\| du = t - c.$$

2. Neka su $\beta(s)$ i $\gamma(\tilde{s})$ dve prirodne reparametrizacije proizvoljne regularne krive $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$. Tada važi $\tilde{s} = \pm s + C$, za konstantu $C \in \mathbb{R}$ i $\frac{d^2\beta}{ds^2} = \frac{d^2\gamma}{d\tilde{s}^2}$.

Dokaz. Prvi deo sledi direktno iz Definicije 1.6, s obzirom da je $\|\beta'(u)\| = 1$.

Kako su β i γ reparametrizacije krive α , to je $\beta \sim \gamma$ i postoji difeomorfizam ϕ takav da je $\beta(s) = \gamma(\phi(s))$. Tada je $\beta'(s) = \gamma'(\phi(s))\phi'(s)$. S obzirom da su β i γ prirodne parametrizacije, to je $\|\beta'(s)\| = 1$ i $\|\gamma'(\phi(s))\| = 1$, pa je $|\phi'(s)| = 1$ i $\phi'(s) = \pm 1$. Integracijom se dobija $\phi(s) = \pm s + C$, $C \in \mathbb{R}$. Takođe, je i $\beta''(s) = \gamma''(\phi(s))(\phi'(s))^2 = \gamma''(\phi(s))$. $\square$

Primedba 1.1. Neka su $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ i $\tilde{\alpha} : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^n$ dve prirodne parametrizacije date regularne krive. Tada je $\tilde{\alpha}(s) = \alpha(\pm s + s_0)$.

Odrediti prirodnu parametrizaciju **prave** $\alpha(t) = p + tv$, $v \neq 0$.

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= v, \|\alpha'(t)\| = \|v\| \\ s(t) &= \int_0^t \|\alpha'(u)\| du = \int_0^t \|v\| du = t\|v\|, \quad s^{-1}(t) = \frac{t}{\|v\|}, \\ \beta(t) &= \alpha(s^{-1}(t)) = \alpha\left(\frac{t}{\|v\|}\right) \\ \beta(t) &= p + \frac{t}{\|v\|}v = \left(p_1 + t\frac{v_1}{\|v\|}, p_2 + t\frac{v_2}{\|v\|}, p_3 + t\frac{v_3}{\|v\|}\right) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Odrediti prirodnu parametrizaciju **kružnice** poluprečnika r , $\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t)$.

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= r(-\sin t, \cos t), \|\alpha'(t)\| = r \\ s(t) &= \int_0^t \|\alpha'(u)\| du = \int_0^t r du = tr, \quad s^{-1}(t) = \frac{t}{r}, \\ \beta(t) &= \alpha(s^{-1}(t)) = \alpha\left(\frac{t}{r}\right) \\ \beta(t) &= \left(r \cos \frac{t}{r}, r \sin \frac{t}{r}\right) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Odrediti prirodnu parametrizaciju **elipse** $\alpha(t) = (2 \sin t, \cos t, 0)$.

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)\| du = \int_0^t \sqrt{4 \cos^2 u + \sin^2 u} du = \int_0^t \sqrt{1 + 3 \cos^2 u} du = ?$$

Ovaj integral se ne može izraziti koristeći elementarne funkcije.

Odrediti prirodnu parametrizaciju **parabole** $\alpha(t) = (t, \frac{t^2}{2}, 0)$.

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{1 + u^2} du = \frac{1}{2} \left(\ln(t + \sqrt{1 + t^2}) + t\sqrt{1 + t^2} \right), \quad s^{-1} = ?$$

Inverzna funkcija se ne može eksplicitno izračunati.

Odrediti prirodnu parametrizaciju **heliksa**.

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= (a \cos t, a \sin t, bt), a > 0, t \in (-\infty, \infty) \\ \alpha'(t) &= (-a \sin t, a \cos t, b), \quad \|\alpha'(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ s(t) &= \int_0^t \|\alpha'(u)\| du = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} du = \sqrt{a^2 + b^2} t \\ s^{-1}(t) &= \frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ \beta(t) &= \alpha(s^{-1}(t)) = \alpha\left(\frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) \\ \beta(t) &= \left(a \cos \frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \sin \frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}}, b \frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) \end{aligned} \quad (1.6)$$

1.3 Krivina i torzija krive, Frenet-Serret-ove formule

Definicija 1.7. Neka je $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ prirodno parametrizovana kriva sa prirodnim parametrom s . **Krivina krive** α je funkcija

$$\kappa(s) = \|\alpha''(s)\|. \quad (1.7)$$

Odrediti krivinu prave, kružnice poluprečnika r , kružnog heliksa i elipse.

Krivina **prave**:

Koristeći Definiciju 1.7 i prirodnu parametrizaciju prave (1.4), dobija se

$$\beta(s) = p + s \frac{v}{\|v\|} = (p_1 + s \frac{v_1}{\|v\|}, p_2 + s \frac{v_2}{\|v\|}, p_3 + s \frac{v_3}{\|v\|})$$

$$\beta'(s) = \frac{v}{\|v\|} = (\frac{v_1}{\|v\|}, \frac{v_2}{\|v\|}, \frac{v_3}{\|v\|})$$

$$\beta''(s) = 0 = (0, 0, 0)$$

$$\kappa(s) = \|\beta''(s)\| = 0$$

Krivina **kružnice poluprečnika r** :

Koristeći Definiciju 1.7 i prirodnu parametrizaciju kružnice (1.5), dobija se

$$\alpha(s) = (r \cos \frac{s}{r}, r \sin \frac{s}{r}) = r(\cos \frac{s}{r}, \sin \frac{s}{r})$$

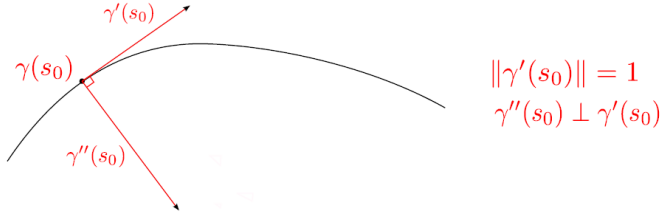
$$\alpha'(s) = (-\sin \frac{s}{r}, \cos \frac{s}{r})$$

$$\alpha''(s) = -\frac{1}{r}(\cos \frac{s}{r}, \sin \frac{s}{r}) = T'(s)$$

$$\kappa(s) = \|\alpha''(s)\| = \frac{1}{r}$$

Imajući u vidu Lemu 1.3 i Tvrdjenje 1.1 moguće je definisati krivinu krivih koje nisu prirodno parametrizovane (Definicija 1.9).

Lema 1.4. Ukoliko je X vektorsko polje jedinične dužine duž krive $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$, tada je $X'(t) \circ X(t) = 0$, $t \in (a, b)$.

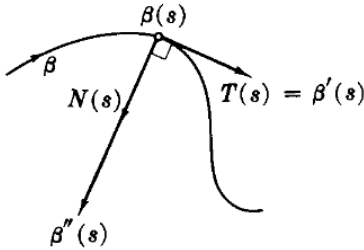


Posledica 1.1. Neka je α prirodno parametrizovana kriva. Tada je $\alpha'(s) \circ \alpha''(s) = 0$, za svako s .

Definicija 1.8. Neka je $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) prirodno parametrizovana kriva sa prirodnim parametrom s i $\kappa(s) \neq 0$, $s \in (a, b)$. Vektorsko polje **glavnih normala** krive α je $N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\kappa(s)}$. Vektorsko polje **binormala** je $B(s) = T(s) \times N(s)$, za $n = 3$. **Torzija** krive α je funkcija $\tau(s) = -B'(s) \circ N(s)$.

Primedba 1.2. Za prirodno parametrizovane krive $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) je $\alpha''(s) = T'(s)$, pa je $\kappa(s) = \|\alpha''(s)\| = \|T'(s)\|$ i

$$N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\kappa(s)} = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|} = \frac{T'(s)}{\kappa(s)}. \quad (1.8)$$



Neka je $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ prirodno parametrizovana kriva, $\kappa(s) \neq 0$, $s \in (a, b)$. Tada su vektorska polja $T(s)$, $N(s)$, $B(s)$ jedinična i ortogonalna, za svako $s \in (a, b)$. Polje $[T(s), N(s), B(s)]$ ortonormiranih baza krive α naziva se **Frenet-ovo polje repa**, ili **Frenet-ov reper**, u tačkama gde je $\kappa(s) \neq 0$ i važi:

$$B(s) = T(s) \times N(s), N(s) = B(s) \times T(s), T(s) = N(s) \times B(s) \quad (1.9)$$

Slično, $[T(s), N(s)]$ je Frenet-ov reper prirodno parametrizovane krive $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Teorema 1.2. Frenet-Serret-ove formule

Neka je $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ prirodno parametrizovana kriva i $\kappa(s) \neq 0, s \in (a, b)$. Tada je

$$\begin{aligned} T'(s) &= \kappa(s)N(s) \\ N'(s) &= -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s) \\ B'(s) &= -\tau(s)N(s) \end{aligned}$$

za sve $s \in (a, b)$.

Neka je $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ prirodno parametrizovana kriva i $\kappa(s) \neq 0, s \in (a, b)$. Tada je

$$\begin{aligned} T'(s) &= \kappa(s)N(s) \\ N'(s) &= -\kappa(s)T(s) \end{aligned}$$

za sve $s \in (a, b)$.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) \\ -\kappa(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Primer 1.2. prirodno parametrizovana kružnica poluprečnika r u $\mathbb{R}^2$

$$\alpha(s) = (r \cos \frac{s}{r}, r \sin \frac{s}{r}) = r(\cos \frac{s}{r}, \sin \frac{s}{r})$$

$$T(s) = \alpha'(s) = (-\sin \frac{s}{r}, \cos \frac{s}{r})$$

$$\alpha''(s) = -\frac{1}{r}(\cos \frac{s}{r}, \sin \frac{s}{r}) = T'(s)$$

$$\kappa(s) = \|\alpha''(s)\| = \frac{1}{r}$$

$$N(s) = \frac{T'(s)}{\kappa(s)} = -(\cos \frac{s}{r}, \sin \frac{s}{r})$$

$$N'(s) = \frac{1}{r}(\sin \frac{s}{r}, -\cos \frac{s}{r})$$

$$-\frac{1}{r}(\cos \frac{s}{r}, \sin \frac{s}{r}) = T'(s) = \kappa(s)N(s) = \frac{1}{r}(-\cos \frac{s}{r}, -\sin \frac{s}{r})$$

$$\frac{1}{r}(\sin \frac{s}{r}, -\cos \frac{s}{r}) = N'(s) = -\kappa(s)T(s) = -\frac{1}{r}(-\sin \frac{s}{r}, \cos \frac{s}{r})$$

Primer 1.3. kružnica poluprečnika r u $\mathbb{R}^3$

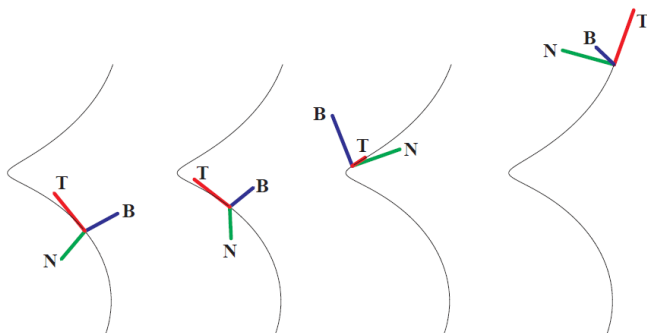
$$\alpha(s) = (r \cos \frac{s}{r}, r \sin \frac{s}{r}, 0) = r(\cos \frac{s}{r}, \sin \frac{s}{r}, 0)$$

$$\begin{aligned}
T(s) &= \alpha'(s) = \left(-\sin \frac{s}{r}, \cos \frac{s}{r}, 0\right) \\
\alpha''(s) &= -\frac{1}{r}(\cos \frac{s}{r}, \sin \frac{s}{r}, 0) = T'(s) \\
\kappa(s) &= \|\alpha''(s)\| = \frac{1}{r} \\
N(s) &= \frac{T'(s)}{\kappa(s)} = -(\cos \frac{s}{r}, \sin \frac{s}{r}, 0) \\
N'(s) &= \frac{1}{r}(\sin \frac{s}{r}, -\cos \frac{s}{r}, 0) \\
B(s) &= T(s) \times N(s) = (0, 0, 1) \\
B'(s) &= (0, 0, 0) \\
\tau(s) &= -B'(s) \circ N(s) = 0 \\
T'(s) &= \kappa(s)N(s) \\
N'(s) &= \frac{1}{r}(\sin \frac{s}{r}, -\cos \frac{s}{r}, 0) = -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s) = -\kappa(s)T(s) \\
B'(s) &= -\tau(s)N(s) = (0, 0, 0)
\end{aligned}$$

Primer 1.4. *prirodno parametrizovan kružni heliks*

$$\begin{aligned}
\alpha(t) &= (a \cos t, a \sin t, bt), \quad a, b > 0 \\
\alpha'(t) &= (-a \sin t, a \cos t, b), \quad a, b > 0 \\
\|\alpha'(t)\| &= \sqrt{a^2 + b^2} \\
s(t) &= \int_0^t \|\alpha'(u)\| du = \sqrt{a^2 + b^2}t, \quad t = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} = cs, \quad c = (a^2 + b^2)^{-\frac{1}{2}} \\
\tilde{\alpha}(s) &= \alpha(cs) = (a \cos(cs), a \sin(cs), bcs) \\
T_{\tilde{\alpha}}(s) &= \tilde{\alpha}'(s) = (-ac \sin(cs), ac \cos(cs), bc) \\
T'_{\tilde{\alpha}}(s) &= \tilde{\alpha}''(s) = (-ac^2 \cos(cs), -ac^2 \sin(cs), 0) \\
\kappa_{\tilde{\alpha}}(s) &= \|\tilde{\alpha}''(s)\| = ac^2 = \frac{a}{a^2 + b^2} \\
N_{\tilde{\alpha}}(s) &= \frac{T'_{\tilde{\alpha}}(s)}{\kappa_{\tilde{\alpha}}(s)} = (-\cos(cs), -\sin(cs), 0) \\
B_{\tilde{\alpha}}(s) &= T_{\tilde{\alpha}}(s) \times N_{\tilde{\alpha}}(s) = (bc^2 \sin(cs), -bc^2 \cos(cs), ac^2) \\
B'_{\tilde{\alpha}}(s) &= (bc^2 \cos(cs), bc^2 \sin(cs), 0) = -bc^2 N_{\tilde{\alpha}}(s) \\
\tau_{\tilde{\alpha}}(s) &= -B'(s) \circ N(s) = bc^2 = \frac{b}{a^2 + b^2}, \quad B'_{\tilde{\alpha}}(s) = -\tau_{\tilde{\alpha}}(s)N_{\tilde{\alpha}}(s) \\
T'_{\tilde{\alpha}}(s) &= \kappa_{\tilde{\alpha}}(s)N_{\tilde{\alpha}}(s) \\
N'_{\tilde{\alpha}}(s) &= c(-\sin(cs), -\cos(cs), 0) = -\kappa_{\tilde{\alpha}}(s)T_{\tilde{\alpha}}(s) + \tau_{\tilde{\alpha}}(s)B_{\tilde{\alpha}}(s)
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} T'_{\tilde{\alpha}}(s) \\ N'_{\tilde{\alpha}}(s) \\ B'_{\tilde{\alpha}}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a}{a^2 + b^2} & 0 \\ -\frac{a}{a^2 + b^2} & 0 & \frac{b}{a^2 + b^2} \\ 0 & -\frac{b}{a^2 + b^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{\tilde{\alpha}}(s) \\ N_{\tilde{\alpha}}(s) \\ B_{\tilde{\alpha}}(s) \end{bmatrix}$$



Teorema 1.3. Neka je $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ prirodno parametrizovana kriva.

1. Ako je $\kappa(s) = 0$, $s \in (a, b)$, tada je α deo prave.
2. Ako je $\kappa(s) \neq 0$, $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ tada su sledeći uslovi ekvivalentni:
 - (a) α je ravanska kriva;
 - (b) B je konstantan vektor;
 - (c) $\tau(s) = 0$ za sve $s \in (a, b)$.

Dokaz. 1. Koristeći Definiciju 1.7 dokazali smo da je krivina prave nula. Obratno, ukoliko je krivina nula, dokažimo da je kriva $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ (deo) prave. Iz $0 = \kappa(s) = \|\alpha''(s)\|$ sledi $\alpha''(s) = 0$, pa je $\alpha'(s) = c$, $c \in \mathbb{R}^2$ ($c \in \mathbb{R}^3$). Odavde sledi $\alpha(s) = cs + d$, $c, d \in \mathbb{R}^2$ ($c, d \in \mathbb{R}^3$). Na primer, za $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$, je

$$\alpha(s) = (d_1, d_2, d_3) + s(c_1, c_2, c_3).$$

2. Ukoliko je B konstantan vektor, koristeći Definiciju 1.8: $\tau(s) = -B'(s) \circ N(s)$, sledi da je $\tau(s) = 0$ za sve $s \in (a, b)$. Obratno, ukoliko je $\tau(s) = 0$, koristeći Teoremu 1.2 (Frenet-Serret-ove formule) i $B'(s) = -\tau(s)N(s)$ sledi $B'(s) = 0$, tj. $B = \text{const}$.

Pretpostavimo da je kriva $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ prirodno parametrizovana regularna kriva čiji trag pripada ravni ortogonalnoj na vektor $n(n_1, n_2, n_3) \neq 0$. Tada je,

za $s_0 \in (a, b)$ i svako $s \in (a, b)$,

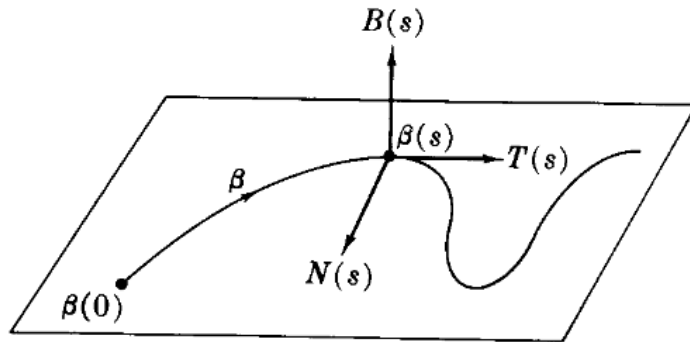
$$\begin{aligned}
(\alpha(s) - \alpha(s_0)) &\perp n \\
(\alpha(s) - \alpha(s_0)) \circ n &= 0 \\
\alpha'(s) \circ n + (\alpha(s) - \alpha(s_0)) \circ n' &= 0 \\
T(s) \circ n &= 0 \\
T'(s) \circ n &= 0 \\
\kappa(s)N(s) \circ n &= 0 \\
N(s) \circ n &= 0 \\
N'(s) \circ n &= 0 \\
(-\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s)) \circ n &= 0 \\
\tau(s)B(s) \circ n &= 0
\end{aligned}$$

Ukoliko je $B(s) \circ n = 0$, tada je

$$n = (T(s) \circ n)T(s) + (N(s) \circ n)N(s) + (B(s) \circ n)B(s) = 0,$$

suprotno pretpostavci $n \neq 0$. Dakle, $\tau(s) = 0$. Po prethodno dokazanom ((c) $\Rightarrow$ (b)), sledi da je B konstantan vektor.

Pretpostavimo da je B konstantan vektor i dokažimo da je α je ravanska kriva.



Uočimo funkciju $f(s) = (\alpha(s) - \alpha(s_0)) \circ B$. Tada je

$$\begin{aligned}
f'(s) &= \alpha'(s) \circ B(s) + (\alpha(s) - \alpha(s_0)) \circ B' \\
&= \alpha'(s) \circ B = T(s) \circ B = 0
\end{aligned}$$

Dakle, $f(s) = \text{const.}$ Kako je $f(s_0) = 0$, to je $f \equiv 0$ i $(\alpha(s) - \alpha(s_0)) \perp B$, tj. α je kriva u ravni.

□

Dokažimo na još jedan način da je vektorsko polje binormala krive $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$, čiji trag pripada ravni, konstantno vektorsko polje. Ideja koju ćemo prikazati se često koristi pri rešavanju različitih problema.

Izaberimo Dekartov koordinatni sistem tako da je koordinatna ravan Oxy upravo ta ravan. Pretpostavimo da je kriva parametrizovana dužinom luka, sto je moguće na osnovu Teoreme 1.1. Tada je

$$\begin{aligned}\alpha(s) &= (x(s), y(s), 0) \\ T(s) &= \alpha'(s) = (x'(s), y'(s), 0) \\ T'(s) &= \alpha''(s) = (x''(s), y''(s), 0) \\ \kappa(s) &= \|\alpha''(s)\| = \sqrt{(x''(s))^2 + (y''(s))^2} \\ N(s) &= \frac{T'(s)}{\kappa(s)} = \frac{\alpha''(s)}{\kappa(s)} = \frac{1}{\kappa(s)}(x''(s), y''(s), 0) \\ B(s) &= T(s) \times N(s) = \frac{\alpha'(s) \times \alpha''(s)}{\kappa(s)} = \frac{(0, 0, x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s))}{\sqrt{(x''(s))^2 + (y''(s))^2}} \\ \|B(s)\| &= \frac{|x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)|}{\sqrt{(x''(s))^2 + (y''(s))^2}}\end{aligned}$$

Kako je $B(s)$ jedinično vektorsko polje, to je $\|B(s)\| = \frac{|x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)|}{\sqrt{(x''(s))^2 + (y''(s))^2}} = 1$,

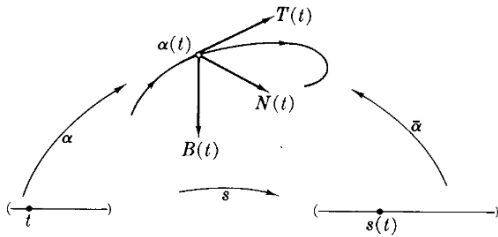
pa je $\frac{x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)}{\sqrt{(x''(s))^2 + (y''(s))^2}} = \pm 1$, odakle sledi $B(s) = \pm(0, 0, 1)$.

Primetimo da za svako $t \in (a, b)$ važi

$$T(t) = \tilde{T}(s(t)). \quad (1.10)$$

Naime, neka je $\tilde{\alpha}$ prirodna parametrizacija krive α , tj. $\alpha(t) = \tilde{\alpha}(s(t))$, za $s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du$. Tada je $T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$ i $\tilde{T}(s) = \tilde{\alpha}'(s)$, pa je

$$T(t) \|\alpha'(t)\| = \alpha'(t) = s'(t) \tilde{\alpha}'(s(t)) = \|\alpha'(t)\| \tilde{T}(s(t))$$



Definicija 1.9. Neka je $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2(\mathbb{R}^3)$ regularna kriva i neka je $\tilde{\alpha} : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^2(\mathbb{R}^3)$ prirodna parametrizacija krive α . Označimo sa $\tilde{\kappa}$ i $\tilde{\tau}$ krivinu i torziju krive $\tilde{\alpha}$, a sa $[\tilde{T}, \tilde{N}, \tilde{B}]$ Frenet-ovu bazu krive $\tilde{\alpha}$. **Krivina i torzija krive proizvoljne brzine** (α) su krivina i torzija njene prirodne reparametrizacije ($\tilde{\alpha}$), tj.

$$\kappa(t) = \tilde{\kappa}(s(t)), \quad \tau(t) = \tilde{\tau}(s(t)). \quad (1.11)$$

Takođe, vektorsko polje **normala** i **binormala** krive proizvoljne brzine su:

$$N(t) = \tilde{N}(s(t)), \quad B(t) = \tilde{B}(s(t)). \quad (1.12)$$

Tvrđenje 1.3. Za svako $t \in (a, b)$ vektorska polja $T(t)$, $N(t)$, $B(t)$ su jedinična i ortogonalna vektorska polja, za koja važi

$$T(t) = N(t) \times B(t), \quad N(t) = B(t) \times T(t), \quad B(t) = T(t) \times N(t). \quad (1.13)$$

Dokaz.

$$N(t) = \tilde{N}(s(t)) = \tilde{B}(s(t)) \times \tilde{T}(s(t)) = B(t) \times T(t),$$

koristeći (1.12) i (1.9). □

Teorema 1.4. Uopštene Frenet-Serret-ove formule

Neka je $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ regularna kriva sa brzinom $v(t) = \|\alpha'(t)\|$ i krivinom $\kappa(t) \neq 0$, $t \in (a, b)$. Tada je:

$$\begin{aligned} T'(t) &= v(t)\kappa(t)N(t) \\ N'(t) &= -v(t)\kappa(t)T(t) + v(t)\tau(t)B(t) \\ B'(t) &= -v(t)\tau(t)N(t) \end{aligned}$$

za sve $t \in (a, b)$.

Neka je $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ regularna kriva sa brzinom $v(t) = \|\alpha'(t)\|$ i krivinom $\kappa(t) \neq 0$, $t \in (a, b)$. Tada je:

$$\begin{aligned} T'(t) &= v(t)\kappa(t)N(t) \\ N'(t) &= -v(t)\kappa(t)T(t) \end{aligned}$$

za sve $t \in (a, b)$.

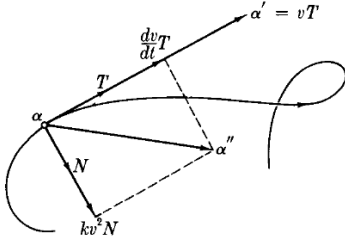
Dokaz. Koristeći $T(t) = \tilde{T}(s(t))$, $N(t) = \tilde{N}(s(t))$, $B(t) = \tilde{B}(s(t))$ (tj. (1.10) i (1.12)), Teoremu 1.2 (npr. $\tilde{T}'(s(t)) = \tilde{\kappa}(s(t))\tilde{N}(s(t))$) i definiciju krivine i torzije proizvoljne krive (tj. (1.11)), sledi

$$\begin{aligned} T'(t) &= s'(t)\tilde{T}'(s(t)) = v(t)\tilde{\kappa}(s(t))\tilde{N}(s(t)) = v(t)\kappa(t)N(t) \\ N'(t) &= s'(t)\tilde{N}'(s(t)) = v(t)(-\tilde{\kappa}(s(t))\tilde{T}(s(t)) + \tilde{\tau}(s(t))\tilde{B}(s(t))) = v(t)(-\kappa(t)T(t) + \tau(t)B(t)) \\ B'(t) &= s'(t)\tilde{B}'(s(t)) = -v(t)\tilde{\tau}(s(t))\tilde{N}(s(t)) = -v(t)\tau(t)N(t) \end{aligned}$$

□

Uopštene Frenet-Serret-ove formule se često zapisuju u obliku:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} T'(t) \\ N'(t) \end{bmatrix} &= v(t) \begin{bmatrix} 0 & \kappa(t) \\ -\kappa(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(t) \\ N(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} T'(t) \\ N'(t) \\ B'(t) \end{bmatrix} &= v(t) \begin{bmatrix} 0 & \kappa(t) & 0 \\ -\kappa(t) & 0 & \tau(t) \\ 0 & -\tau(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(t) \\ N(t) \\ B(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.14)$$



Lema 1.5. Za regularnu krivu $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\kappa(t) \neq 0$, $t \in (a, b)$, važi

- (a) $\alpha'(t) = v(t)T(t)$,
- (b) $\alpha''(t) = v'(t)T(t) + v^2(t)\kappa(t)N(t)$,
- (c) $\alpha'''(t) = [v''(t) - v^3(t)\kappa^2(t)]T(t) + [3v(t)v'(t)\kappa(t) + v^2(t)\kappa'(t)]N(t) + v^3(t)\kappa(t)\tau(t)B(t)$.

Dokaz. (a) Sledi iz Definicije 1.4.

(b) Diferenciranjem $\alpha'(t)$ i koristeći uopštene Frenet-Serre-ove formule, tj. Teoremu 1.4, sledi

$$\alpha''(t) = v'(t)T(t) + v(t)T'(t) = v'(t)T(t) + v(t)(v(t)\kappa(t)N(t)).$$

(c) Diferencirati $\alpha''(t)$ i koristiti Teoremu 1.4. □

Teorema 1.5. Neka je $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ regularna kriva i $\kappa(t) \neq 0$, $t \in (a, b)$. Tada je:

$$B(t) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}; \quad (1.15)$$

$$\kappa(t) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}; \quad (1.16)$$

$$\tau(t) = \frac{[\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t)]}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2}. \quad (1.17)$$

Dokaz.

$$\begin{aligned} \alpha'(t) \times \alpha''(t) &= (v(t)T(t)) \times (v'(t)T(t) + v^2(t)\kappa(t)N(t)) \\ &= v^3(t)\kappa(t)T(t) \times N(t) = v^3(t)\kappa(t)B(t), \end{aligned} \quad (1.18)$$

koristeći (1.5), (1.5), (1.13). Dakle, $\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\| = v^3(t) \kappa(t)$, odakle sledi (1.16). Zamenom (1.16) u (1.18) dobija se (1.15). Skalarnim množenjem (1.18) sa (1.5) dobija se

$$(\alpha'(t) \times \alpha''(t)) \circ \alpha'''(t) = v^6(t) \kappa^2(t) \tau(t),$$

odakle se, korišćenjem (1.16), dobija (1.17). $\square$

Primedba: Krivina i torzija proizvoljne krive se mogu računati koristeći (1.16) i (1.17). Za izračunavanje vektorskog polja binormala koristi se (1.15), za tangentno vektorsko polje se koristi Definicija 1.4, a normalno vektorsko polje je $N(t) = B(t) \times T(t)$, koristeći Tvrdjenje 1.3.

Primer 1.5. *kružni heliks*

$$\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt), \quad a, b > 0$$

$$\alpha'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)$$

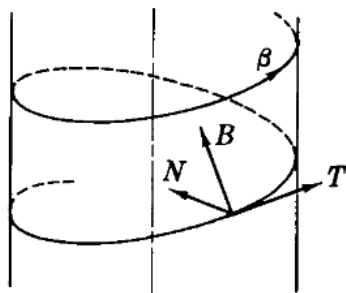
$$\|\alpha'(t)\| = v(t) = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\alpha''(t) = (-a \cos t, -a \sin t, 0)$$

$$\alpha'''(t) = (a \sin t, -a \cos t, 0)$$

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = (ab \sin t, -ab \cos t, a^2)$$

$$\kappa(t) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{a}{a^2 + b^2}$$



$$\tau(t) = \frac{[\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t)]}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2} = \frac{a^2 b}{a^2 b^2 + a^4} = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{(-a \sin t, a \cos t, b)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$B(t) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|} = \frac{(ab \sin t, -ab \cos t, a^2)}{\sqrt{a^2 b^2 + a^4}} = \frac{(b \sin t, -b \cos t, a)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$N(t) = B(t) \times T(t) = (-\cos t, -\sin t, 0)$$

$$T'(t) = \frac{(-a \cos t, -a \sin t, 0)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$B'(t) = \frac{(b \cos t, b \sin t, 0)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$N'(t) = (\sin t, -\cos t, 0)$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} T'(t) \\ N'(t) \\ B'(t) \end{bmatrix} &= v(t) \begin{bmatrix} 0 & \kappa(t) & 0 \\ -\kappa(t) & 0 & \tau(t) \\ 0 & -\tau(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(t) \\ N(t) \\ B(t) \end{bmatrix} \\
&= \sqrt{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} 0 & \frac{a}{a^2 + b^2} & 0 \\ -\frac{a}{a^2 + b^2} & 0 & \frac{b}{a^2 + b^2} \\ 0 & -\frac{b}{a^2 + b^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(t) \\ N(t) \\ B(t) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Uporediti sa Primerom 1.4.

1.4 Osnovna teorema o egzistenciji i jedinstvenosti krivih

Teorema 1.6. *Izometrije prostora $\mathbb{R}^3$ čuvaju krivinu, torziju i izvod funkcije dužine luka. Znak torzije se menja ukoliko je izometrija indirektna.*

Teorema 1.7. *(Osnovna teorema za krive u $\mathbb{R}^3$, jedinstvenost) Neka su α i β prirodno parametrizovane krive u $\mathbb{R}^3$ definisane na istom intervalu (a, b) i pretpostavimo da imaju istu torziju i istu krivinu. Tada postoji izometrija koja preslikava trag krive α u trag krive β .*

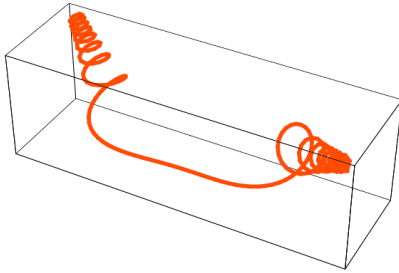


Figure 8.2: Curve with $\kappa(s) = s$ and $\tau(s) = 1$

Teorema 1.8. *(Osnovna teorema za krive u $\mathbb{R}^3$, egzistencija) Neka su $k : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $k > 0$ i $t : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilne funkcije. Tada postoji kriva jedinične brzine $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ čija je krivina k i torzija t .*

Dokaz zahteva poznavanje teorije rešavanja sistema diferencijalnih jednačina i može se naći, npr. u [1] str. 230, [12] str. 42.

Interesantno je da ponekad samo relacije između krivine i torzije mogu da odrede krivu.

Kriva jedinične brzine $\alpha(s)$ sa $\kappa(s) \neq 0$ je heliks ako i samo ako postoji konstanta $c \in \mathbb{R}$, takva da važi

$$\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = c$$

(Lancet, 1802).

Neka je $\beta : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ prirodno parametrizovana kriva sa krivinom κ i torzijom τ . Ukoliko trag krive β pripada sferi poluprečnika $c > 0$ sa centrom u $q \in \mathbb{R}^3$, tada važi

$$\kappa \geq \frac{1}{c} \quad (1.19)$$

$$\tau^2 \left(c^2 - \frac{1}{\kappa^2} \right) = \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2} \right)^2 \quad (1.20)$$

$$\frac{\tau}{\kappa} = \left(\frac{\kappa'}{\tau \kappa^2} \right)' \quad (1.21)$$

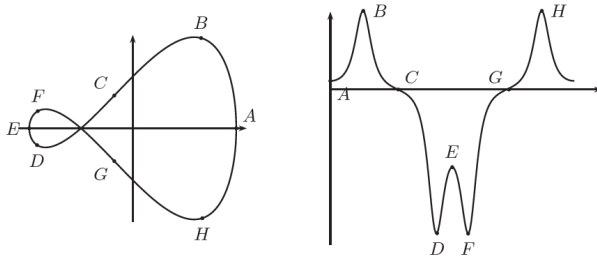
Neka je $\beta : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ prirodno parametrizovana kriva sa funkcijama krivine i torzije, κ i τ , koje zadovoljavaju relaciju (1.20) ili (1.21) i za koje važi $\kappa \neq 0$, $\tau \neq 0$, $\kappa' \neq 0$. Tada trag krive β pripada sferi poluprečnika $c > 0$ sa centrom u $q \in \mathbb{R}^3$.

Djoric27. maj 2021.

1.5 Krive u ravni: krivina, osnovna teorema

Definicija 1.10. Neka je $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ prirodno parametrizovana regularna kriva i N_z polje vektora normala takvo da je $[T(s), N_z(s)]$ pozitivno orijentisana ortonormirana baza, za svako $s \in (a, b)$. "Uopštena" krivina krive α je funkcija $\kappa_z : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, definisana sa

$$\alpha''(s) = \kappa_z(s)N_z(s).$$



Da li "uopštena" krivina zavisi od parametrizacije?

Za prirodno parametrizovanu krivu $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ važi $\kappa(s) = |\kappa_z(s)|$, $s \in (a, b)$.

Tvrđenje 1.4. Neka je $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ prirodno parametrizovana kriva. Tada je

$$\kappa_z(s) = x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s), \quad (1.22)$$

$$\kappa(s) = |x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)|. \quad (1.23)$$

Dokaz.

$$\alpha(s) = (x(s), y(s)),$$

$$\alpha'(s) = (x'(s), y'(s)) = T(s),$$

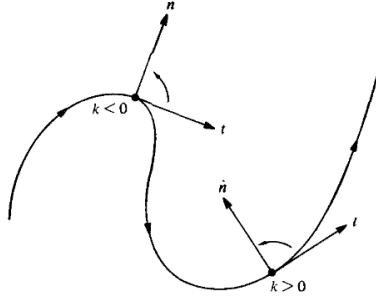
$$\alpha''(s) = (x''(s), y''(s)) = T'(s),$$

$$N_z(s) = (-y'(s), x'(s))$$

$$\begin{aligned} \kappa_z(s) &= \alpha''(s) \circ N_z(s) = (x''(s), y''(s)) \circ (-y'(s), x'(s)) \\ &= x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s), \end{aligned}$$

$$\kappa(s) = |\kappa_z(s)| = |x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)|.$$

□



Primer 1.6. Odrediti dve prirodne parametrizacije, suprotne orijentacije, jedinične kružnice čiji je centar $O(0, 0)$, izračunati njihove uopštene krivine i nacrtati skicu, specijalno nacrtati tangentni vektor i vektor normale u tački $A(0, 1)$. Uočimo, na primer, $\phi(s) = \frac{\pi}{2} - s$.

$$\begin{aligned}\alpha(s) &= (\cos s, \sin s), \alpha'(s) = (-\sin s, \cos s) = T^{\alpha(s)}, N_z^{\alpha}(s) = (-\cos s, -\sin s), \\ \alpha''(s) &= (-\cos s, -\sin s), \kappa_z^{\alpha}(s) = \alpha''(s) \circ N_z^{\alpha}(s) = 1, \alpha''(s) = 1 \cdot N_z^{\alpha}(s) \\ \beta(s) &= (\sin s, \cos s), \beta'(s) = (\cos s, -\sin s) = T^{\beta(s)}, N_z^{\beta}(s) = (\sin s, \cos s), \\ \beta''(s) &= (-\sin s, -\cos s), \kappa_z^{\beta}(s) = \beta''(s) \circ N_z^{\beta}(s) = -1, \beta''(s) = -1 \cdot N_z^{\beta}(s)\end{aligned}$$

Definicija 1.11. "Uopštena"krivina krive proizvoljne brzine $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ je "uopštena"krivina njene prirodne reparametrizacije.

Tvrđenje 1.5. Neka je $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ regularna kriva. Tada je

$$\kappa_z(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (1.24)$$

$$\kappa(t) = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (1.25)$$

Dokaz.

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \tilde{\alpha}(s(t)) \\ \kappa_z(t) &= \tilde{\kappa}_z(s(t)) = \tilde{\alpha}''(s(t)) \circ \tilde{N}_z(s(t)) \\ \tilde{T}(s(t)) &= \tilde{\alpha}'(s(t)) = (\tilde{x}'(s(t)), \tilde{y}'(s(t))) \\ \tilde{T}(s(t)) &= T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{\alpha'(t)}{v(t)} = \frac{(x'(t), y'(t))}{v(t)} \\ \tilde{x}'(s(t)) &= \frac{x'(t)}{v(t)}, \tilde{y}'(s(t)) = \frac{y'(t)}{v(t)} \\ \tilde{N}_z(s(t)) &= (-\tilde{y}'(s(t)), \tilde{x}'(s(t))) = \frac{1}{v(t)}(-y'(t), x'(t)) \\ \alpha'(t) &= s'(t)\tilde{\alpha}'(s(t)) = v(t)\tilde{\alpha}'(s(t)) \\ \alpha''(t) &= v^2(t)\tilde{\alpha}''(s(t)) + v'(t)\tilde{\alpha}'(s(t))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_z(t) &= \tilde{\kappa}_z(s(t)) = \tilde{\alpha}''(s(t)) \circ \tilde{N}_z(s(t)) \\
\alpha''(t) &= v^2(t)\tilde{\alpha}''(s(t)) + v'(t)\tilde{\alpha}'(s(t)) \\
\tilde{N}_z(s(t)) &= (-\tilde{y}'(s(t)), \tilde{x}'(s(t))) = \frac{1}{v(t)}(-y'(t), x'(t))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_z(t) &= \tilde{\alpha}''(s(t)) \circ \tilde{N}_z(s(t)) \\
&= \frac{1}{v^2(t)}\alpha''(t) \circ \tilde{N}_z(s(t)) \\
&= \frac{1}{v^3(t)}(x''(t), y''(t)) \circ (-y'(t), x'(t)) \\
&= \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

□

Primer 1.7. Koristeći (1.25) izračunati krivine nekoliko krivih u ravni. (Pogledati odeljak 3.2.)

Krivina ellipse $\alpha(t) = (a \cos t, b \sin t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, $a, b > 0$:

$$\kappa(t) = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$x(t) = a \cos t, \quad y(t) = b \sin t$$

$$x'(t) = -a \sin t, \quad y'(t) = b \cos t$$

$$x''(t) = -a \cos t, \quad y''(t) = -b \sin t$$

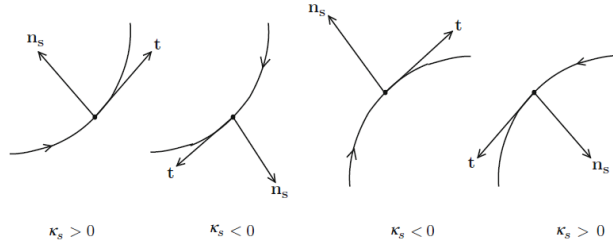
$$\kappa(t) = \frac{|(-a \sin t)(-b \sin t) - (-a \cos t)(b \cos t)|}{((-a \sin t)^2 + (b \cos t)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\kappa(t) = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\kappa(t) = \frac{ab}{(a^2 + (b^2 - a^2) \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$$

Za $b > a$ dostiže maksimum za $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$, minimum za $t = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Izračunati uopštenu krivinu krive $\alpha(t) = (t, f(t))$ i uporediti dobijene rezultate sa tragom ove krive.



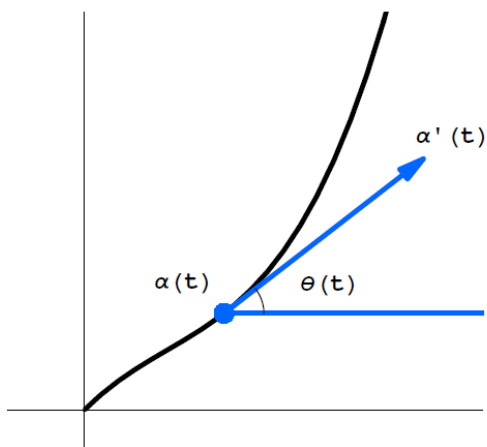
Koristeći (1.24) dobija se

$$\begin{aligned}
 \alpha(t) &= (t, f(t)) \\
 \alpha'(t) &= (1, f'(t)) \\
 \alpha''(t) &= (0, f''(t)) \\
 \|\alpha'(t)\| &= \sqrt{1 + (f'(t))^2} \\
 \kappa_z(t) &= \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{f''(t)}{(1 + (f'(t))^2)^{\frac{3}{2}}}.
 \end{aligned}$$

Primetimo i da je

$$\begin{aligned}
 T(t) &= \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (f'(t))^2}}, \frac{f'(t)}{\sqrt{1 + (f'(t))^2}} \right) \\
 N_z(t) &= \left(-\frac{f'(t)}{\sqrt{1 + (f'(t))^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + (f'(t))^2}} \right).
 \end{aligned}$$

Ugao između dve krive u tački preseka, definisan kao ugao između tangentnih vektora u tački preseka, je lako odrediti (videti Primer 1.1). Međutim, korektna definicija funkcije orijentisanog ugla $\theta : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ između dve krive zahteva detaljnu analizu. Na primer, uslov $\theta(t) \in [0, 2\pi)$ bi narušio neprekidnost funkcije θ . Kada je $\theta(s)$ diferencijabilna funkcija? Više detalja zainteresovani mogu naći u [17] str. 34, [1] str. 17, [16] str. 36.



Neka je $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ prirodno parametrizovana regularna kriva i θ_0 ugao za koji fiksirani jedinični vektor treba rotirati u "pozitivnom smeru" ("smeru obrnutom od kazaljke na satu") da bi se poklopio sa tangentnim vektorom krive u tački $\alpha(s_0)$, $s_0 \in (a, b)$, tj. $\alpha'(s_0) = (\cos \theta_0, \sin \theta_0)$, $\theta_0 \in [0, 2\pi)$. Može se dokazati da tada postoji tačno jedna diferencijabilna funkcija $\theta : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ takva da je $\theta(s_0) = \theta_0$ i

$$\alpha'(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s)),$$

za $s \in (a, b)$. Tada se θ često naziva "ugao okretanja" krive α , određen sa θ_0 .

Teorema 1.9. (Euler 1736) *Za ugao okretanja i "uopštenu" krivinu prirodno parametrizovane krive u ravni važi*

$$\kappa_z(s) = \theta'(s).$$

Dokaz. Neka je $\theta(s)$ ugao okretanja krive α

$$\alpha'(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s)) = T(s),$$

$$T'(s) = \theta'(s)(-\sin \theta(s), \cos \theta(s)) = \theta'(s)N_z(s)$$

$$T'(s) = \alpha''(s) = \kappa_z(s)N_z(s)$$

$$\kappa_z(s) = \theta'(s)$$

□

Teorema 1.10 je u literaturi poznata kao **Osnovna (fundamentalna) teorema o krivama u ravni**. Ona daje odgovor na pitanje: da li možemo odrediti krivu u ravni ukoliko znamo njenu krivinu?

Teorema 1.10. *Neka je $k : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ proizvoljna glatka funkcija. Tada postoji prirodno parametrizovana kriva $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ čija je "uopštena" krivina k .*

Ukoliko je $\beta : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ neka druga prirodno parametrizovana kriva čija je "uopštena" krivina k , tada postoji direktna izometrija M prostora $\mathbb{R}^2$, takva da je $\beta(t) = M(\alpha(t))$, za sve $t \in (a, b)$.

Dokaz. Dokažimo prvi deo teoreme, koji se često citira kao "egzistencija" krive čija je krivina zadata. Fiksirajmo $s_0 \in (a, b)$ i definišimo funkcije $\theta : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ i $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$\theta(s) = \int_{s_0}^s k(t) dt \quad (1.26)$$

$$\alpha(s) = \left(\int_{s_0}^s \cos \theta(t) dt, \int_{s_0}^s \sin \theta(t) dt \right) = (x^\alpha(s), y^\alpha(s)). \quad (1.27)$$

Tada je:

$$\alpha'(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s)), \quad \|\alpha'(s)\| = 1,$$

pa je

$$\alpha'(s) = T(s), \quad \cos \angle(T, e_1) = \cos \theta(s).$$

Dakle, $\theta(s)$ je ugao okretanja krive α . Koristeći Teoremu 1.9 i (1.26), sledi

$$\kappa_z(s) = \theta'(s) = k(s).$$

Dokažimo i drugi deo teoreme koji se često karakteriše kao "jedinstvenost" krive. Neka je $\beta : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ neka druga prirodno parametrizovana kriva čija je "uopštena" krivina k .

Označimo sa $\tilde{\theta}(s) = \angle(\beta'(s), Ox)$ ugao okretanja krive β .

Koristeći Euler-ovu teoremu, $\tilde{\theta}'(s) = k(s)$, pa je

$$\tilde{\theta}(s) = \int_{s_0}^s k(t) dt + \tilde{\theta}(s_0) = \theta(s) + \varphi, \quad \tilde{\theta}(s_0) = \varphi \in \mathbb{R}. \quad (1.28)$$

Koristeći definiciju ugla okretanja i pretpostavku da je $\tilde{\theta}(s)$ ugao okretanja krive β , važi $\beta'(s) = (\cos \tilde{\theta}(s), \sin \tilde{\theta}(s))$, odakle sledi

$$\beta(s) = \left(\int_{s_0}^s \cos \tilde{\theta}(t) dt, \int_{s_0}^s \sin \tilde{\theta}(t) dt \right) + \beta(s_0), \quad \beta(s_0) \in \mathbb{R}^2. \quad (1.29)$$

Koristeći (1.29), (1.28), adicione formule i (1.27), dobija se

$$\begin{aligned}
\beta(s) &= \left(\int_{s_0}^s \cos(\theta(t) + \varphi) dt, \int_{s_0}^s \sin(\theta(t) + \varphi) dt \right) + \beta(s_0) \\
&= \left(\cos \varphi \int_{s_0}^s \cos \theta(t) dt - \sin \varphi \int_{s_0}^s \sin \theta(t) dt, \right. \\
&\quad \left. \sin \varphi \int_{s_0}^s \cos \theta(t) dt + \cos \varphi \int_{s_0}^s \sin \theta(t) dt \right) + \beta(s_0) \\
&= (\cos \varphi - y^\alpha(s) \sin \varphi, x^\alpha(s) \sin \varphi + y^\alpha(s) \cos \varphi) + \beta(s_0) \\
&= T_{\beta(s_0)} R_\varphi(\alpha(s)).
\end{aligned}$$

Dakle, trag krive β dobijen je rotacijom traga krive α za ugao φ i translacijom za vektor $\beta(s_0)$. $\square$

Primedba 1.3. Prirodno parametrizovana kriva $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$, čija je "uopštena" krivina proizvoljna glatka funkcija $k : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, je data sa

$$\begin{aligned}
\alpha(s) &= \left(\int \cos \theta(s) ds + c, \int \sin \theta(s) ds + d \right), \\
\theta(s) &= \int k(s) ds + \phi,
\end{aligned}$$

pri čemu su $c, d, \phi \in \mathbb{R}$ konstante.

Primer 1.8. Odrediti krivu čija je krivina $k(s) = \frac{1}{s}$. Da li je ta kriva logaritamska spirala?

$$\begin{aligned}
\theta(s) &= \int_{s_0}^s k(t) dt, \\
\alpha(s) &= \left(\int_{s_0}^s \cos \theta(t) dt, \int_{s_0}^s \sin \theta(t) dt \right) \\
\theta(s) &= \int_{s_0}^s \frac{1}{t} dt = \ln |t| \Big|_{s_0}^s = \ln s
\end{aligned}$$

birajući $s_0 = 1$

$$\begin{aligned}
\theta(s) &= \int_{s_0}^s k(t) dt = \ln s, \\
\alpha(s) &= \left(\int_{s_0}^s \cos \theta(t) dt, \int_{s_0}^s \sin \theta(t) dt \right) \\
\alpha(s) &= \left(\int_{s_0}^s \cos(\ln t) dt, \int_{s_0}^s \sin(\ln t) dt \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x(s) &= \int_{s_0}^s \cos(\ln t) dt = t \cos(\ln t) \Big|_1^s + \int_1^s \sin(\ln t) dt \\
u &= \cos(\ln t), \quad dv = dt \\
x(s) &= s \cos(\ln s) - 1 + t \sin(\ln t) \Big|_1^s - \int_1^s \cos(\ln t) dt \\
u &= \sin(\ln t), \quad dv = dt \\
x(s) &= \frac{1}{2}(s \cos(\ln s) + s \sin(\ln s) - 1) \\
y(s) &= \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha(s) &= (x(s), y(s)) \\
&= \left(\frac{1}{2}(s \cos(\ln s) + s \sin(\ln s) - 1), \frac{1}{2}(s \sin(\ln s) - s \cos(\ln s) + 1) \right)
\end{aligned}$$

Ostale krive koje imaju krivinu $\frac{1}{s}$, dobijaju se rotacijom i translacijom krive α (Teorema 1.10). Dokažimo da je ova kriva logaritamska spirala. Na primer, odredimo njenu reparametrizaciju koja je "uobičajena" parametrizacija logaritamske spirale (Neke poznate krive 17). Neka je β reparametrizacija krive α :

$$\begin{aligned}
\beta(t) &= \alpha(\phi(t)) = \alpha(e^t) \\
&= \left(\frac{1}{2}e^t(\cos t + \sin t) - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}e^t(\sin t - \cos t) + \frac{1}{2} \right) \\
&= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^t \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right), \frac{\sqrt{2}}{2}e^t \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \right) + \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}e^u(\cos u, \sin u) + \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)
\end{aligned}$$

Dakle, kriva je logaritamska spirala (translirana za vektor $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$).

Primer 1.9. Odrediti krivu čija je krivina $k(s) = \frac{1}{1+s^2}$. Da li je ta kriva lančanica?

$$\theta(s) = \int_{s_0}^s k(t) dt = \int_{s_0}^s \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan s,$$

birajući $s_0 = 0$. Kako je $\tan \theta(s) = s$, $\arctan s \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, to je

$$\begin{aligned}
\cos \theta(s) &= \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \tan^2 \theta(s)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta(s)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + s^2}} \\
\sin \theta(s) &= \frac{\tan \theta(s)}{\pm \sqrt{1 + \tan^2 \theta(s)}} = \frac{\tan \theta(s)}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta(s)}} = \frac{s}{\sqrt{1 + s^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x(s) &= \int_{s_1}^s \cos(\theta(t)) dt = \int_{s_1}^s \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt = \ln(s + \sqrt{1+s^2}) \\
y(s) &= \int_{s_1}^s \sin(\theta(t)) dt = \int_{s_1}^s \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt = \sqrt{1+s^2} \\
\alpha(s) &= (\ln(s + \sqrt{1+s^2}), \sqrt{1+s^2})
\end{aligned}$$

Kako je

$$\cosh x(s) = \frac{e^{x(s)} + e^{-x(s)}}{2} = \frac{e^{2x(s)} + 1}{2e^{x(s)}} = \sqrt{1+s^2} = y(s),$$

to je kriva $\alpha(s)$ lančanica.

Primedba 1.4. Jedan od klasičnih načina da se opiše ravanska kriva α je pomoću **prirodnih jednačina**, koje se često nazivaju i "unutrašnjim", tj. jednačina oblika $F(\kappa, s) = 0$, gde s označava funkciju dužine luka krive α . Ove jednačine jasno pokazuju kako se krivina menja pri promeni dužine luka i invarijantne su pri translaciji i rotaciji. Primetimo i da ne zavise od koordinatnog sistema. Ipak, ove jednačine nisu uvek pogodne za račun.

Prirodne jednačine nekih krivih:

1. prava: $\kappa(s) = 0$;
2. kružnica poluprečnika r : $\kappa(s) = \frac{1}{r}$;
3. lančanica: $\kappa(s) = \frac{1}{1+s^2}$ ($\kappa(s) = -\frac{a}{a^2 + s^2}$);
4. klotoida: $\kappa(s) = -\frac{s^n}{a^{n+1}}$;
5. logaritamska spirala: $\kappa(s) = \frac{1}{as+b}$, $a \neq 0$;
6. heliks: $\frac{\kappa(s)}{\tau(s)} = \text{const}$

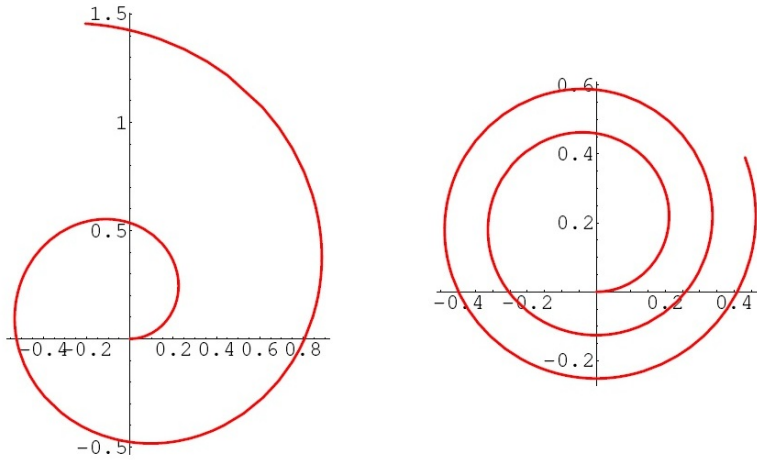


Figure 5.5: Curves with $\kappa 2(s) = 5/(s+1)$ and $5/\sqrt{s+1}$

Često se pojavljuju problemi pri integraciji, pa se koriste metode približne integracije.

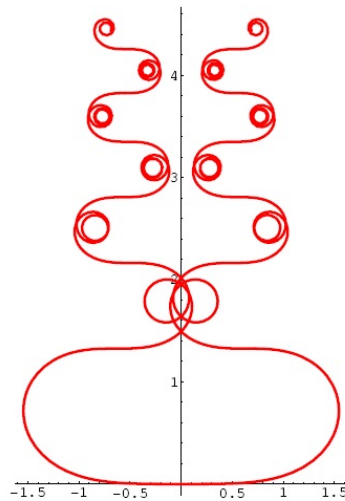


Figure 5.6: A curve with $\kappa 2(s) = s \sin s$

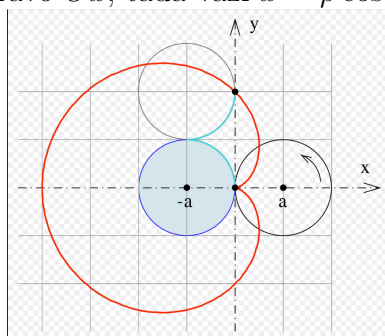
Navedimo još neke parametrizacije krivih u ravni.

Definicija 1.12. Implicitno definisana kriva u $\mathbb{R}^2$ je skup nula diferencijabilne funkcije $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, tj. skup $F^{-1}(0) = \{p \in \mathbb{R}^2 | F(p) = 0\}$.

Teorema 1.11. Neka je $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija i q tačka takva da je $F(q) = 0$. Ukoliko je $(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y})|_q \neq 0$, tada postoji okolina $\mathcal{U}$ od q u $\mathbb{R}^2$ i parametrizovana kriva $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ za koje važi da je $\{p \in \mathcal{U} | F(p) = 0\}$ trag krive α .

Polarni koordinatni sistem je koordinatni sistem u ravni koji karakteriše tačka O koju zovemo pol i poluprava $[Op)$ sa početkom u O koju zovemo polarna osa. Tačka

M različita od O jednoznačno je određena rastojanjem ρ od pola i orijentisanim uglom θ koji poluprava $[OM)$ zaklapa sa polarnom osom. Polarne koordinate čini uređeni par (ρ, θ) . Ukoliko je polarni koordinatni sistem tako postavljen da je pol upravo koordinatni početak Dekartovog koordinatnog sistema Oxy a polarna osa je upravo Ox , tada važi $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$.



$$\alpha(\theta) = (2a \cos \theta (1 - \cos \theta), 2a \sin \theta (1 - \cos \theta)), \theta \in (0, 2\pi)$$

Za preslikavanje $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ zadato formulom

$$\alpha(\theta) = (x(\theta), y(\theta)) = (\rho(\theta) \cos \theta, \rho(\theta) \sin \theta), \quad (1.30)$$

pri čemu je $\rho : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^+$ preslikavanje klase C^k , kažemo da je **polarna parametrizacija** krive, ili da je kriva zadata **polarnom parametrizacijom**. Za funkciju ρ kažemo da je **radijus funkcija** krive α . Radijus funkcija potpuno određuje polarnu parametrizaciju krive, pa često krivu definišemo koristeći samo radijus funkciju, na primer:

- jedinični krug sa centrom u O : $\rho(\theta) = 1$;
- krug sa centrom u O i poluprečnikom a : $\rho(\theta) = a$;
- Archimedes-ova spirala: $\rho(\theta) = a + b\theta$;
- konusni preseči: $\rho(\theta) = \frac{l}{1 - e \cos \theta}$;
- kardioida: $\rho(\theta) = 1 + \cos \theta$.

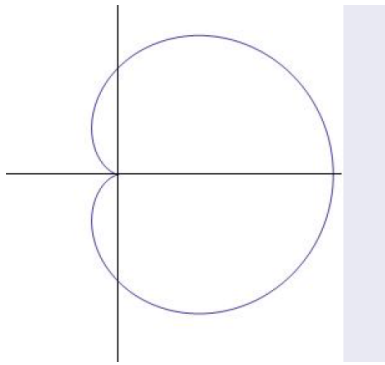
Dužina luka krive α zadate polarnom parametrizacijom (1.30) na intervalu $[a, b]$ je data formulom:

$$L(\alpha) = \int_a^b \sqrt{(\rho'(\theta))^2 + \rho^2(\theta)} d\theta. \quad (1.31)$$

Dokaz.

$$\begin{aligned}
 \alpha(\theta) &= (\rho(\theta) \cos \theta, \rho(\theta) \sin \theta) \\
 \alpha'(\theta) &= (\rho'(\theta) \cos \theta - \rho(\theta) \sin \theta, \rho'(\theta) \sin \theta + \rho(\theta) \cos \theta) \\
 \|\alpha'(\theta)\| &= (\rho'(\theta))^2 + \rho^2(\theta) \\
 L(\alpha) &= \int_a^b \|\alpha'(\theta)\| d\theta = \int_a^b \sqrt{(\rho'(\theta))^2 + \rho^2(\theta)} d\theta.
 \end{aligned}$$

□



Primer. 1. Izračunati dužinu kardioide (Neke poznate krive 14), $\alpha(t) = (a \cos t(1 + \cos t), a \sin t(1 + \cos t))$, $t \in (0, 2\pi)$. Preoznačivši, krivu možemo zapisati: $\alpha(\theta) = (\rho(\theta) \cos \theta, \rho(\theta) \sin \theta)$, za $\rho(\theta) = a(1 + \cos \theta)$.

$$\begin{aligned}
 L(\alpha) &= \int_a^b \sqrt{(\rho'(\theta))^2 + \rho^2(\theta)} d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + a^2(1 + \cos \theta)^2} d\theta \\
 &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \frac{1 + \cos \theta}{2}} d\theta \\
 &= 2a \int_0^{2\pi} \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| d\theta \\
 &= 8a
 \end{aligned}$$

2. Izračunati dužinu Archimedes-ove spirale $\alpha(\theta) = (a\theta \cos \theta, a\theta \sin \theta)$. Dakle, $\rho(\theta) = a\theta$, $\alpha(\theta) = a\theta(\cos \theta, \sin \theta)$.

$$\begin{aligned}
 L(\alpha) &= \int_a^b \sqrt{(\rho'(\theta))^2 + \rho^2(\theta)} d\theta \\
 &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \theta^2} d\theta \\
 &= \frac{a}{2} \left(\ln(2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1}) + 2\pi\sqrt{1 + 4\pi^2} \right)
 \end{aligned}$$

Tvrđenje 1.6. Krivina krive zadate polarnom parametrizacijom je

$$\kappa(\theta) = \frac{|2(\rho'(\theta))^2 - \rho(\theta)\rho''(\theta) + \rho^2(\theta)|}{((\rho'(\theta))^2 + \rho^2(\theta))^{\frac{3}{2}}}. \quad (1.32)$$

Dokaz. Za krivu $\alpha(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$ zadatu polarnom parametrizacijom (1.30) je $x(\theta) = \rho(\theta) \cos \theta$, $y(\theta) = \rho(\theta) \sin \theta$. Koristeći (1.25) dobija se

$$\begin{aligned} \kappa(\theta) &= \frac{|x'(\theta)y''(\theta) - x''(\theta)y'(\theta)|}{((x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{|(\rho'(\theta) \cos \theta - \rho(\theta) \sin \theta)(\rho''(\theta) \sin \theta + 2\rho'(\theta) \cos \theta - \rho(\theta) \sin \theta) - (\rho'(\theta) \sin \theta + \rho(\theta) \cos \theta)(\rho''(\theta) \cos \theta - 2\rho'(\theta) \sin \theta - \rho(\theta) \cos \theta)|}{((\rho'(\theta))^2 + \rho^2(\theta))^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{|2(\rho'(\theta))^2 - \rho(\theta)\rho''(\theta) + \rho^2(\theta)|}{((\rho'(\theta))^2 + \rho^2(\theta))^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

□

Primer: Krivina Archimedes-ove spirale $\rho(\theta) = a\theta$. Kako je $\rho'(\theta) = a$, $\rho''(\theta) = 0$, koristeći (1.32), dobija se

$$\kappa(\theta) = \frac{|2a^2 - 0 + (a\theta)^2|}{(a^2 + (a\theta)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2 + \theta^2}{a(1 + \theta^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\text{Krivina kardioide je } \kappa(\theta) = \frac{3}{8|a \cos \frac{\theta}{2}|}.$$

Neka je kriva α parametarski definisana sa $\alpha(t) = (t, f(t))$, tj. " zadana grafikom $y = f(x)$ ". Tada je dužina krive α na segmentu $[a, b]$ data formulom:

$$L(\alpha) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

2 POVRŠI

2.1 Osnovne definicije i primeri

Definicija 2.1. Parametrizovana regularna elementarna površ klase C^k , $k \geq 1$, u $\mathbb{R}^3$ je 1 – 1 preslikavanje $r : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$, klase C^k , gde je $\mathcal{U}$ otvoren i povezan podskup od $\mathbb{R}^2$, a vektori $\frac{\partial r}{\partial u}(u, v)$ i $\frac{\partial r}{\partial v}(u, v)$ su linearno nezavisni za $(u, v) \in \mathcal{U}$.

Uobičajene oznake su

$$\begin{aligned} r(u, v) &= (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \\ r(u, v) &= (r_1(u, v), r_2(u, v), r_3(u, v)), \\ r(u, v) &= r_1(u, v)e_1 + r_2(u, v)e_2 + r_3(u, v)e_3, \end{aligned}$$

pri čemu je $[e_1, e_2, e_3]$ ortonormirana baza vektorskog prostora $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, a $x, y, z, r_1, r_2, r_3 : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ su su preslikavanja klase C^k , $k \geq 1$. Parcijalne izvode po u i v označavamo skraćeno sa r_u, r_v , pri čemu je

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial u}(u, v) &= r_u(u, v) = \left(\frac{\partial r_1}{\partial u}(u, v), \frac{\partial r_2}{\partial u}(u, v), \frac{\partial r_3}{\partial u}(u, v) \right), \\ \frac{\partial r}{\partial v}(u, v) &= r_v(u, v) = \left(\frac{\partial r_1}{\partial v}(u, v), \frac{\partial r_2}{\partial v}(u, v), \frac{\partial r_3}{\partial v}(u, v) \right). \end{aligned}$$

Skup $r(\mathcal{U})$ nazivamo "trag", "slika" od r i označavamo sa $\mathcal{S}$, tj. $r(\mathcal{U}) = \mathcal{S}$. Često za tačku $P \in \mathcal{S}$, tj. $P(x_0, y_0, z_0) = r(u_0, v_0)$, $(u_0, v_0) \in \mathcal{U}$ koristimo oznaku $P(u_0, v_0)$.

Jakobijeva matrica preslikavanja r je:

$$\mathcal{J}(r)(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial r_1}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial r_2}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial r_2}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial r_3}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial r_3}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix}$$

Sledeći uslovi su ekvivalentni:

- (1) $r_u(u_0, v_0)$ i $r_v(u_0, v_0)$ su linearno zavisni;
- (2) $r_u(u_0, v_0) \times r_v(u_0, v_0) = 0$;
- (3) Jakobijeva matrica ima rang manji od 2 u (u_0, v_0) .

Primer 2.1. 1. $r(u, v) = (u, v, f(u, v))$, $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, klase C^k i $1 - 1$

2. $\mathcal{U} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | u^2 + v^2 < 1\}$; $r(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2})$

3. $\mathcal{V} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | u^2 + v^2 < 1\}$; $r(u, v) = (u, -\sqrt{1 - u^2 - v^2}, v)$

4. $\tilde{\mathcal{U}} = \{(u_1, v_1) \in \mathcal{U} | v_1 < 0\}$; $\tilde{\mathcal{V}} = \{(u_2, v_2) \in \mathcal{V} | v_2 > 0\}$;

$$\phi : \tilde{\mathcal{V}} \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}, \quad \phi(u_2, v_2) = (u_2, -\sqrt{1 - u_2^2 - v_2^2})$$

$$\phi^{-1} : \tilde{\mathcal{U}} \rightarrow \tilde{\mathcal{V}}, \quad \phi^{-1}(u_1, v_1) = (u_1, \sqrt{1 - u_1^2 - v_1^2})$$

$$\det(\mathcal{J}(\phi)(u_2, v_2)) = \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ u_2 & v_2 \\ \sqrt{1 - u_2^2 - v_2^2} & \sqrt{1 - u_2^2 - v_2^2} \end{array} \right|$$

$$r_1(u_1, v_1) = (u_1, v_1, \sqrt{1 - u_1^2 - v_1^2}),$$

$$r_2(u_2, v_2) = (u_2, -\sqrt{1 - u_2^2 - v_2^2}, v_2),$$

$$r_2 = r_1 \circ \phi$$

Definicija 2.2. Koordinatna transformacija klase C^k je C^k difeomorfizam $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$, gde su $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ otvoreni i povezani podskupovi od $\mathbb{R}^2$.

Primer 2.1. Funkcija ϕ u primeru 2.1 je koordinatna transformacija.

Lema 2.1. Neka je $r_1 : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizovana regularna elementarna površ klase C^k i $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ koordinatna transformacija klase C^k . Tada je $r_2 = r_1 \circ \phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizovana regularna elementarna površ klase C^k i ima istu sliku kao r_1 .

Uputstvo: $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$, $\phi(u_2, v_2) \mapsto (\phi_1(u_2, v_2), \phi_2(u_2, v_2))$

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_2}{\partial u_2} &= \frac{\partial r_1}{\partial u_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial u_2} + \frac{\partial r_1}{\partial v_1} \frac{\partial \phi_2}{\partial u_2}, \\ \frac{\partial r_2}{\partial v_2} &= \frac{\partial r_1}{\partial u_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial v_2} + \frac{\partial r_1}{\partial v_1} \frac{\partial \phi_2}{\partial v_2} \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial u_2} \times \frac{\partial r_2}{\partial v_2} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial v_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial v_2} \end{vmatrix} \cdot \frac{\partial r_1}{\partial u_1} \times \frac{\partial r_1}{\partial v_1} = \det(\mathcal{J}(\phi)) \frac{\partial r_1}{\partial u_1} \times \frac{\partial r_1}{\partial v_1}. \quad (2.2)$$

Definicija 2.3. Parametrizovane regularne površi $r_1 : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ i $r_2 : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^3$ su ekvivalentne ($r_1 \sim r_2$) ukoliko postoji koordinatna transformacija $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ klase C^k za koju je $r_2 = r_1 \circ \phi$.

Lema 2.2. Relacija $\sim$ navedena u Definiciji 2.3 je relacija ekvivalencije.

Definicija 2.4. Klasa ekvivalencije relacije $\sim$ navedene u Definiciji 2.3 je **regularna neparametrizovana elementarna površ**.

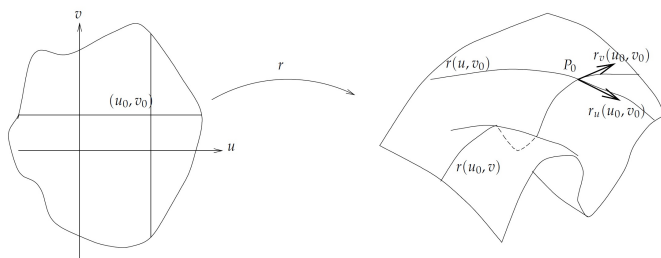
Za osobinu površi kažemo da je geometrijska ukoliko ne zavisi od parametrizacije površi.

Umesto termina regularna neparametrizovana elementarna površ, često ćemo koristiti termine: regularna elementarna površ, lokalna površ, zakrpa, ili samo površ, ukoliko nema opasnosti od zabune. Ukoliko postoji koordinatna transformacija $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ klase C^k za koju je $r_2 = r_1 \circ \phi$ često kažemo da je površ r_2 reparametrizacija površi r_1 .

Može se pokazati da je klasa ekvivalencije parametrizovane regularne elementarne površi $r : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ u suštini određena skupom slika $r(\mathcal{U})$, naime važi:

Teorema 2.1. Neka su $r_1 : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ i $r_2 : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizovane elementarne površi, takve da je $r_1(\mathcal{U}) = r_2(\mathcal{V})$. Tada za sve $p \in \mathcal{U}$ i $q \in \mathcal{V}$ takve da je $r_1(p) = r_2(q)$ postoje njihove okoline $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}$ i $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}$ takve da su $r_1|_{\mathcal{U}_1}$ i $r_2|_{\mathcal{V}_1}$ ekvivalentne površi, tj. postoji koordinatna transformacija $\phi : \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{U}_1$ tako da je $r_2 = r_1 \circ \phi$.

Uočimo preslikavanja definisana sa $u \mapsto r(u, v_0)$, $v \mapsto r(u_0, v)$, pri čemu je $r : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ regularna neparametrizovana elementarna površ i $(u_0, v_0) \in \mathcal{U}$. Ovako definisana preslikavanja, $\alpha(u) = r(u, v_0)$ i $\beta(v) = r(u_0, v)$, $\mathbb{R} \supset I \xrightarrow{\alpha} r(\mathcal{U})$, $\mathbb{R} \supset J \xrightarrow{\beta} r(\mathcal{U})$ su prirodno definisane krive na regularnoj elementarnoj površi r , **u -parametarska kriva** i **v -parametarska kriva** površi r . Ove krive se često nazivaju i **koordinatnim krivama**. Vektori brzina ovih krivih su redom r_u i r_v .



Odrediti koordinatne krive ravni, sfere, helikoida...

Postoji pogodan način kako možemo predstaviti proizvoljnu krivu čiji je trag sadržan u tragu elementarne površi. Često kažemo da "kriva pripada površi".

Lema 2.3. Neka je $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ kriva čiji trag pripada tragu $r(\mathcal{U})$ regularne elementarne površi $r : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Tada postoje jedinstvene diferencijabilne funkcije $\alpha_1, \alpha_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ takve da

$$\alpha(t) = r(\alpha_1(t), \alpha_2(t)), \quad a < t < b.$$

Uputstvo: $(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) = (r^{-1} \circ \alpha)(t)$.

Često se umesto oznaka $\alpha_1, \alpha_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ koriste oznake $u, v : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, tj. $\alpha(t) = r(u(t), v(t))$, $a < t < b$.

Sada možemo definisati pojam tangentskog vektora na regularnu elementarnu površ.

Definicija 2.5. Neka je $r : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ regularna elementarna površ i $P \in r(\mathcal{U})$.

Tangentni vektor površi r u tački P je vektor $X \in \mathbb{R}^3$ za koji postoji kriva $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ čiji trag pripada tragu površi r , tj. takva da je $\alpha(t) = r(u(t), v(t))$, $a < t < b$, pri čemu su $u, v : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilne funkcije i $\alpha(0) = P$, $\alpha'(0) = X$.

Koristeći Lemu 2.3 to znači da je X vektor brzine u tački P neke krive čiji trag pripada tragu površi i koja sadrži tačku P .

Tvrđenje 2.1. Skup svih tangentnih vektora na regularnu elementarnu površ $r : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ u tački $P = r(u_0, v_0) \in r(\mathcal{U})$, zajedno sa nulom vektorom, je vektorski prostor čija je baza $[r_u(u_0, v_0), r_v(u_0, v_0)]$.

Skup svih tangentnih vektora površi r u tački P označavaćemo sa $T_P(r)$ i nazivaćemo ga **tangentni prostor** površi r u tački P . Direktno iz dokaza Tvrđenja 2.1 sledi

Posledica 2.1. Neka je $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ kriva čiji trag pripada tragu $r(\mathcal{U})$ regularne elementarne površi $r : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Tada postoje jedinstvene diferencijabilne funkcije $u, v : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ takve da

$$\alpha'(t) = u'(t)r_u(u(t), v(t)) + v'(t)r_v(u(t), v(t)).$$

Definicija 2.6. Neka je $r : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ regularna elementarna površ. Za vektor $Z \in \mathbb{R}^3$ kažemo da je **normalan** na r u $P \in r(\mathcal{U})$ ukoliko je $Z \circ X = 0$ za sve vektore X tangentne na površ r u tački P . **Tangentna ravan** na regularnu elementarnu površ $r : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ u tački $P = r(u_0, v_0)$ je ravan koja sadrži tačku P i paralelna je vektorima $r_u(u_0, v_0)$ i $r_v(u_0, v_0)$. **Vektor normale** na površ r u tački P je $n(u_0, v_0) = \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|}(u_0, v_0)$. **Normala** na površ u tački P je prava određena tačkom P i vektorom n .

Da li su tangentna ravan i normala geometrijski pojmovi?

Uputstvo: Koristiti formulu (2.2): $r_{u_2}^2 \times r_{v_2}^2 = \det(\mathcal{J}(\phi))r_{u_1}^1 \times r_{v_1}^1$.

Definicija 2.7. Vektorsko polje V na regularnoj elementarnoj površi $r : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ je diferencijabilno preslikavanje koje svakoj tački $q \in \mathcal{U}$ dodeljuje vektor $V(q) \in \mathbb{R}^3$. Kažemo da je V **tangentno vektorsko polje** na r ukoliko $V(q) \in T_{r(q)}(r)$ i **normalno vektorsko polje** ukoliko je $V(q) \circ X = 0$ za sve $X \in T_{r(q)}(r)$ i sve $q \in \mathcal{U}$. Vektorska polja r_u i r_v su **koordinatna vektorska polja**. **Vektorsko polje normala** na površ je $n(u, v) = \frac{r_u(u, v) \times r_v(u, v)}{\|r_u(u, v) \times r_v(u, v)\|}$.

Tvrđenje 2.2. *Svako tangentno vektorsko polje na regularnoj elementarnoj površi $r : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ može se predstaviti u obliku*

$$X(u, v) = X_1(u, v)r_u(u, v) + X_2(u, v)r_v(u, v).$$

Funkcije X_1, X_2 su jedinstvene i diferencijabilne. Takođe, par diferencijabilnih funkcija $X_1, X_2 : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ određuje jedinstveno tangentno vektorsko polje.

Definicija 2.8. *Regularna elementarna površ $r : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ je svojstvena ukoliko je inverzna funkcija $r^{-1} : r(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{U}$ neprekidna u svim tačkama iz $r(\mathcal{U})$. Površ klase C^k u $\mathbb{R}^3$ je podskup $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^3$ koji je unija slika svojstvenih regularnih elementarnih površi klase C^k , takvih da je za proizvoljne regularne elementarne površi $r_1 : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ i $r_2 : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^3$ iz unije, preslikavanje*

$$r_2^{-1} \circ r_1 : r_1^{-1}(\mathcal{U}' \cap \mathcal{V}') \rightarrow r_2^{-1}(\mathcal{U}' \cap \mathcal{V}')$$

koordinatna transformacija klase C^k , pri čemu je $\mathcal{U}' = r_1(\mathcal{U})$, $\mathcal{V}' = r_2(\mathcal{V})$.

Teorema 2.2. *Neka je $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija i $(F_x, F_y, F_z) \neq 0$ u svim tačkama $\mathcal{P} = \{(x, y, z) | F(x, y, z) = 0\}$. Tada je $\mathcal{P}$ površ.*

Specijalno, ukoliko je $F_z \neq 0$ u tački $P \in \mathcal{P}$, tada postoji elementarna regularna površ $r : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $r(u, v) = (u, v, f(u, v))$ tako da $P \in r(\mathcal{U})$.

Dokaz: teorema o implicitnoj funkciji.

2.2 Prva osnovna forma

Za skalarni proizvod u $\mathbb{R}^3$ ćemo umesto $\circ$ koristiti oznaku $\langle, \rangle$.

Neka je $r : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ regularna elementarna površ i . Kvadratnu formu

$$I_P(w) = \langle w, w \rangle_P = \langle w, w \rangle_P = \|w\|_P^2 \geq 0, w \in T_P(r)$$

nazivamo **prva osnovna (fundamentalna) forma** površi r u tački $P \in r(\mathcal{U})$. Kako je tangentni vektor $w \in T_P(r)$ (po Definiciji 2.5) vektor brzine neke krive $\alpha(t) = r(u(t), v(t))$, $t \in (a, b)$, sa $P = \alpha(0) = r(u_0, v_0)$, $w = \alpha'(0)$, to je

$$\begin{aligned} I_P(w) &= I_P(\alpha'(0)) = \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_P \\ &= \langle u'(0)r_u + v'(0)r_v, u'(0)r_u + v'(0)r_v \rangle_P \\ &= (u'(0))^2 \langle r_u, r_u \rangle_P + 2u'(0)v'(0) \langle r_u, r_v \rangle_P + (v'(0))^2 \langle r_v, r_v \rangle_P \\ &= E(u_0, v_0)(u'(0))^2 + 2F(u_0, v_0)u'(0)v'(0) + G(u_0, v_0)(v'(0))^2, \end{aligned}$$

pri čemu je

$$\begin{aligned} E(u_0, v_0) &= \langle r_u, r_u \rangle_P = \langle r_u(u_0, v_0), r_u(u_0, v_0) \rangle, \\ F(u_0, v_0) &= \langle r_u, r_v \rangle_P = \langle r_u(u_0, v_0), r_v(u_0, v_0) \rangle, \\ G(u_0, v_0) &= \langle r_v, r_v \rangle_P = \langle r_v(u_0, v_0), r_v(u_0, v_0) \rangle. \end{aligned}$$

Primetimo da E , F i G ne zavise od krive. Takođe, u okolini tačke P možemo definisati funkcije $E(u, v)$, $F(u, v)$, $G(u, v)$, koje su tu i diferencijabilne: $E(u, v) = \langle r_u(u, v), r_u(u, v) \rangle$, $F(u, v) = \langle r_u(u, v), r_v(u, v) \rangle$, $G(u, v) = \langle r_v(u, v), r_v(u, v) \rangle$. E, F, G su **koeficijenti prve osnovne forme**.

Kvadratna forma I definiše bilinearnu formu $\mathcal{I}(X, Y)$ u vektorskom prostoru $T_P(r) \cong \mathbb{R}^2$.

$$\mathcal{I}(X, Y) = \frac{1}{2} (I(X + Y) - I(X) - I(Y))$$

Koristeći oznake iz Tvrdjenja 2.2 važi

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(X(u, v), Y(u, v)) &= X_1(u, v)Y_1(u, v)E(u, v) \\ &+ (X_1(u, v)Y_2(u, v) + X_2(u, v)Y_1(u, v))F(u, v) \\ &+ X_2(u, v)Y_2(u, v)G(u, v). \end{aligned}$$

Uobičajen je i zapis

$$\mathcal{I}(X, Y) = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}.$$

Često se koriste i oznake $g_{ij}(u, v) = \langle r_i(u, v), r_j(u, v) \rangle$, $i, j = 1, 2$, $r_1 = r_u$, $r_2 = r_v$. Ove funkcije definišu simetričnu matricu u svakoj tački $r(\mathcal{U})$. Nekada se nazivaju

metrički koeficijenti, koeficijenti metričkog tenzora, koeficijenti Riemann-ove metrike.

Dokazati da važi $EG - F^2 > 0$.

Uputstvo: $EG - F^2 = \langle r_u, r_u \rangle \langle r_v, r_v \rangle - \langle r_u, r_v \rangle^2 = \|r_u\|^2 \|r_v\|^2 - \|r_u\|^2 \|r_v\|^2 \cos^2 \angle(r_u, r_v) = \|r_u\|^2 \|r_v\|^2 \sin^2 \angle(r_u, r_v) = \|r_u \times r_v\|^2 > 0$.

Primer 2.2. Izračunati koeficijente prve osnovne forme ravni, sfere, cilindra, konusa, helikoida, ... (poglavlje 3.4).

Ravan Za parametrizaciju $r(u, v) = r_0 + up + vq$, $-\infty < u, v < +\infty$ je $E = p^2 = \|p\|^2$, $F = \langle p, q \rangle$, $G = \|q\|^2$. Ukoliko su p i q ortogonalni i jedinični, tada je $E = 1$, $F = 0$, $G = 1$. Za parametrizaciju $r(\rho, \phi) = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, 0)$, $0 \leq \rho < +\infty$, $0 \leq \phi < 2\pi$, je $E = 1$, $F = 0$, $G = \rho^2$.

Sfera $r(u, v) = R(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$

$$r_u(u, v) = R(-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u),$$

$$r_v(u, v) = R(-\cos u \sin v, \cos u \cos v, 0)$$

$$E = \langle r_u, r_u \rangle = R^2, \quad F = \langle r_u, r_v \rangle = 0, \quad G = \langle r_v, r_v \rangle = R^2 \cos^2 u$$

Rotacione površi $r(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$, $f > 0$

$$r_u(u, v) = (f_u(u) \cos v, f_u(u) \sin v, g_u(u)),$$

$$r_v(u, v) = (-f(u) \sin v, f(u) \cos v, 0)$$

$E = f_u^2 + g_u^2$, $F = 0$, $G = f^2$. Za prirodno parametrizovanu krivu je $f_u^2 + g_u^2 = 1$, pa je $E = 1$, $F = 0$, $G = f^2$.

Da li su E, F, G geometrijski pojmovi? Uputstvo: Koristeći (2.1) i definiciju koeficijenata prve osnovne forme dobija se:

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = (\mathcal{J}(\phi)^{-1})^t \begin{bmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{bmatrix} (\mathcal{J}(\phi))^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{bmatrix} = \mathcal{J}(\phi)^t \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \mathcal{J}(\phi)$$

$$\mathcal{J}(\phi)(u_2, v_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u_2} & \frac{\partial \phi_1}{\partial v_2} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial u_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial v_2} \end{bmatrix}$$

Ilustrovati na primeru ravni i sfere. Naći parametrizaciju ravni tako da je $E = 1$, $F = 0$, $G = 1$.

Primer 2.3. Helikoid

$$r^1(u_1, v_1) = (u_1 \cos v_1, u_1 \sin v_1, v_1), \quad 0 < u_1 < R, \quad 0 < v_1 < 2\pi$$

Neka je $r^2 = r^1 \circ \phi$ za koordinatnu transformaciju

$$\phi(u_2, v_2) = (\phi_1(u_2, v_2), \phi_2(u_2, v_2)), \quad \phi_1(u_2, v_2) = \sinh u_2, \quad \phi_2(u_2, v_2) = v_2$$

$$\begin{aligned} r^2(u_2, v_2) &= r^1(\phi(u_2, v_2)) = r^1(\phi_1(u_2, v_2), \phi_2(u_2, v_2)) \\ &= r^1(\sinh u_2, v_2) = (\sinh u_2 \cos v_2, \sinh u_2 \sin v_2, v_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E^1 &= 1, F^1 = 0, G^1 = 1 + u_1^2 \\ E^2 &= \cosh^2 u_2, F^2 = 0, G^2 = \cosh^2 u_2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} E^2 & F^2 \\ F^2 & G^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial v_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial v_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E^1 & F^1 \\ F^1 & G^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u_2} & \frac{\partial \phi_1}{\partial v_2} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial u_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial v_2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cosh^2 u_2 & 0 \\ 0 & \cosh^2 u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh u_2 & 0 \\ 0 & \cosh u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + \sinh^2 u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cosh u_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Neka je $\alpha(t)$ kriva čija slika pripada $r(\mathcal{U})$, tj. $\alpha(t) = r(u(t), v(t))$. Tada za funkciju dužine luka krive α važi:

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \|\alpha'(\tau)\| d\tau = \int_0^t \sqrt{I(\alpha'(\tau))} d\tau \\ &= \int_0^t \sqrt{E(u(\tau), v(\tau))(u'(\tau))^2 + 2F(u(\tau), v(\tau))u'(\tau)v'(\tau) + G(u(\tau), v(\tau))(v'(\tau))^2} d\tau. \end{aligned}$$

Zbog toga mnogi matematičari govore o "elementu" dužine luka, ds površi $\mathcal{P}$ i pišu

$$ds^2 = E(u, v) du^2 + 2F(u, v) du dv + G(u, v) dv^2.$$

Takođe, često se kaže i da je $ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$ prva osnovna forma.

Dužina luka krive α , čija slika pripada $r(\mathcal{U})$, tj. $\alpha(t) = r(u(t), v(t))$, na intervalu $[a, b]$, $c < a < b < d$ je:

$$\begin{aligned} L(\alpha) &= \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{I(\alpha'(t))} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{E(u'(t))^2 + 2F(u'(t))v'(t) + G(v'(t))^2} dt. \end{aligned}$$

Za **ugao θ između dve krive α i β** čije slike pripadaju $r(\mathcal{U})$ i koje se seku u tački $\alpha(t_0) = \beta(t_1) = r(u_0, v_0)$ i za koje je $\alpha'(t_0) = X$, $\beta'(t_1) = Y$ važi

$$\cos \theta = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_1) \rangle}{\|\alpha'(t_0)\| \|\beta'(t_1)\|} = \frac{\mathcal{I}(X, Y)}{\sqrt{\mathcal{I}(X, X)} \sqrt{\mathcal{I}(Y, Y)}}. \quad (2.3)$$

Koristeći Lemu 2.3, uvedimo oznake $\alpha(t) = r(u_1(t), v_1(t))$, $\beta(t) = r(u_2(t), v_2(t))$. Tada je

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(X, Y) &= E(u_0, v_0)u'_1(t_0)u'_2(t_1) + F(u_0, v_0)(u'_1(t_0)v'_2(t_1) + u'_2(t_1)v'_1(t_0)) \\ &\quad + G(u_0, v_0)v'_1(t_0)v'_2(t_1), \\ \mathcal{I}(X, X) &= E(u_0, v_0)(u'_1(t_0))^2 + 2F(u_0, v_0)u'_1(t_0)v'_1(t_0) + G(u_0, v_0)(v'_1(t_0))^2, \\ \mathcal{I}(Y, Y) &= E(u_0, v_0)(u'_2(t_1))^2 + 2F(u_0, v_0)u'_2(t_1)v'_2(t_1) + G(u_0, v_0)(v'_2(t_1))^2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Tvrđenje 2.3. *Specijalno, za ugao ϕ između koordinatnih krivih važi*

$$\cos \phi = \frac{F(u_0, v_0)}{\sqrt{E(u_0, v_0)G(u_0, v_0)}}. \quad (2.5)$$

Dokaz. Označimo u -koordinatnu krivu sa α , tj. $\alpha(t) = r(t, v_0)$, $u_1(t) = t$, $v_1(t) = v_0$, a v -koordinatnu krivu sa β , tj. $\beta(t) = r(u_0, t)$, $u_2(t) = u_0$, $v_2(t) = t$. Koristeći 2.3 i 2.4 dobija se 2.5. $\square$

Specijalno, koristeći Primer 2.2, zaključujemo da je za rotacione površi $F = 0$, pa iz Tvrđenja 2.3 sledi:

Posledica 2.2. *Koordinatne krive rotacionih površi su ortogonalne.*

Primer 2.4. *Date su krive*

$$\begin{aligned} \alpha(v) &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos v, \frac{\sqrt{2}}{2} \sin v, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \quad \alpha : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \beta(u) &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos u, \frac{1}{2} \cos u, \sin u \right), \quad \beta : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

Izračunati dužinu krivih α i β i ugao koje zaklapaju u presečnoj tački.

Primetimo da krive pripadaju površi (sferi)

$$r(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u), \quad -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < v < 2\pi$$

čiji su koeficijenti prve osnovne forme: $E = 1$, $F = 0$, $G = \cos^2 u$. Pri tome važi i

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= r(u_1(t), v_1(t)), \quad u_1(t) = \frac{\pi}{4}, \quad v_1(t) = t, \\ \beta(t) &= r(u_2(t), v_2(t)), \quad u_2(t) = t, \quad v_2(t) = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

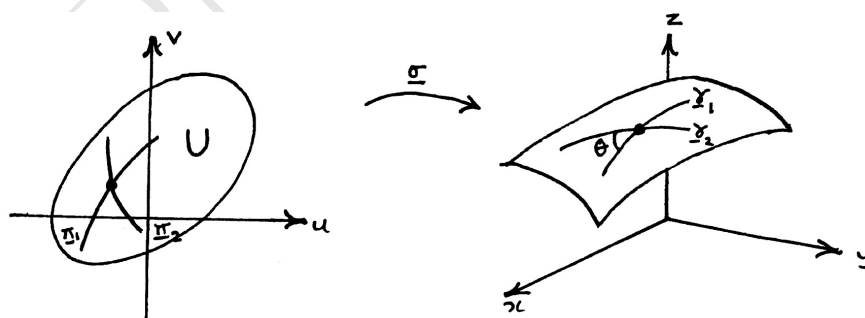
$$\begin{aligned}
L(\alpha) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{E(u_1'(t))^2 + 2Fu_1'(t)v_1'(t) + G(v_1'(t))^2} dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot 1 + \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot 1} dt = \sqrt{2}\pi \\
L(\beta) &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{E(u_2'(t))^2 + 2Fu_2'(t)v_2'(t) + G(v_2'(t))^2} dt \\
L(\beta) &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + \cos^2 t \cdot 0} dt = \pi \\
\cos \phi &= \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_1) \rangle}{\|\alpha'(t_0)\| \|\beta'(t_1)\|} = \frac{\mathcal{I}(X, Y)}{\sqrt{\mathcal{I}(X, X)} \sqrt{\mathcal{I}(Y, Y)}} \\
\mathcal{I}(X, Y) &= E(u_0, v_0)u_1'(t_0)u_2'(t_1) \\
&\quad + F(u_0, v_0)(u_1'(t_0)v_2'(t_1) + u_2'(t_1)v_1'(t_0)) \\
&\quad + G(u_0, v_0)v_1'(t_0)v_2'(t_1),
\end{aligned}$$

$$\mathcal{I}(X, Y) = E(u_0, v_0) \cdot 0 + F(u_0, v_0)(0 + 1 \cdot 1) + G(u_0, v_0)1 \cdot 0 = F(u_0, v_0) = 0$$

Uporediti sa Primerom 1.1.

Dakle, promena parametrizacije površi menja koeficijente E , F i G . Može se dokazati da svaka površ ima reparametrizaciju za koju koeficijenti prve osnovne forme zadovoljavaju uslove $E = G$, $F = 0$. Ovakva parametrizacija se zove **konformna** (čuva uglove), što opravdava sledeći rezultat.

Tvrđenje 2.4. Neka su $\alpha_1, \alpha_2 : I \rightarrow \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$, $\alpha_1(t) = (u_1(t), v_1(t))$, $\alpha_2(t) = (u_2(t), v_2(t))$ krive koje se seku u tački $(a, b) \in \mathcal{U}$. Parametrizacija površi $r : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ je konformna ako i samo ako je ugao između krivih α_1 i α_2 u tački $\alpha_1(t_1) = \alpha_2(t_2) = (a, b)$ jednak uglu između krivih $\beta_1(t) = r(u_1(t), v_1(t))$ i $\beta_2(t) = r(u_2(t), v_2(t))$ u tački $\beta_1(t_1) = \beta_2(t_2) = r(a, b)$, za sve takve krive α_i , β_i , $i = 1, 2$.



Dokaz. Ukoliko je parametrizacija konformna, tj. $E = G$, $F = 0$, koristeći formulu

(2.3), dobija se

$$\begin{aligned}
\cos \angle(\beta_1, \beta_2)_{r(a,b)} &= \frac{Eu'_1u'_2 + Ev'_1v'_2}{\sqrt{E(u'_1)^2 + E(v'_1)^2} \cdot \sqrt{E(u'_2)^2 + E(v'_2)^2}} \\
&= \frac{u'_1u'_2 + v'_1v'_2}{\sqrt{(u'_1)^2 + (v'_1)^2} \cdot \sqrt{(u'_2)^2 + (v'_2)^2}} \\
&= \cos \angle(\alpha_1, \alpha_2)_{(a,b)}
\end{aligned}$$

Obrnuto, neka je $\cos \angle(\beta_1, \beta_2)_{r(a,b)} = \cos \angle(\alpha_1, \alpha_2)_{(a,b)}$, za sve krive α_1 i α_2 . Uočimo prvo krive

$$\alpha_1(t) = (a + t, b), \quad \alpha_2(t) = (a, b + t),$$

koje se seku u tački $(a, b) \in \mathcal{U}$, za $t = 0$, tj. $u_1(t) = a + t$, $v_1(t) = b$, $u_2(t) = a$, $v_2(t) = b + t$.

$$\cos \angle(\alpha_1, \alpha_2)_{(a,b)} = \frac{u'_1u'_2 + v'_1v'_2}{\sqrt{(u'_1)^2 + (v'_1)^2} \cdot \sqrt{(u'_2)^2 + (v'_2)^2}} = 0.$$

Koristeći (2.3), sledi

$$\begin{aligned}
\cos \angle(\beta_1, \beta_2)_{r(a,b)} &= \frac{Eu'_1u'_2 + F(u'_1v'_2 + u'_2v'_1) + Gv'_1v'_2}{\sqrt{E(u'_1)^2 + 2Fu'_1v'_1 + G(v'_1)^2} \cdot \sqrt{E(u'_2)^2 + 2Fu'_2v'_2 + G(v'_2)^2}} \\
&= \frac{F}{\sqrt{E} \cdot \sqrt{G}},
\end{aligned}$$

odakle zaključujemo $F = 0$. Posmatrajući sada krive

$$\alpha_1(t) = (a + t, b + t), \quad \alpha_2(t) = (a + t, b - t)$$

zaključujemo $\frac{E-G}{E+G} = 0$, tj. $E = G$. □

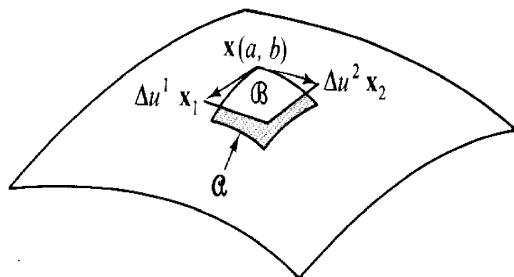
Površina površi

Motivacija:

Površina paralelograma "čije su stranice" vektori a i b je $\|a \times b\|$.

Vektori r_u, r_v čine bazu vektorskog prostora $T_P(r)$.

$$\|r_u \times r_v\|^2 = EG - F^2$$



Definicija 2.9. Neka je $r : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ regularna elementarna površ i neka je $\mathcal{S}$ kompaktan podskup od $r(\mathcal{U})$. Tada je **površina** od $\mathcal{S}$

$$\mathcal{P}(\mathcal{S}) = \int \int_{r^{-1}(\mathcal{S})} \sqrt{EG - F^2} du dv. \quad (2.6)$$

Kako za $r^2 = r^1 \circ \phi$ važi $r_{u_2}^2 \times r_{v_2}^2 = \det(\mathcal{J}(\phi)) r_{u_1}^1 \times r_{v_1}^1$, to je i $\sqrt{E^2 G^2 - (F^2)^2} = \det(\mathcal{J}(\phi)) \sqrt{E^1 G^1 - (F^1)^2}$. Koristeći smenu promenljivih u dvostrukom integralu, sledi da je ova definicija "geometrijska" (ne zavisi od parametrizacije).



Neka je $r : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $r = r(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ regularna elementarna površ i neka je $\mathcal{S}$ kompaktan podskup od $r(\mathcal{U})$. Tada je

$$\mathcal{P}(\mathcal{S}) = \int \int_{r^{-1}(\mathcal{S})} \sqrt{(x_u y_v - x_v y_u)^2 + (x_u z_v - x_v z_u)^2 + (y_u z_v - y_v z_u)^2} du dv.$$

Uputstvo: $E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2$, $F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$, $G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2$.

Neka je $r : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $r = r(x, y, f(x, y))$ regularna elementarna površ i neka je $\mathcal{S}$ kompaktan podskup od $r(\mathcal{U})$. Tada je

$$\mathcal{P}(\mathcal{S}) = \int \int_{r^{-1}(\mathcal{S})} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy.$$

Uputstvo: $E = 1 + f_x^2$, $F = f_x f_y$, $G = 1 + f_y^2$, $EG - F^2 = 1 + f_x^2 + f_y^2$.

Odrediti površinu pravougaonika u ravni xOy čije su stranice dužine 3 i 4.

Odrediti površinu sfere poluprečnika R .

Odrediti površinu torusa.

Uputstvo: Koristeći (2.6) i vrednosti koeficijenata prve osnovne forme za torus (poglavlje 3.4), sledi

$$\mathcal{P}(\mathcal{S}) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} b(a + b \cos v) \, du \, dv = 4ab\pi^2$$

Djoric27. maj 2021.

2.3 Preslikavanja površi

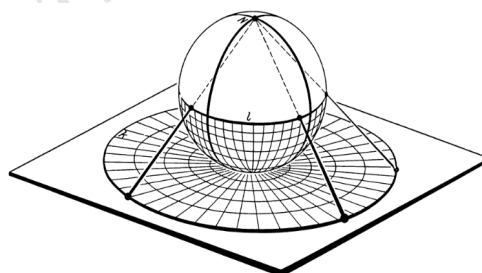
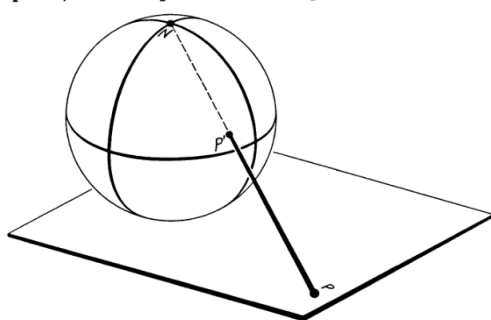
Uočimo preslikavanje $f : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$, pri čemu su $r_1 : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ i $r_2 : \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ regularne elementarne površi čije su slike redom $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$. S obzirom da su $r_1 : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{S}_1$ i $r_2 : \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathcal{S}_2$ bijekcije, postoji jedinstveno preslikavanje $\mathcal{F} : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{U}_2$ takvo da važi

$$f(r_1(u, v)) = r_2(\mathcal{F}(u, v)), \quad \text{za sve } (u, v) \in \mathcal{U}_1.$$

Kažemo da je preslikavanje $f : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ glatko ukoliko je preslikavanja $\mathcal{F}$ glatko, tj. ukoliko $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ imaju neprekidne parcijalne izводе svakog reda, pri čemu je $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$, $\mathcal{F}_i : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathbb{R}$.

Konformne površi

Definicija 2.10. Neka su $r_1 : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ i $r_2 : \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ regularne elementarne površi čije su slike redom $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$. Difeomorfizam $f : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ je **konformno** preslikavanje ukoliko "čuva ugao između krivih", tj. ukoliko za svake dve regularne krive $\alpha, \beta : (a, b) \rightarrow \mathcal{S}_1$ važi $\angle(\alpha, \beta) = \angle(f(\alpha), f(\beta))$. Ukoliko konformno preslikavanje $f : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ postoji, kažemo da su površi $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ (ili r_1 i r_2) konformne.



Teorema 2.3. Dve regularne elementarne površi $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ su (lokalno) konformne ako i samo ako postoje njihove reparametrizacije $r_1 : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ i $r_2 : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$, sa $r_1(\mathcal{U}) = \mathcal{S}_1$, $r_2(\mathcal{U}) = \mathcal{S}_2$ takve da je $E_2 = \lambda^2 E_1$, $F_2 = \lambda^2 F_1$, $G_2 = \lambda^2 G_1$ pri čemu je λ^2 ne-nula diferencijabilna funkcija na $\mathcal{U}$.

Teorema 2.4. Svake dve regularne elementarne površi su lokalno konformne.

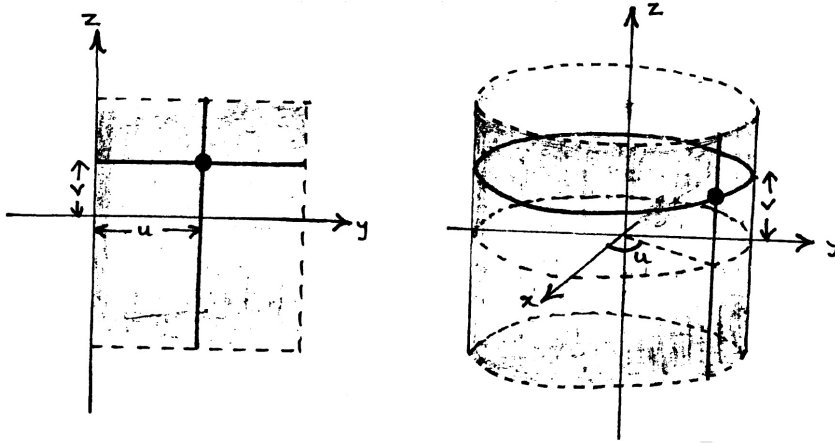
Bez dokaza. Ideja dokaza: izaberemo specijalnu parametrizaciju, "izotermalnu parametrizaciju", za koju važi $E = G = \lambda^2(u, v)$, $F = 0$ (pogledati Tvrdjenje...).

Izometrične površi

Primer 2.5. Ravan i cilindar Uočimo parametrizacije dela ravni $r_1(u, v) = (0, u, v)$, $0 < u < 2\pi$ i cilindra $r_2(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$, $0 < u < 2\pi$. (Za $u \in \mathbb{R}$

ne dobija se bijekcija.) "Obmotajmo" deo ravni (traku) oko cilindra. Tada je, za $f(r_1(u, v)) = f(0, u, v) = (\cos u, \sin u, v)$, i $\mathcal{F}(u, v) = (u, v)$, zaista

$$f(r_1(u, v)) = r_2(\mathcal{F}(u, v)) = r_2(u, v).$$



Definicija 2.11. Neka su $r_1 : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ i $r_2 : \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ regularne elementarne površi čije su slike redom $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$. Difeomorfizam $f : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ je **izometrija** ukoliko "čuva dužinu krivih", tj. ukoliko za svaku regularnu krivu $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathcal{S}_1$ važi $L(\alpha) = L(f(\alpha))$. Ukoliko izometrija $f : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ postoji, kažemo da su površi $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ (ili r_1 i r_2) **izometrične**.

Preslikavanje ravni na cilindar nije izometrija (nije bijekcija), ali ima svojstvo da čuva dužinu krivih.

Definicija 2.12. Neka su $r_1 : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ i $r_2 : \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ regularne elementarne površi čije su slike redom $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$. Funkcija f se naziva **lokalni difeomorfizam** ukoliko za svaku tačku $P \in \mathcal{S}_1$ postoji njena okolina $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{S}_1$ takva da je je restrikcija f na $\mathcal{T}_1$ difeomorfizam na $f(\mathcal{T}_1)$. Lokalni difeomorfizam $f : \mathcal{T}_1 \rightarrow f(\mathcal{T}_1)$ je **lokalna izometrija** ukoliko "čuva dužinu krivih", tj. ukoliko za svaku regularnu krivu $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathcal{T}_1$ važi $L(\alpha) = L(f(\alpha))$. Ukoliko lokalna izometrija $f : \mathcal{T}_1 \rightarrow f(\mathcal{T}_1)$ postoji, kažemo da su površi $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ (ili r_1 i r_2) **lokalno izometrične**.

Teorema 2.5. Dve površi $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ su (lokalno) izometrične ako i samo ako postoje njihove regularne elementarne reparametrizacije $r_1 : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ i $r_2 : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ sa $r_1(\mathcal{U}) = \mathcal{S}_1$, $r_2(\mathcal{U}) = \mathcal{S}_2$, takve da imaju iste prve osnovne forme.

Dokaz. Pretpostavimo da takva parametrizacija postoji, tj. da površi $r_1 : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ i $r_2 : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$, sa tragovima $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ i istim prvim osnovnim formama. Neka je $f : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ preslikavanje koje odgovara identičnom preslikavanju $\mathcal{F} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$, tj. $f(r_1(u, v)) = r_2(u, v)$. (f postoji, jer je $f = r_2 \circ r_1^{-1}$.) Uočimo proizvoljnu krivu

$(a, b) \rightarrow \mathcal{U}$ zadatu sa $t \mapsto (u(t), v(t))$ i odgovarajuće krive α_1 i α_2 čiji tragovi pripadaju $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$, tj. $\alpha_1(t) = r_1(u(t), v(t))$, $\alpha_2(t) = r_2(u(t), v(t))$. Tada je

$$f(\alpha_1(t)) = f(r_1(u(t), v(t))) = r_2(u(t), v(t)) = \alpha_2(t).$$

Krive α_1 i α_2 imaju istu dužinu $\int_a^b \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2} dt$, pri čemu su E , F , G koeficijenti prve osnovne forme površi r_1 i r_2 .

Obratno, neka je $f : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ izometrija, pri čemu su $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ tragovi regularnih elementarnih površi $\tilde{r}_1 : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ i $\tilde{r}_2 : \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Odgovarajuće preslikavanje $\mathcal{F} : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{U}_2$ je bijektivno i glatko ($\mathcal{F} = \tilde{r}_2^{-1} \circ f \circ \tilde{r}_1$), sa glatkim inverzom, pa možemo definisati reparametrizaciju $r_2 : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ površi $\tilde{r}_2$ sa

$$r_2(u, v) = \tilde{r}_2(\mathcal{F}(u, v)), \quad (u, v) \in \mathcal{U}_1.$$

Neka je $r_1 = \tilde{r}_1$ i $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}$. Dokažimo da površi r_1 i r_2 imaju istu prvu osnovnu formu. Primitimo prvo da je

$$f(r_1(u, v)) = f(\tilde{r}_1(u, v)) = \tilde{r}_2(\mathcal{F}(u, v)) = r_2(u, v).$$

Slika proizvoljne krive $\alpha_1(t) = r_1(u(t), v(t)) \subset \mathcal{S}_1$ pri izometriji f je

$$f(\alpha_1(t)) = f(r_1(u(t), v(t))) = r_2(u(t), v(t)).$$

Kako su sužine ovih krivih iste, to je

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E_1(u')^2 + 2F_1u'v' + G_1(v')^2} dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E_2(u')^2 + 2F_2u'v' + G_2(v')^2} dt,$$

za sve $t_0, t_1 \in (a, b)$, pri čemu su E_1, F_1, G_1 koeficijenti prve osnovne forme površi r_1 , a E_2, F_2, G_2 koeficijenti prve osnovne forme površi r_2 . Tada je

$$E_1(u')^2 + 2F_1u'v' + G_1(v')^2 = E_2(u')^2 + 2F_2u'v' + G_2(v')^2. \quad (2.7)$$

Koristeći (2.7) za fiksirano $t_0 \in (a, b)$, $u_0 = u(t_0)$, $v_0 = v(t_0)$ i specijalne krive $t \mapsto (u(t), v(t))$, zaključujemo

1. za $u = u_0 + t - t_0$, $v = v_0$ sledi $E_1 = E_2$
2. za $u = u_0$, $v = v_0 + t - t_0$ sledi $G_1 = G_2$
3. za $u = u_0 + t - t_0$, $v = v_0 + t - t_0$ sledi $E_1 + 2F_1 + G_1 = E_2 + 2F_2 + G_2$, pa je $F_1 = F_2$.

□

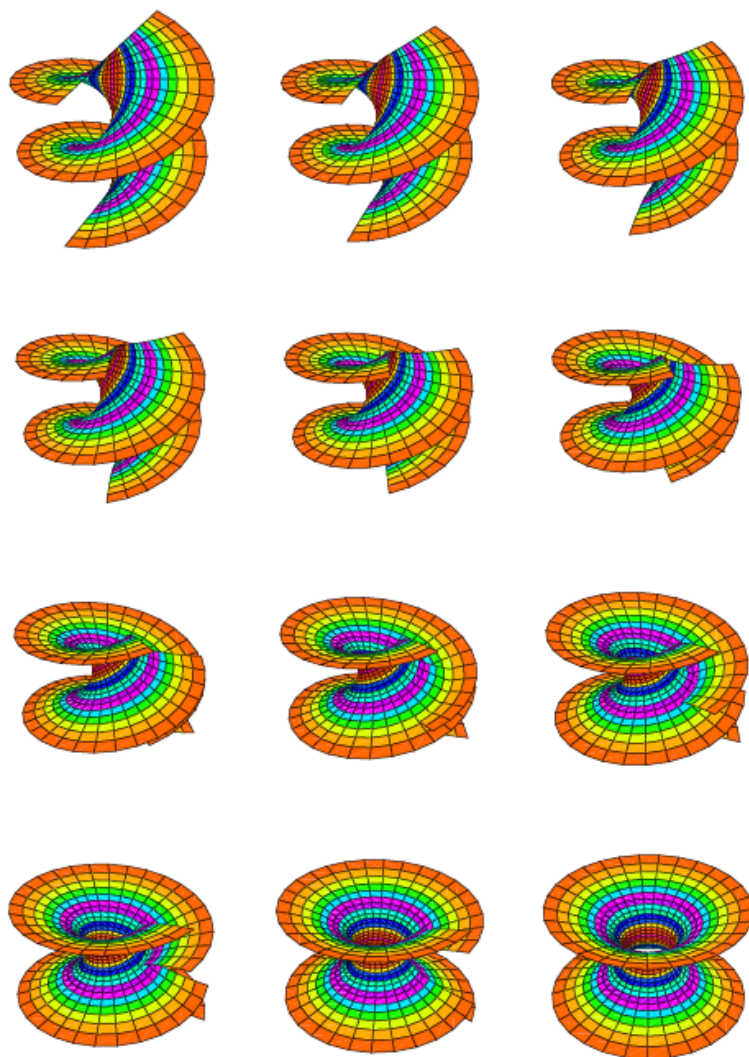
Primer 2.6. Površ $r(u, v) = \alpha(u) + v\alpha'(u)$ (tangentna površ) je izometrična (delu) ravni.

Primer 2.7. Helikoid i katenoid su lokalno izometrični. Dokaz sledi koristeći parametrizaciju helikoida navedenu u Primeru 2.3 i Teoremu 2.5.

Uočimo deformaciju

$$\mathcal{F}(t, u, v) = \cos t(\sinh v \sin u, -\sinh v \cos u, u) + \sin t(\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, v), \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Primetimo da je $\mathcal{F}(0, u, v) = (\sinh v \sin u, -\sinh v \cos u, u)$ parametrizacija helikoida (tj. reparametrizacija ... za $\phi(u, v) = (u - \frac{\pi}{2}, \sinh v)$) i $\mathcal{F}(\frac{\pi}{2}, u, v) = (\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, v)$ parametrizacija katenoida.



Koeficijenti prve i druge osnovne forme površi $\mathcal{F}$ su

$$E^{\mathcal{F}} = G^{\mathcal{F}} = \cosh^2 v, F^{\mathcal{F}} = 0, e^{\mathcal{F}} = -g^{\mathcal{F}} = \sin t, f^{\mathcal{F}} = 0.$$

Koristeći formulu (srednja krivina), zaključujemo da su površi $\mathcal{F}$ minimalne i lokalno izometrične helikoidu. Kako koeficijenti prve osnovne forme ne zavise od t , helikoid i katenoid su lokalno izometrični. Koeficijenti druge forme zavise od t , tj. smeštanje površi $\mathcal{F}$ zavisi od t .

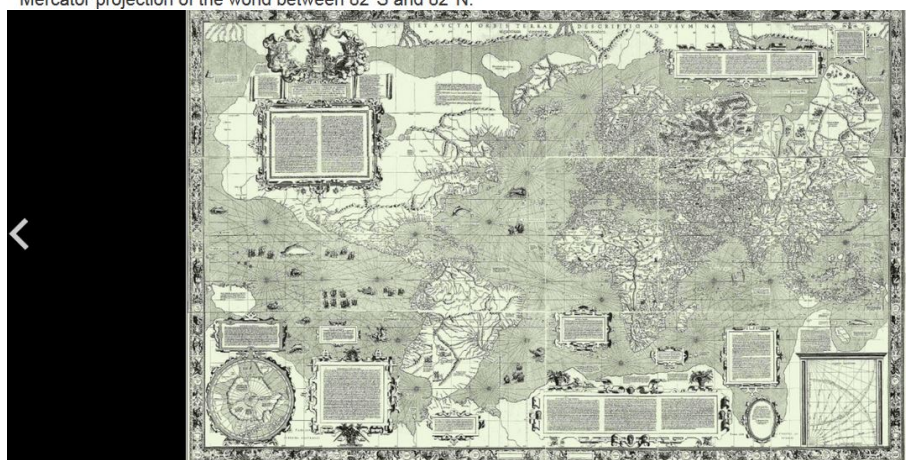
Primer 2.8. Dokazati da je cilindrična površ $r(u, v) = (u, f(u), v), (u, v) \in \mathbb{R}^2$, lokalno izometrična ravni (zadatak 41).

Primer 2.9. Dokazati da je konus $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ lokalno izometričan ravni (zadatak 42).

Primer 2.10. Proučiti primere sa ispitnih rokova jun 1 2013, jun 1 2014, jun 2 2014.



Mercator projection of the world between 82°S and 82°N.



Mercator world map (*Nova et Aucta Orbis Terrae Descriptio ad Usum Navigantium Emendate Accommodata* (1569) For higher resolution and coloured images see [Mercator 1569 world map](#). That page contains details of the map and translations of the texts

Archimedes-ova teorema

Posmatrajmo jediničnu sferu sa centrom u kooordinatnom početku i cilindar opisan oko nje, tj. sferu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ i cilindar $x^2 + y^2 = 1$. Za svaku tačku $P \neq (0, 0, \pm 1)$ sfere postoji tačno jedna prava paralelna xy -ravni koja sadrži tačku P i seče z -osu. Ova prava prodire cilindar u dve tačke, od kojih je tačka Q bliža. Uočimo preslikavanje $f : P \mapsto Q$ koje tačkama sfere ma ovaj način dodeljuje tačke cilindra. Tada je

$$f(x, y, z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z \right). \quad (2.8)$$

Teorema 2.6. (Archimedes) *Površina svakog dela sfere jednaka je površini nje-gove slike, na odgovarajućem cilindru, pri preslikavanju f definisanom relacijom (2.8).*

Dokaz.

$$r_1(\theta, \varphi) = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta), \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \varphi < 2\pi$$

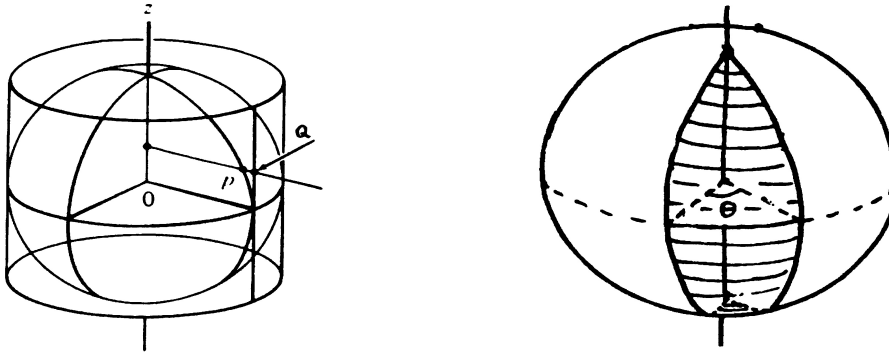
$$x^2 + y^2 = \cos^2 \theta$$

$$f(r_1(\theta, \varphi)) = (\cos \varphi, \sin \varphi, \sin \theta) = r^2(\theta, \varphi) = r_2(\mathcal{F}(\theta, \varphi)), \quad \mathcal{F} = Id$$

$$E_1 = 1, F_1 = 0, G_1 = \cos^2 \theta, \quad E_2 = \cos^2 \theta, F_2 = 0, G_2 = 1$$

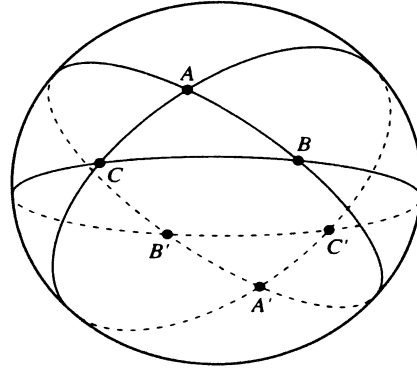
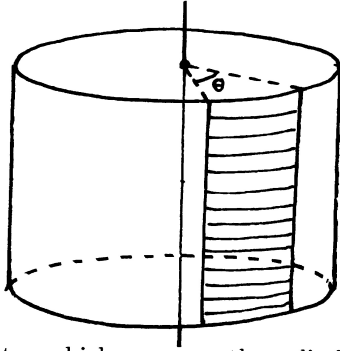
$$E_1 G_1 - F_1^2 = E_2 G_2 - F_2^2, \quad \mathcal{P}(r_1) = \mathcal{P}(r_2)$$

□



Posledica 2.3. *Površina sfernog isečka jedinične sfere čiji je ugao θ je 2θ .*

Neka su A, B, C tačke sfere takve da tačke A i B , B i C , A i C pripadaju presečnim krugovima sfere i ravni koje sadrže centar sfere (velikim krugovima). Trougao ABC čije stranice su delovi velikih krugova naziva se **sferni trougao**. Označimo sa $\angle A$ ugao trougla ABC kod temena A .



Teorema 2.7. *Neka je ABC sferni trougao jedinične sfere. Tada je površina ovog trougla jednaka $\angle A + \angle B + \angle C - \pi$.*

Preslikavanja koja čuvaju površinu

Definicija 2.13. *Neka su $r_1 : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ i $r_2 : \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ regularne elementarne površi čije su slike redom $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$. Difeomorfizam $f : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ "čuva površinu" ("equiareal") ukoliko za svaki podskup $\mathcal{T}$ od $\mathcal{S}_1$ važi $\mathcal{P}(\mathcal{T}) = \mathcal{P}(f(\mathcal{T}))$.*

Teorema 2.8. *Difeomorfizam $f : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ "čuva površinu" ako i samo ako za koeficijente prvih formi regularnih elementarnih površi $r_1 : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ i $r_2 : \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, čije su slike redom $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$, važi*

$$E_1 G_1 - F_1^2 = E_2 G_2 - F_2^2.$$

Bez dokaza.

Geodezijska preslikavanja

Definicija 2.14. *Neka su $r_1 : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ i $r_2 : \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ regularne elementarne površi čije su slike redom $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$. Difeomorfizam $f : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ je geodezijsko preslikavanje ukoliko preslikava trag geodezijske linije površi r_1 na trag geodezijske linije površi r_2 , tj. ukoliko "čuva geodezijske linije".*

Za definiciju geodezijskih linija pogledati ... Više detalja se može naći u R. Mutavdžić, Geodezijska preslikavanja, master rad, Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet, 2013.

2.4 Druga osnovna forma

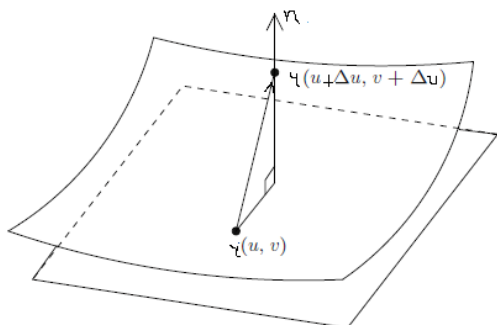
Taylor-ova formula za funkciju dve promenljive $r(u, v)$ je

$$\begin{aligned} r(u + \Delta u, v + \Delta v) - r(u, v) &= \Delta u r_u + \Delta v r_v \\ &+ \frac{1}{2} ((\Delta u)^2 r_{uu} + 2\Delta u \Delta v r_{uv} + (\Delta v)^2 r_{vv}) + \dots \end{aligned}$$

Imajući u vidu da je projekcija vektora $r(u + \Delta u, v + \Delta v) - r(u, v)$ na vektor n normale na površ, tj. odstupanje površi r od njene tangentne ravni, upravo $\langle r(u + \Delta u, v + \Delta v) - r(u, v), n \rangle$, sledi

$$\begin{aligned} \langle r(u + \Delta u, v + \Delta v) - r(u, v), n \rangle &\sim \frac{1}{2} ((\Delta u)^2 \langle r_{uu}, n \rangle \\ &+ 2\Delta u \Delta v \langle r_{uv}, n \rangle + (\Delta v)^2 \langle r_{vv}, n \rangle). \end{aligned}$$

Podsetimo se da je odstupanje krive α od njene tangentne linije $\frac{1}{2}\kappa(\Delta t)^2 + \dots$



Definicija 2.15. Koeficijenti druge osnovne (fundamentalne) forme regularne elementarne površi $r : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ su funkcije definisane na $\mathcal{U}$ sa:

$$\begin{aligned} e(u, v) &= \langle r_{uu}(u, v), n(u, v) \rangle, \\ f(u, v) &= \langle r_{uv}(u, v), n(u, v) \rangle, \\ g(u, v) &= \langle r_{vv}(u, v), n(u, v) \rangle. \end{aligned}$$

Kako je $\langle r_u(u, v), n(u, v) \rangle = 0$, to je $\langle r_{uu}(u, v), n(u, v) \rangle + \langle r_u(u, v), n_u(u, v) \rangle = 0$, pa je $\langle r_{uu}(u, v), n(u, v) \rangle = -\langle r_u(u, v), n_u(u, v) \rangle$. Slično je i za ostale slučajeve, pa je

$$\begin{aligned} e(u, v) &= -\langle r_u(u, v), n_u(u, v) \rangle, \\ f(u, v) &= -\langle r_u(u, v), n_v(u, v) \rangle = -\langle r_v(u, v), n_u(u, v) \rangle, \\ g(u, v) &= -\langle r_v(u, v), n_v(u, v) \rangle. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Ponekad se umesto oznaka e, f, g koriste oznake L, M, N .

Često se druga osnovna forma definiše kao bilinearna forma

$$\begin{aligned}\mathcal{II}(X(u, v), Y(u, v)) &= X_1(u, v)Y_1(u, v)e(u, v) \\ &+ (X_1(u, v)Y_2(u, v) + X_2(u, v)Y_1(u, v))f(u, v) \\ &+ X_2(u, v)Y_2(u, v)g(u, v),\end{aligned}$$

pri čemu su, koristeći Tvrdjenje 2.2, $X(u, v) = X_1(u, v)r_u(u, v) + X_2(u, v)r_v(u, v)$ i $Y(u, v) = Y_1(u, v)r_u(u, v) + Y_2(u, v)r_v(u, v)$ tangenta vektorska polja površi r .

Da li su koeficijenti druge osnovne forme geometrijski pojmovi?

Uputstvo:

$$r^1 = r^1(u_1, v_1), e, f, g \quad r^2 = r^2(u_2, v_2), \tilde{e}, \tilde{f}, \tilde{g}$$

$$r^2 = r^1 \circ \phi, \quad \phi(u_2, v_2) = (\phi_1(u_2, v_2), \phi_2(u_2, v_2))$$

$$\mathcal{J}(\phi)(u_2, v_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u_2} & \frac{\partial \phi_1}{\partial v_2} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial u_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial v_2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{e} & \tilde{f} \\ \tilde{f} & \tilde{g} \end{bmatrix} = \pm \mathcal{J}^t(\phi) \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \mathcal{J}(\phi)$$

Izračunati koeficijente druge osnovne forme ravni, sfere, cilindra, konusa, helikoida, ... (poglavlje 3.4).

Ukoliko su koeficijenti druge osnovne forme elementarne površi $r : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ jednaki nula za svako $(u, v) \in \mathcal{U}$, površ je deo ravni.

Uputstvo: Dokazati da je $n_u, n_v \perp T(r)$, tj. $n_u, n_v \perp r_u, r_v$.

Neka je $r : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ regularna elementarna površ. Imajući u vidu da $[r_u, r_v, n]$ čini bazu $\mathbb{R}^3$, izrazimo r_{uu}, r_{uv}, r_{vv} u ovoj bazi. Koristeći Definiciju 2.15 sledi da su koeficijenti uz n redom e, f, g . Dodatni koeficijenti, koji određuju komponente r_{uu}, r_{uv}, r_{vv} u tangentnom prostoru, imaju veliku primenu i nazivaju se **Christoffel-ovi simboli (druge vrste)** površi r . Ovi koeficijenti zavise samo od koeficijenata prve osnovne forme i označavaju se sa $\Gamma_{11}^1, \Gamma_{12}^1, \dots$ ili $\Gamma_{uu}^u, \Gamma_{uv}^u, \dots$, imajući u vidu da se često koriste oznake $r_u = r_1, r_v = r_2$. Prateći oznake u formuli (2.14), jasno je kako su izabrani indeksi.

Definicija 2.16. Neka je $r : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ regularna elementarna površ. Christoffel-ovi simboli površi r su funkcije $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k(u, v)$ definisane sa

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}, \quad \Gamma_{12}^1 = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)}, \quad \Gamma_{22}^1 = \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)} \quad (2.10)$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)} \quad (2.11)$$

$$i \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{12}^1, \quad \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2.$$

Tvrđenje 2.5. Ukoliko je $F = 0$, formule za Christoffel-ove simbole druge vrste su:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{E_u}{2E}, \quad \Gamma_{12}^1 = \frac{E_v}{2E}, \quad \Gamma_{22}^1 = \frac{-G_u}{2E} \quad (2.12)$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{-E_v}{2G}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{G_u}{2G}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{G_v}{2G}. \quad (2.13)$$

Odrediti Christoffel-ove simbole za nekoliko površi.

Ravan Ukoliko je $r(u, v) = r_0 + up + vq$, $-\infty < u, v < +\infty$, pri čemu su p i q ortogonalni i jedinični vektori, tada je $E = 1, F = 0, G = 1$. Koristeći formule (2.12) dobija se $\Gamma_{ij}^k = 0$, $i, j, k \in \{1, 2\}$.

Ukoliko je $r(\rho, \phi) = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, 0)$, $0 \leq \rho < +\infty, 0 \leq \phi < 2\pi$, tada je $E = 1, F = 0, G = \rho^2$, pa je $\Gamma_{22}^1 = -u, \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{u}$, ostali su 0.

Kružni cilindar $r(u, v) = (R \cos u, R \sin u, v)$, $0 \leq u < 2\pi, -\infty < v < +\infty$, $E = R^2, F = 0, G = 1, \Gamma_{ij}^k = 0$.

Rotacione površi $r(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$, $f_u^2 + g_u^2 = 1, f > 0$, $E = f_u^2 + g_u^2 = 1, F = 0, G = f^2(u), \Gamma_{22}^1 = -\frac{G_u}{2E} = -ff', \Gamma_{12}^2 = \frac{G_u}{2G} = \frac{f'}{f}$, preostali su jednaki 0.

Sfera $r(u, v) = (R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, R \sin u)$, $-\frac{\pi}{2} \leq u < \frac{\pi}{2}, 0 \leq v \leq 2\pi$, $E = R^2, F = 0, G = R^2 \cos^2 u, \Gamma_{22}^1 = \sin u \cos u, \Gamma_{12}^2 = -\tan u$.

2.5 Gauss-ove i Weingarten-ove formule

Gauss-ove formule

$$\begin{aligned} r_{uu} &= \Gamma_{11}^1 r_u + \Gamma_{11}^2 r_v + en, \\ r_{uv} &= \Gamma_{12}^1 r_u + \Gamma_{12}^2 r_v + fn, \\ r_{vv} &= \Gamma_{22}^1 r_u + \Gamma_{22}^2 r_v + gn. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Weingarten-ove formule

$$\begin{aligned} n_u &= \beta_1^1 r_u + \beta_1^2 r_v, \\ n_v &= \beta_2^1 r_u + \beta_2^2 r_v, \end{aligned} \quad (2.15)$$

pri čemu je

$$\beta_1^1 = \frac{fF - eG}{EG - F^2}, \quad \beta_1^2 = \frac{eF - fE}{EG - F^2}, \quad (2.16)$$

$$\beta_2^1 = \frac{gF - fG}{EG - F^2}, \quad \beta_2^2 = \frac{fF - gE}{EG - F^2}. \quad (2.17)$$

U literaturi su ove formule poznate i kao Gauss-ove i Weingarten-ove jednačine ili kao osnovne (fundamentalne) jednačine površi.

Teorema 2.9. *Neka je $r : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ regularna elementarna površ i n vektorsko polje normala površi r . Tada važe Gauss-ove i Weingarten-ove formule.*

Dokaz. S obzirom da je r regularna površ, r_u , r_v i n čine bazu za $\mathbb{R}_P^3$ u svakoj tački $P \in r(\mathcal{U})$, možemo zapisati

$$\begin{aligned} r_{uu} &= \alpha_1 r_u + \alpha_2 r_v + \alpha_3 n, \\ r_{uv} &= \beta_1 r_u + \beta_2 r_v + \beta_3 n, \\ r_{vv} &= \gamma_1 r_u + \gamma_2 r_v + \gamma_3 n. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Množeći jednačine sistema (2.18) skalarno sa n dobija se $\alpha_3 = e$, $\beta_3 = f$, $\gamma_3 = g$. Množeći prvu jednačinu sistema (2.18) skalarno sa r_u i r_v dobija se

$$\begin{aligned} \alpha_1 E + \alpha_2 F &= \langle r_{uu}, r_u \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \|r_u\|^2 = \frac{E_u}{2}, \\ \alpha_1 F + \alpha_2 G &= \langle r_{uu}, r_v \rangle = \frac{\partial}{\partial u} \langle r_u, r_v \rangle - \langle r_u, r_{uv} \rangle = F_u - \frac{E_v}{2}. \end{aligned}$$

Rešavajući ovaj sistem po α_1 i α_2 sledi $\alpha_1 = \Gamma_{11}^1$ i $\alpha_2 = \Gamma_{11}^2$.

Ostali koeficijenti $(\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2)$ se dobijaju na sličan način.

U jednačinama (2.15) koeficijenti uz n su 0 jer je $\|n\| = 1$, pa je $\langle n, n_u \rangle = \langle n, n_v \rangle = 0$. Odredimo koeficijente β_i^j u jednačinama (2.15). Množeći prvu jednačinu skalarno redom sa r_u, r_v , dobija se

$$\begin{aligned}\langle n_u, r_u \rangle &= \beta_1^1 \langle r_u, r_u \rangle + \beta_1^2 \langle r_v, r_u \rangle, \\ \langle n_u, r_v \rangle &= \beta_1^1 \langle r_u, r_v \rangle + \beta_1^2 \langle r_v, r_v \rangle.\end{aligned}$$

Koristeći (2.9), sledi

$$\begin{aligned}-e &= \beta_1^1 E + \beta_1^2 F, \\ -f &= \beta_1^1 F + \beta_1^2 G.\end{aligned}$$

Rešavajući ovaj sistem po β_1^1, β_1^2 , dobija se

$$\beta_1^1 = \frac{fF - eG}{EG - F^2}, \quad \beta_1^2 = \frac{eF - fE}{EG - F^2}.$$

Slično se dobijaju i izrazi za β_2^1 i β_2^2 . Primetimo da je $EG - F^2 > 0$. $\square$

Primedba 2.2. Formule $r_{vu} = \Gamma_{21}^1 r_u + \Gamma_{21}^2 r_v + fn = r_{uv} = \Gamma_{12}^1 r_u + \Gamma_{12}^2 r_v + fn$ su opravdanje za $\Gamma_{21}^1 = \Gamma_{12}^1$ i $\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2$ u Definiciji 2.16.

Tvrđenje 2.6. Neka je $r : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ regularna elementarna površ i n vektorsko polje normala površi r . Tada važi

$$n_u \times n_v = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} r_u \times r_v. \quad (2.19)$$

Dokaz. Koristeći (2.15) dobija se $n_u \times n_v = (\beta_1^1 \beta_2^2 - \beta_1^2 \beta_2^1) r_u \times r_v$. Primenjujući (2.16)-(2.17), dobija se $\beta_1^1 \beta_2^2 - \beta_1^2 \beta_2^1 = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$. $\square$

Primer 2.11. Napisati Gauss-ove i Weingarten-ove formule za *rotacionu površ*

$$r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, g(u)), \quad u > 0.$$

$$r_u(u, v) = (\cos v, \sin v, g'(u)), \quad r_v(u, v) = (-u \sin v, u \cos v, 0),$$

$$n(u, v) = -\frac{1}{\sqrt{1 + g'^2}}(g' \cos v, g' \sin v, -1),$$

$$r_{uu} = (0, 0, g''), \quad r_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0), \quad r_{vv} = (-u \cos v, -u \sin v, 0),$$

$$E = 1 + g'^2, \quad F = 0, \quad G = u^2,$$

$$e = \frac{g''}{\sqrt{1 + g'^2}}, \quad f = 0, \quad g = u \frac{g'}{\sqrt{1 + g'^2}},$$

$$\beta_1^1 = -\frac{g''}{(1 + g'^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \beta_1^2 = \beta_2^1 = 0, \quad \beta_2^2 = -\frac{g'}{u \sqrt{1 + g'^2}},$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{g'g''}{1 + g'^2}, \quad \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^1, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{u}, \quad \Gamma_{22}^2 = -\frac{u}{1 + g'^2}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 r_u + \Gamma_{11}^2 r_v + e n &= \frac{g' g''}{1 + g'^2} r_u + \frac{g''}{\sqrt{1 + g'^2}} n = (0, 0, g'') = r_{uu}, \\
\Gamma_{12}^1 r_u + \Gamma_{12}^2 r_v + f n &= \frac{1}{u} r_v = (-\sin v, \cos v, 0) = r_{uv}, \\
\Gamma_{22}^1 r_u + \Gamma_{22}^2 r_v + g n &= -\frac{u}{1 + g'^2} r_u + u \frac{g'}{\sqrt{1 + g'^2}} n = (-u \cos v, -u \sin v, 0) = r_{vv}, \\
\beta_1^1 r_u + \beta_1^2 r_v &= -\frac{g''}{(1 + g'^2)^{\frac{3}{2}}} r_u = -\frac{g''}{(1 + g'^2)^{\frac{3}{2}}} (\cos v, \sin v, g') = n_u, \\
\beta_2^1 r_u + \beta_2^2 r_v &= -\frac{1}{u} \frac{g'}{\sqrt{1 + g'^2}} r_v = \frac{g'}{\sqrt{1 + g'^2}} (\sin v, -\cos v, 0) = n_v.
\end{aligned}$$

Gauss-ove i Weingarten-ove formule možemo zapisati u obliku:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u} \begin{bmatrix} r_u(u, v) \\ r_v(u, v) \\ n(u, v) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Gamma_{11}^1(u, v) & \Gamma_{12}^1(u, v) & e(u, v) \\ \Gamma_{12}^1(u, v) & \Gamma_{22}^1(u, v) & f(u, v) \\ \beta_1^1(u, v) & \beta_1^2(u, v) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_u(u, v) \\ r_v(u, v) \\ n(u, v) \end{bmatrix}, \\
\frac{\partial}{\partial v} \begin{bmatrix} r_u(u, v) \\ r_v(u, v) \\ n(u, v) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Gamma_{21}^1(u, v) & \Gamma_{22}^1(u, v) & f(u, v) \\ \Gamma_{12}^2(u, v) & \Gamma_{22}^2(u, v) & g(u, v) \\ \beta_2^1(u, v) & \beta_2^2(u, v) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_u(u, v) \\ r_v(u, v) \\ n(u, v) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Primetimo da se Frenet-Serret-ove formule (1.14) mogu zapisati u obliku

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} T(t) \\ N(t) \\ B(t) \end{bmatrix} = v(t) \begin{bmatrix} 0 & \kappa(t) & 0 \\ -\kappa(t) & 0 & \tau(t) \\ 0 & -\tau(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(t) \\ N(t) \\ B(t) \end{bmatrix}.$$

Promena Frenet-ove baze $[T(t), N(t), B(t)]$ duž krive α opisana je Frenet-Serret-ovim formulama, koristeći krivinu i torziju krive α . Teorema 1.7 i Teorema 1.8 prikazuju ulogu krivine i torzije u opisivanju geometrije krive α . Promena Gauss-ove baze $[r_u(u, v), r_v(u, v), n(u, v)]$ je data Gauss-ovim i Weingarten-ovim formulama, koristeći koeficijente prve i druge osnovne forme i njihove izvode. Da li koeficijenti prve i druge osnovne forme imaju sličnu ulogu u izučavanju geometrije površi, kao krivina i torzija u izučavanju geometrije krivih? Videti Teoremu 2.13. Da li su koeficijenti $E(u, v), F(u, v), \dots, g(u, v)$ nezavisni?

Teorema 2.10. Codazzi-jeve jednačine

Neka je $r : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ regularna elementarna površ. Tada je

$$e_v - f_u = e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2, \quad (2.20)$$

$$f_v - g_u = e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2. \quad (2.21)$$

Ove jednačine se često nazivaju i Codazzi-Mainardi-jeve jednačine ili Peterson–Codazzi-jeve jednačine. Termin "jednačine" je izabran zbog Teoreme 2.13...

Ukoliko je $F = 0 = f$, Codazzi-jeve jednačine su:

$$e_v = \frac{E_v}{2} \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right), \quad g_u = \frac{G_u}{2} \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right).$$

Dokaz. Ideja dokaza je da se diferenciraju formule (2.14) i koriste činjenice da je $(r_{uu})_v = (r_{uv})_u$ i $(r_{uv})_v = (r_{vv})_u$. Dakle, iz prve dve formule sledi

$$(\Gamma_{11}^1 r_u + \Gamma_{11}^2 r_v + en)_v = (\Gamma_{12}^1 r_u + \Gamma_{12}^2 r_v + fn)_u.$$

Koristeći (2.14) i (2.15) i množeći skalarno sa n , dobija se (2.20). $\square$

Teorema 2.11. Gauss-ove jednačine

Neka je $r : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ regularna elementarna površ. Tada je

$$EK = (\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - (\Gamma_{12}^2)^2, \quad (2.22)$$

$$FK = (\Gamma_{12}^1)_u - (\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1, \quad (2.23)$$

$$= (\Gamma_{12}^2)_v - (\Gamma_{22}^2)_u + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^2, \quad (2.24)$$

$$GK = (\Gamma_{22}^1)_u - (\Gamma_{12}^1)_v + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 - (\Gamma_{12}^1)^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^1, \quad (2.25)$$

pri čemu je $K = \frac{eg-f^2}{EG-F^2}$.

Dokaz. S obzirom da je

$$(r_{uu})_v = (r_{uv})_u, \quad (r_{uv})_v = (r_{vv})_u, \quad (n_u)_v = (n_v)_u,$$

koristeći (2.14) i (2.15), dobija se sistem jednačina čije su jednačine oblika $Ar_u + Br_v + Cn = 0$. Koristeći činjenicu da vektorska polja r_u, r_v, n čine bazu, dobijaju se jednačine (2.22)-(2.25). Na primer, za (2.22) se koristi koeficijent uz r_v u $(r_{uu})_v = (r_{uv})_u$. Preostale jednačine su posledice ovih. $\square$

Teorema 2.12. *Neka su $r : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ i $\tilde{r} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ elementarne regularne površi sa istom prvom i drugom osnovnom formom. Tada postoji direktna izometrija σ prostora $\mathbb{R}^3$ takva da je $\tilde{r} = \sigma(r)$.*

Šta mozemo reći o površima koje imaju istu samo prvu osnovnu formu?

Teorema 2.13. Osnovna teorema za površi, (O. Bonnet) *Neka su $E, F, G, e, f, g : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ koeficijenti dve osnovne forme, $\mathcal{I}$ i $\mathcal{II}$, na otvorenom skupu $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$, pri čemu je prva pozitivno definitna. Ako su za ove koeficijente zadovoljene Gauss-ove i Codazzi-jeve jednačine, tada postoji jedinstvena, do na izometriju prostora $\mathbb{R}^3$, površ za koju su $\mathcal{I}$ i $\mathcal{II}$ prva i druga osnovna forma.*

Naime, dato je šest funkcija $E, F, G, e, f, g : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ koje zadovoljavaju uslove...
Napomena: $\mathcal{I}$ je pozitivno definitna ukoliko je $E > 0, G > 0, EG - F^2 > 0$.

Primer 2.12. Odrediti površ čiji su koeficijenti prve i druge forme: $E = 1, F = 0, G = \cos^2 u, e = 1, f = 0, g = \cos^2 u, -\frac{\pi}{2} \leq u < \frac{\pi}{2}$.

Koeficijenti zadovoljavaju Gauss-ove i Codazzi-jeve jednačine i $E > 0, G > 0, EG - F^2 > 0$.

Koristeći (2.10) i (2.16)-(2.17) dobija se $\beta_1^1 = -1 = \beta_2^2, \beta_1^2 = 0 = \beta_2^1, \Gamma_{22}^1 = \sin u \cos u, \Gamma_{12}^2 = -\tan u$, ostali Γ_{ij}^k su 0. Dakle, Gauss-ove i Weingarten-ove formule, (2.14) i (2.15), su:

$$\begin{aligned} r_{uu} &= n, \\ r_{uv} &= -\tan u r_v, \\ r_{vv} &= \sin u \cos u r_u + \cos^2 u n, \\ n_u &= -r_u, \\ n_v &= -r_v. \end{aligned}$$

Oдавде sledi

$$r_{uuu} = (r_{uu})_u = n_u = -r_u.$$

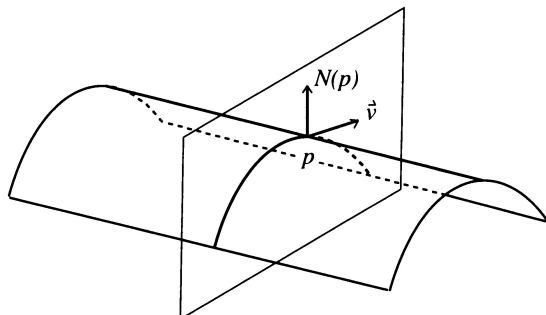
Rešavajući jednačinu $r_{uuu} + r_u = 0$, dobija se $r_u = a \sin u + b \cos u$, pa je

$$r(u, v) = a(v) \sin u + b(v) \cos u + c(v) \quad (2.26)$$

pri čemu su a, b, c diferencijabilne funkcije koje zavise samo od v . Uputstvo: Dokazati da je $r(u, v)$ parametrizacija jedinične sfere sa centrom u c . Prvo dokazati da važi $b, c \in \mathbb{R}^3, a(v) = d \cos v + e \sin v, d, e \in \mathbb{R}^3$, a zatim izračunati $\|r(u, v) - c\|^2$ i dokazati da su b, d, e jedinični i ortogonalni.

$$\begin{aligned} \|r(u, v) - c\|^2 &= \langle d, d \rangle \cos^2 v \sin^2 u + 2 \langle d, e \rangle \cos v \sin v \sin^2 u + \dots + \langle b, b \rangle \cos^2 u \\ \langle r_v, r_v \rangle &= G = \sin^2 u = \langle d, d \rangle \sin^2 v - 2 \langle d, e \rangle \sin v \cos v \sin^2 u \\ &+ \langle e, e \rangle \cos^2 v \sin^2 u \Rightarrow \langle e, e \rangle = \langle d, d \rangle = 1, \langle d, e \rangle = 0 \end{aligned}$$

2.6 Normalna i geodezijska krivina krivih na površi

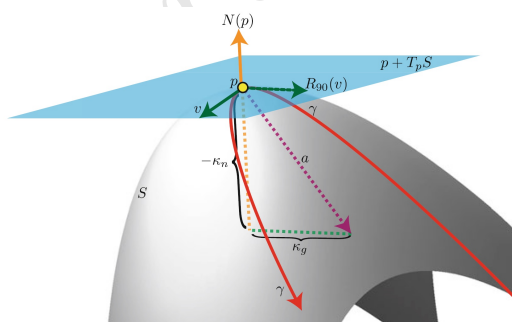


Neka je α regularna prirodno parametrizovana kriva čija slika pripada tragu regularne elementarne površi r . Posmatrajmo Frenet-Serret-ov reper $[T, N, B]$ krive α , njenu krivinu κ i vektorsko polje normala n površi r duž krive α . **Vektorsko polje unutrašnjih normala** duž krive α površi r je $S(s) = n(s) \times T(s)$. Koristeći razlaganje $\alpha''(s) = (\alpha''(s))^{norm} + (\alpha''(s))^{tang}$, dobija se:

$$\alpha''(s) = \kappa_n(s) n(s) + \kappa_g(s) S(s). \quad (2.27)$$

Definicija 2.17. Neka je $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ regularna prirodno parametrizovana kriva čiji trag pripada tragu elementarne površi r . **Normalna krivina** krive α je funkcija $\kappa_n : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $\kappa_n(s) = \langle \alpha''(s), n(s) \rangle$. **Geodezijska krivina** krive α je funkcija $\kappa_g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $\kappa_g(s) = \langle \alpha''(s), S(s) \rangle$. Normalna i geodezijska krivina regularne krive α proizvoljne brzine, čija slika pripada tragu regularne elementarne površi r , su redom normalna i geodezijska krivina njene prirodne reparametrizacije.

Primedba 2.3. Za eksplicitne formule za izračunavanje normalne i geodezijske krivine krivih proizvoljne brzine videti Tvrdjenje 2.10 i Tvrdjenje 2.12.



Primer 2.13. Posmatrajmo jediničnu sferu $r(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$ i koordinatnu liniju $u = \frac{\pi}{4}$. Izračunati normalnu i geodezijsku krivinu ove krive u tački $P \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$.

$$r(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u),$$

$$u = \frac{\pi}{4}, \gamma(v) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos v, \sin v, 1),$$

$$\gamma'(v) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\sin v, \cos v, 0), \|\gamma'\| = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\gamma(s) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \sqrt{2}s, \sin \sqrt{2}s, 1),$$

$$\gamma'(s) = T(s) = (-\sin \sqrt{2}s, \cos \sqrt{2}s, 0),$$

$$T'(s) = (-\sqrt{2} \cos \sqrt{2}s, -\sqrt{2} \sin \sqrt{2}s, 0),$$

$$\kappa(s) = \|T'(s)\| = \sqrt{2},$$

$$N(s) = \frac{T'(s)}{\kappa(s)} = (-\cos \sqrt{2}s, -\sin \sqrt{2}s, 0),$$

$$s = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, P = \gamma\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right) = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$N_P = (0, -1, 0),$$

$$r_u = (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u), r_v = (-\cos u \sin v, \cos u \cos v, 0),$$

$$r_u \times r_v = (-\cos^2 u \cos v, -\cos^2 u \sin v, -\sin u \cos u), \|r_u \times r_v\| = \cos u,$$

$$n = \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|} = (-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, -\sin u) = -r(u, v),$$

$$n_P\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), N_P \neq n_P,$$

$$S = n \times T = (\cos v \sin u, \sin u \sin v, -\cos u), S_P = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$\gamma''(s) = T'(s) = (-\sqrt{2} \cos \sqrt{2}s, -\sqrt{2} \sin \sqrt{2}s, 0), \gamma''_P = (0, -\sqrt{2}, 0),$$

$$\kappa N = \gamma'' = \kappa_n n + \kappa_g S,$$

$$\sqrt{2}(0, -1, 0) = (0, -\sqrt{2}, 0) = \kappa_n \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \kappa_g \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$-\sqrt{2} = -\kappa_n \frac{\sqrt{2}}{2} + \kappa_g \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad 0 = -\kappa_n \frac{\sqrt{2}}{2} - \kappa_g \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\kappa_n(P) = 1, \kappa_g(P) = -1$$

Normalna i geodezijska krivina se mogu izračunati i koristeći Definiciju 2.17:

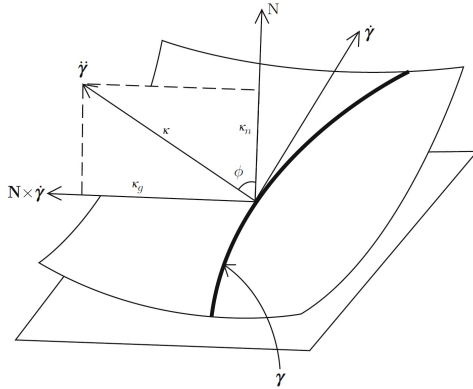
$$\kappa_n(P) = \langle \gamma''(P), n(P) \rangle = \langle -\sqrt{2}(0, 1, 0), -\frac{\sqrt{2}}{2}(0, 1, 1) \rangle = 1$$

$$\kappa_g(P) = \langle \gamma''(P), S(P) \rangle = \langle -\sqrt{2}(0, 1, 0), \frac{\sqrt{2}}{2}(0, 1, -1) \rangle = -1$$

Tvrđenje 2.7. Za normalnu i geodezijsku krivinu prirodno parametrizovane krive α čiji trag pripada tragu elementarne površi r važi:

1. $\kappa^2(s) = \kappa_n^2(s) + \kappa_g^2(s)$,
2. $\kappa_n(s) = \kappa(s) \cos \theta(s)$, $\theta(s) = \angle(n(s), N(s))$,
3. $\kappa_g(s) = \kappa(s) \cos \alpha(s)$, $\alpha(s) = \angle(n(s), B(s))$,
4. $\kappa_g(s) = \pm \kappa(s) \sin \theta(s)$, $\theta(s) = \angle(n(s), N(s))$.

Uputstvo: Za $\kappa(s) \neq 0$, $\kappa(s)N(s) = T'(s) = \alpha''(s) = \kappa_n(s)n(s) + \kappa_g(s)S(s)$.
 $\langle \kappa(s)N(s), \kappa(s)N(s) \rangle = \langle \kappa_n(s)n(s) + \kappa_g(s)S(s), \kappa_n(s)n(s) + \kappa_g(s)S(s) \rangle = \langle \kappa(s)N(s), n(s) \rangle = \langle \kappa_n(s)n(s), n(s) \rangle + \langle \kappa_g(s)S(s), n(s) \rangle$.

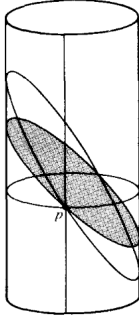


Tvrđenje 2.8. 1. Normalna krivina ravanskih krivih je nula i za njih važi i $\kappa_g = \kappa$.

2. Geodezijska krivina normalnih sečenja je nula i za njih važi i $\kappa_n = \pm \kappa$.

3. Normalna krivina sfernih krivih je konstantna (i jednaka $\pm \frac{1}{R}$ za sfere poluprečnika R).

Normalno sečenje u nekoj tački M površi je kriva koja je određena kao presek površi i ravni koja sadrži tačku M i normalna je na površ u tački M .



1. Bez umanjena opštosti(...), pretpostavimo da je trag ravni upravo xOy ravan (određena tačkom $O(0,0,0)$ i vektorima $(1,0,0)$ i $(0,1,0)$) parametrizovana sa $r(u,v) = (u,v,0)$. Tada za krivu α čiji trag pripada uočenoj ravni postoje f-je α_1, α_2 takve da je $\alpha(s) = r(\alpha_1(s), \alpha_2(s)) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), 0)$, pri čemu smo (koristeći Lemu ...) pretpostavili da je kriva α prirodno parametrizovana. Tada je:

$$\begin{aligned} n(u,v) &= (0,0,1) \\ T(s) &= \alpha'(s) = (\alpha'_1(s), \alpha'_2(s), 0) \\ N(s) &= (-\alpha'_2(s), \alpha'_1(s), 0) \\ B(s) &= T(s) \times N(s) = (0,0,1) \end{aligned}$$

$$\kappa_g(s) = \kappa(s) < B(s), n(s) > = \kappa(s), \quad \kappa_n(s) = 0.$$

2. Ravan koja sadrži tačku P i normalna je na površ u tački P određena tačkom P i vektorima $n(P)$ i $v = T(P)$. Kako trag krive pripada ravni, to $T, N \in \mathcal{L}\{n, T\}$. S obzirom da je $N \perp T$, sledi da su vektori n i N kolinearni, pa je $\cos \angle(n, N) = \pm 1$.

Teorema 2.14. *Neka je α regularna prirodno parametrizovana kriva čiji trag pripada tragu $r(\mathcal{U})$ regularne elementarne površi $r : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Tada je*

$$\begin{aligned} \kappa_n(s) &= e(u(s), v(s))(u'(s))^2 + 2f(u(s), v(s))u'(s)v'(s) + g(u(s), v(s))(v'(s))^2, \\ &= \mathcal{II}(\alpha'(s), \alpha'(s)) \end{aligned} \tag{2.28}$$

$$\begin{aligned} \kappa_g(s)S(s) &= (\Gamma_{11}^1(u')^2 + 2\Gamma_{12}^1u'v' + \Gamma_{22}^1(v')^2 + u'')r_u \\ &+ (\Gamma_{11}^2(u')^2 + 2\Gamma_{12}^2u'v' + \Gamma_{22}^2(v')^2 + v'')r_v. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Dokaz. Neka je $\alpha(s)$ kriva jedinične brzine čija slika pripada tragu elementarne regularne površi $r : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Tada postoje funkcije $u, v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tako da važi

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= r(u(s), v(s)) \\ \alpha'(s) &= r_u(u(s), v(s))u'(s) + r_v(u(s), v(s))v'(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha''(s) &= r_{uu}(u')^2 + 2r_{uv}u'v' + r_{vv}(v')^2 + r_u u'' + r_v v'' \\
&= (\Gamma_{11}^1 r_u + \Gamma_{11}^2 r_v + en)(u')^2 \\
&+ 2(\Gamma_{12}^1 r_u + \Gamma_{12}^2 r_v + fn)u'v' + (\Gamma_{22}^1 r_u + \Gamma_{22}^2 r_v + gn)(v')^2 + r_u u'' + r_v v'' \\
&= (\Gamma_{11}^1 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1 (v')^2 + u'') r_u \\
&+ (\Gamma_{11}^2 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 (v')^2 + v'') r_v + (e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2) n \\
&= \kappa_g(s)S(s) + \kappa_n(s)n(s) \\
\kappa_n(s) &= \langle \alpha''(s), n(s) \rangle = e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2 = \mathcal{II}(\alpha', \alpha')
\end{aligned}$$

□

Tvrđenje 2.9. Neka je $\alpha(s)$ kriva jedinične brzine čija slika pripada tragu elementarne regularne površi $r : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$, tj. $\alpha(s) = r(u(s), v(s))$ za neke funkcije u, v . Tada je

$$\begin{aligned}
\kappa_g(s) &= [\Gamma_{11}^2 (u')^3 + (2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1)(u')^2 v' \\
&+ (\Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1)u'(v')^2 - \Gamma_{22}^1 (v')^3 + u'v'' - u''v'] \sqrt{EG - F^2}. \quad (2.30)
\end{aligned}$$

Dokaz.

$$S(s) = n(s) \times \alpha'(s) = n(s) \times (u'r_u + v'r_v) = u'n \times r_u + v'n \times r_v$$

$$\begin{aligned}
\kappa_g(s) &= \langle \alpha''(s), S(s) \rangle \\
&= \langle Ar_u + Br_v + Cn, u'n \times r_u + v'n \times r_v \rangle \\
&= [\Gamma_{11}^1 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1 (v')^2 + u'']v' \langle r_u, n \times r_v \rangle \\
&+ [\Gamma_{11}^2 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 (v')^2 + v'']u' \langle r_v, n \times r_u \rangle \\
&= [\Gamma_{11}^2 (u')^3 + (2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1)(u')^2 v' \\
&+ (\Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1)u'(v')^2 - \Gamma_{22}^1 (v')^3 + u'v'' - u''v'] [n, r_u, r_v]
\end{aligned}$$

Koristili smo $\alpha''(s) = Ar_u + Br_v + Cn$, pri čemu smo sa A, B, C skraćeno označili izraze iz Gauss-ovih formula (2.14). S obzirom da je $\langle r_u, n \times r_u \rangle = 0$, itd., naveli smo samo članove različite od 0, tj. $\langle r_u, n \times r_v \rangle = -[n, r_u, r_v]$, $\langle r_v, n \times r_u \rangle = [n, r_u, r_v]$ i primenili $[n, r_u, r_v] = \sqrt{EG - F^2}$. □

Primedba 2.4. *Primetimo da geodezijska krivina zavisi samo od koeficijenata prve osnovne forme, tj. da je "unutrašnja karakteristika" površi.*

Primedba 2.5. *Ukoliko je $f : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ izometrija, geodezijska krivina za krivu $f(r^1(u(s), v(s)))$ je ista u tački $f(r^1(u_0, v_0))$, jer zavisi samo od koeficijenata prve osnovne forme (tj. Christoffel-ovih simbola) $i(u(s), v(s))$.*

Primedba 2.6. *Primetimo da se formula (2.30) može zapisati u obliku*

$$\kappa_g(s) = \sqrt{EG - F^2} \begin{vmatrix} u' & u'' + \Gamma_{11}^1(u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1(v')^2 \\ v' & v'' + \Gamma_{11}^2(u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2(v')^2 \end{vmatrix}. \quad (2.31)$$

Tvrđenje 2.10. *Neka je $\alpha(t)$ kriva proizvoljne brzine čija slika pripada tragu elementarne regularne površi $r : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Tada je*

$$\kappa_n(t) = \frac{\langle \alpha''(t), n(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|^2}, \text{ nor } \kappa r \quad (2.32)$$

$$\kappa_n(t) = \frac{e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2}{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2} = \frac{\mathcal{II}(\alpha', \alpha')}{\mathcal{I}(\alpha', \alpha')}. \quad (2.33)$$

Dokaz. Normalna krivina regularne krive α proizvoljne brzine je normalna krivina njene prirodne reparametrizacije.

$$\alpha(t) = \tilde{\alpha}(s(t)), \quad n(t) = \tilde{n}(s(t)) \quad (2.34)$$

$$\kappa_n(t) = \tilde{\kappa}_n(s(t)) = \langle \tilde{\alpha}''(s(t)), \tilde{n}(s(t)) \rangle$$

$$\alpha'(t) = \tilde{\alpha}'(s(t)) s'(t) \quad (2.35)$$

$$\alpha''(t) = \tilde{\alpha}''(s(t)) (s'(t))^2 + \tilde{\alpha}'(s(t)) s''(t) \quad (2.36)$$

$$\tilde{\alpha}'(s(t)) = \tilde{T}(s(t)) = T(t), \quad \langle \tilde{\alpha}'(s(t)), \tilde{n}(s(t)) \rangle = 0$$

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\alpha}''(t), n(t) \rangle &= \langle \tilde{\alpha}''(s(t)) (s'(t))^2, n(t) \rangle \\ &= (s'(t))^2 \langle \tilde{\alpha}''(s(t)), n(s(t)) \rangle \\ &= (s'(t))^2 \tilde{\kappa}_n(s(t)) \\ &= \|\alpha'(t)\|^2 \kappa_n(t) \end{aligned}$$

Dokažimo sada i drugi deo tvrđenja. Neka je $\alpha(t) = r(u(t), v(t))$ kriva čija slika pripada tragu regularne elementarne površi $r : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Tada je

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= r(u(t), v(t)), \\ \alpha'(t) &= u'(t)r_u(u(t), v(t)) + v'(t)r_v(u(t), v(t)), \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\alpha''(t) = r_{uu}(u'(t))^2 + 2r_{uv}u'(t)v'(t) + r_{vv}(v'(t))^2 + r_u u''(t) + r_v v''(t) \quad (2.38)$$

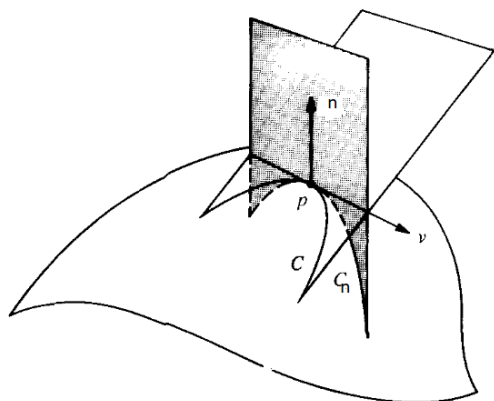
$$\begin{aligned} \langle \alpha''(t), n(t) \rangle &= \langle r_{uu}, n \rangle (u')^2 + 2 \langle r_{uv}, n \rangle u'v' + \langle r_{vv}, n \rangle (v')^2 \\ &\quad + \langle r_u, n \rangle u'' + \langle r_v, n \rangle v'' \\ &= e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2 \end{aligned}$$

Kako je $\|\alpha'(t)\|^2 = E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2$, to je

$$\begin{aligned}\kappa_n(t) &= \frac{\langle \alpha''(t), n(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|^2} \\ &= \frac{e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2}{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2} \\ &= \frac{\mathcal{II}(\alpha', \alpha')}{\mathcal{I}(\alpha', \alpha')}.\end{aligned}$$

□

Drugim rečima, u svakoj tački površi normalna krivina površi je ista za sve krive čija slika pripada tragu regularne elementarne površi koje u toj tački imaju zajedničku tangentu (čiji je vektor α') i ne zavisi od viših izvoda krive tj. α'' , iako je definisana pomoću α'' .



Teorema 2.15. (Meusnier-ova teorema) Normalna krivina krive čija slika pripada tragu regularne elementarne površi zavisi samo od površi, vektora brzine krive i smera normale površi.

Označimo vektor brzine krive α u tački P sa X , tj.

$$\alpha(0) = P, \alpha'(0) = X = X_1 r_u(u_0, v_0) + X_2 r_v(u_0, v_0), X_1 = u'(0), X_2 = v'(0).$$

Tada je

$$\kappa_n(P, X) = \frac{\mathcal{II}(X, X)}{\mathcal{I}(X, X)} = \frac{e(X_1)^2 + 2fX_1X_2 + g(X_2)^2}{E(X_1)^2 + 2FX_1X_2 + G(X_2)^2}. \quad (2.39)$$

Ovo opravdava činjenicu da se u literaturi često pojavljuje termin "normalna krivina površi".

Tvrđenje 2.11. Normalne krivine koordinatnih linija $\alpha(t) = r(u_0, t)$ i $\beta(t) = r(t, v_0)$ su redom

$$\frac{g(u_0, t)}{G(u_0, t)}, \quad \frac{e(t, v_0)}{E(t, v_0)}. \quad (2.40)$$

Definicija 2.18. Asimptotska kriva (linija) površi je kriva čiji trag pripada tragu površi i čija normalna krivina je nula. Prave čiji su vektori upravo vektori brzine ove krive su **asimptotski pravci**.

Često se za vektor brzine asimptotske krive kaže da je "asimptotski pravac".

Terminologija "asimptotski pravac" potiče od činjenice da su asimptotski pravci u hiperboličkim tačkama upravo asimptote Dupin-ove indikatriše, koja je hiperbola.

Teorema 2.16. Neka je α regularna prirodno parametrizovana kriva čiji trag pripada tragu $r(\mathcal{U})$ regularne elementarne površi $r : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Tada je α asimptotska linija ukoliko je

$$e(u(t), v(t))(u'(t))^2 + 2f(u(t), v(t))u'(t)v'(t) + g(u(t), v(t))(v'(t))^2 = 0. \quad (2.41)$$

Dokaz. $\alpha(t) = r(u(t), v(t))$ i koristiti (2.33). $\square$

Ukoliko je X tangentni vektor u tački P regularne elementarne površi $r : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$, to postoji kriva α čiji je to vektor brzine, naime, koristeći Definiciju...

$$\alpha(0) = P, \alpha'(0) = X = X_1 r_u(u_0, v_0) + X_2 r_v(u_0, v_0), X_1 = u'(0), X_2 = v'(0).$$

Tada je, koristeći (2.39), vektor $X = X_1 r_u + X_2 r_v$, $X \in T_P(r)$ asimptotski pravac ukoliko je

$$eX_1^2 + 2fX_1X_2 + gX_2^2 = 0. \quad (2.42)$$

Primer 2.14. Odrediti normalnu krivinu koordinatnih linija sfere, cilindra, heliko-ida.

Cilindar: $r(u, v) = (3 \cos u, 3 \sin u, v)$, $u > 0, v \in \mathbb{R}$. Tada je $E = 9, F = 0, G = 1, e = -3, f = 0, g = 0$

Koordinatna kriva $u = u_0$, tj. $\alpha(v) = (3 \cos u_0, 3 \sin u_0, v)$, $v \in \mathbb{R}$ je prava. Kako je $\alpha''(v) = (0, 0, 0)$, koristeći (??) dobija se $\kappa_n^\alpha(v) = \frac{\langle \alpha'', n \rangle}{\|\alpha'\|^2} = 0$. Takođe, koristeći (2.40) sledi $\kappa_n^\alpha(v) = \frac{g(u_0, v)}{G(u_0, v)} = 0$.

Koordinatna kriva $v = v_0$, tj. $\beta(u) = (3 \cos u, 3 \sin u, v_0)$, $u \in (0, 2\pi)$ je kružnica. Kako je $\beta''(u) = (-3 \cos u, -3 \sin u, 0)$, to je $\kappa_n^\beta(u) = \frac{\langle \beta'', n \rangle}{\|\beta'\|^2} = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}$ (koristeći (??)), ili $\kappa_n^\beta(u) = \frac{e(u, v_0)}{E(u, v_0)} = -\frac{1}{3}$.

Odrediti normalnu krivinu krivih $\alpha(v)$ i $\beta(u)$ na treći način, koristeći činjenicu da su normalna sečenja i ...

Helikoid: $r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$, $u > 0, v \in \mathbb{R}$

Koordinatna kriva $u = u_0$, $\alpha(v) = (u_0 \cos v, u_0 \sin v, v)$, $v \in \mathbb{R}$ je kružni heliks, $\alpha''(v) = (-u_0 \cos v, -u_0 \sin v, 0)$, $\kappa_n^\alpha(v) = \frac{\langle \alpha'', n \rangle}{\|\alpha'\|^2} = 0$, ili $\kappa_n^\alpha(v) = \frac{g(u_0, v)}{G(u_0, v)} = 0$.

Koordinatna kriva $v = v_0$, $\beta(u) = (u \cos v_0, u \sin v_0, v_0)$, $u > 0$ je prava, $\beta''(u) = (0, 0, 0)$, $\kappa_n^\beta(u) = \frac{\langle \beta'', n \rangle}{\|\beta'\|^2} = 0$, ili $\kappa_n^\beta(u) = \frac{e(u, v_0)}{E(u, v_0)}$.

Tvrđenje 2.12. Neka je $\alpha(t)$ kriva čija slika pripada tragu elementarne regularne površi $r : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$, tj. $\alpha(t) = r(u(t), v(t))$ za funkcije $u, v : (a, b) \rightarrow \mathcal{U}$. Tada je

$$\kappa_g(t) = \frac{[\alpha'(t), \alpha''(t), n(t)]}{\|\alpha'(t)\|^3}, \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} \kappa_g(t) \|\alpha'(t)\|^3 &= [\Gamma_{11}^2(u')^3 + (2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1)(u')^2 v' \\ &+ (\Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1)u'(v')^2 - \Gamma_{22}^1(v')^3 + u'v'' - u''v'] \sqrt{EG - F^2}, \end{aligned} \quad (2.44)$$

pri čemu je $\|\alpha'(t)\|^2 = E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2$.

Dokaz. Geodezijska krivina regularne krive α proizvoljne brzine je geodezijska krivina njene prirodne reparametrizacije, tj.:

$$\kappa_g(t) = \tilde{\kappa}_g(s(t)) = \langle \tilde{\alpha}''(s(t)), \tilde{S}(s(t)) \rangle. \quad (2.45)$$

Koristeći (2.35) zaključujemo:

$$\tilde{S}(s(t)) = \tilde{n}(s(t)) \times \tilde{\alpha}'(s(t)) = \frac{n(t) \times \alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}. \quad (2.46)$$

Primenom (2.45), (2.36) i (2.46) dobija se (2.43).

Formula (2.44) se dokazuje na sličan način kao (2.30) koristeći (2.43). $\square$

Primedba 2.7. *Primetimo da se formula (2.44) može zapisati u obliku*

$$\kappa_g(s) \|\alpha'(t)\|^3 = \sqrt{EG - F^2} \begin{vmatrix} u' & u'' + \Gamma_{11}^1(u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1(v')^2 \\ v' & v'' + \Gamma_{11}^2(u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2(v')^2 \end{vmatrix}. \quad (2.47)$$

Tvrđenje 2.13. Geodezijska krivina koordinatnih linija $\alpha(t) = r(u_0, t)$ i $\beta(t) = r(t, v_0)$ regularne elementarne površi r je

$$\kappa_g^\alpha(t) = -\Gamma_{22}^1 \frac{\sqrt{EG - F^2}}{G\sqrt{G}} \quad (2.48)$$

$$\kappa_g^\beta(t) = \Gamma_{11}^2 \frac{\sqrt{EG - F^2}}{E\sqrt{E}}. \quad (2.49)$$

Primedba 2.8. Geodezijska krivina u -krive je nula akko je $\Gamma_{11}^2 = 0$, geodezijska krivina v -krive je nula akko je $\Gamma_{22}^1 = 0$.

Tvrđenje 2.14. Geodezijska krivina koordinatnih linija $\alpha(t) = r(u_0, t)$ i $\beta(t) = r(t, v_0)$ regularne elementarne površi r , koje su ortogonalne, je

$$\kappa_g^\alpha(t) = \frac{G_u}{2G\sqrt{E}} \quad (2.50)$$

$$\kappa_g^\beta(t) = -\frac{E_v}{2E\sqrt{G}}. \quad (2.51)$$

Primer 2.15. Odrediti geodezijsku krivinu koordinatnih linija sfere, cilindra, helikoida.

Cilindar: $r(u, v) = (3 \cos u, 3 \sin u, v)$, $u > 0, v \in \mathbb{R}$.

$n(u, v) = (\cos u, \sin u, 0)$

Koordinatna kriva $u = u_0$, $\alpha(v) = (3 \cos u_0, 3 \sin u_0, v)$, $v \in \mathbb{R}$ je prava, $\alpha''(v) = (0, 0, 0)$, $\kappa_g^\alpha(v) = \frac{[n(u_0, v), \alpha'(v), \alpha''(v)]}{\|\alpha'(v)\|^3} = 0$.

Koordinatna kriva $v = v_0$, $\beta(u) = (3 \cos u, 3 \sin u, v_0)$, $u \in (0, 2\pi)$ je kružnica, $\beta'(u) = (-3 \sin u, 3 \cos u, 0)$, $\beta''(u) = (-3 \cos u, -3 \sin u, 0)$, $\kappa_g^\beta(u) = \frac{[n, \beta', \beta'']}{\|\beta'\|^3} = \frac{0}{\|\beta'\|^3} = 0$.

Helikoid: $r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$, $u > 0, v \in \mathbb{R}$,

$$n(u, v) = \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}}(\sin v, -\cos v, u)$$

Koordinatna kriva $u = u_0$, $\alpha(v) = (u_0 \cos v, u_0 \sin v, v)$, $v \in \mathbb{R}$ je kružni heliks, $\alpha'(v) = (-u_0 \sin v, u_0 \cos v, 1)$, $\alpha''(v) = (-u_0 \cos v, -u_0 \sin v, 0)$, $\kappa_g^\alpha(v) = \frac{[n, \alpha', \alpha'']}{\|\alpha'\|^3} = \frac{u_0}{u_0^2 + 1}$.

Koordinatna kriva $v = v_0$, $\beta(u) = (u \cos v_0, u \sin v_0, v_0)$, $u > 0$ je prava, $\beta''(u) = (0, 0, 0)$, $\kappa_g^\beta(u) = 0$.

2.7 Glavne krivine površi

Da bismo dalje izučavali normalnu krivinu, korisno je uvesti matrice oznake:

$$\mathcal{F}_I = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}, \quad \mathcal{F}_{II} = \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix}.$$

Neka su

$$t_1 = \xi_1 r_u + \eta_1 r_v, \quad t_2 = \xi_2 r_u + \eta_2 r_v$$

dva tangentna vektora u nekoj tački P koja pripada tragu regularne elementarne površi r . Tada je

$$\langle t_1, t_2 \rangle = E\xi_1\xi_2 + F(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) + G\eta_1\eta_2, \quad \text{tj.} \quad \langle t_1, t_2 \rangle = T_1^t \mathcal{F}_I T_2$$

za $T_1 = (\xi_1, \eta_1)^t$, $T_2 = (\xi_2, \eta_2)^t$. Neka je $\gamma'(s) = \xi r_u + \eta r_v$ tangentni vektor prirodno parametrizovane krive γ i $T = (\xi, \eta)^t$. Koristeći Meusnier-ovu teoremu, tada je

$$\kappa_n(P, t) = T^t \mathcal{F}_{II} T.$$

Definicija 2.19. Glavne krivine elementarne površi su koreni jednačine

$$\det(\mathcal{F}_{II} - \kappa \mathcal{F}_I) = 0, \quad \text{tj.} \quad \begin{vmatrix} e - \kappa E & f - \kappa F \\ f - \kappa F & g - \kappa G \end{vmatrix} = 0. \quad (2.52)$$

Ukoliko vektor $T = (\xi, \eta)^t$ zadovoljava jednačinu $(\mathcal{F}_{II} - \kappa \mathcal{F}_I)T = 0$, odgovarajući tangentni vektor $t = \xi r_u + \eta r_v$ površi r se naziva **glavni vektor** koji odgovara glavnoj krivini κ .

Jednačinu (2.52) možemo zapisati i u obliku

$$(EG - F^2)\kappa^2 + (2fF - eG - gE)\kappa + eg - f^2 = 0. \quad (2.53)$$

Neka je t glavni vektor koji odgovara glavnoj krivini κ , tj. $t = \xi r_u + \eta r_v$ i

$$\begin{bmatrix} e - \kappa E & f - \kappa F \\ f - \kappa F & g - \kappa G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} (e - \kappa E)\xi + (f - \kappa F)\eta &= 0, \\ (f - \kappa F)\xi + (g - \kappa G)\eta &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (e\xi + f\eta) - \kappa(E\xi + F\eta) &= 0, \\ (f\xi + g\eta) - \kappa(F\xi + G\eta) &= 0 \end{aligned}$$

Ovaj sistem ima netrivialno rešenje $(1, \kappa)$ ukoliko je determinanta jednaka nuli, tj.

$$\begin{vmatrix} e\xi + f\eta & E\xi + F\eta \\ f\xi + g\eta & F\xi + G\eta \end{vmatrix} = 0,$$

što je ekvivalentno sa

$$\xi^2(eF - fE) + \xi\eta(eG - gE) + \eta^2(fG - gF) = 0 \quad (2.54)$$

a može se zapisati i u obliku

$$\begin{vmatrix} -\eta^2 & \xi\eta & -\xi^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0. \quad (2.55)$$

Primetimo da u slučaju $F = 0 = f$ jednačina (2.52) ima oblik

$$\begin{vmatrix} e - \kappa E & 0 \\ 0 & g - \kappa G \end{vmatrix} = 0, \quad (2.56)$$

tj. $\kappa_1 = \frac{e}{E}$, $\kappa_2 = \frac{g}{G}$, a jednačina (2.54) ima oblik

$$\xi\eta(eG - gE) = 0.$$

Ukoliko je $\kappa_1 \neq \kappa_2$, to je $eG - gE \neq 0$ (videti Tvrdjenje 2.16), pa je $\xi = 0$ ili je $\eta = 0$, tj. glavni vektori su r_u i r_v .

Tvrdjenje 2.15. *Neka trag krive α pripada tragu elementarne regularne površi $r : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Tada je α linija krivine akko*

$$\begin{vmatrix} -(v')^2 & u'v' & -(u')^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0. \quad (2.57)$$

Dokaz. $\alpha(t) = r(u(t), v(t))$, $\alpha' = u'r_u + v'r_v$, $\xi = u'$, $\eta = v'$, koristiti (2.55). $\square$

Ukoliko je $F = f = 0$, diferencijalna jednačina linija krivine je

$$\begin{vmatrix} -(v')^2 & u'v' & -(u')^2 \\ E & 0 & G \\ e & 0 & g \end{vmatrix} = 0. \quad (2.58)$$

Odrediti glavne krivine i glavne vektore jedinične sfere, cilindra.

Sfera. Koristeći vrednosti za koeficijente prve i druge osnovne forme jedinične sfere (Poglavlje 3.4), dobija se da su glavne krivine sfere koreni jednačine

$$\cos^2 \theta (\kappa - 1)^2 = 0,$$

odakle sledi da su sve glavne krivine jedinične sfere jednake 1, tj. sve tačke sfere su zaobljene (umbiličke). (Videti...) Koristeći ... sledi da je svaki tangentni vektor glavni vektor. Drugim rečima, "Sfera se jednako krivi u svakom pravcu, u svakoj tački."

Cilindar. $r(u, v) = (R \cos u, R \sin u, v)$

$$\begin{vmatrix} -R - \kappa R^2 & 0 \\ 0 & -\kappa \end{vmatrix} = 0.$$

$$R\kappa(1 + R\kappa) = 0 \quad \kappa_1 = -\frac{1}{R}, \kappa_2 = 0.$$

Intuitivno je jasno da su krive koje se "najviše krive" kružnice, tj. paralele, a da se "najmanje krive" prave, tj. izvodnice, meridijani, paralelne osi cilindra, pa smo i očekivali ove krivine. Za kružni cilindar popuprečnika 1, glavne krivine su 0 i -1 .

Za glavne vektore t_1 i t_2 važi:

$$t_1 = \xi_1 r_u + \eta_1 r_v, \quad t_2 = \xi_2 r_u + \eta_2 r_v, \quad T_1 = (\xi_1, \eta_1)^t, \quad T_2 = (\xi_2, \eta_2)^t,$$

pri čemu važi da su t_1 i t_2 glavni vektori ukoliko je $(\mathcal{F}_{II} - \kappa_i \mathcal{F}_I)T_i = 0$, tj.

$$\begin{bmatrix} e - \kappa_i E & f - \kappa_i F \\ f - \kappa_i F & g - \kappa_i G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_i \\ \eta_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Za $\kappa_1 = -1$ je

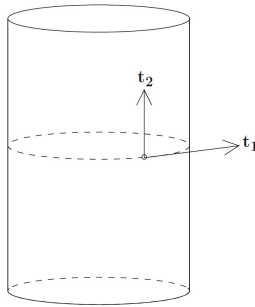
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$\eta_1 = 0, \xi_1 = 1, t_1 = r_u$ je glavni vektor koji odgovara glavnoj krivini $\kappa_1 = -1$.

Za $\kappa_2 = 0$ je

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$\xi_2 = 0, \eta_2 = 1, t_2 = r_v = (0, 0, 1)$ je glavni vektor koji odgovara glavnoj krivini $\kappa_2 = 0$.



Odrediti glavne krivine **torusa**. Koristeći izraze za koeficijente prve i druge osnovne forme i $\kappa_1 = \frac{e}{E}$, $\kappa_2 = \frac{g}{G}$, dobija se

$$\kappa_1 = -\frac{\cos v}{a + b \cos v}, \quad \kappa_2 = -\frac{1}{b}.$$

Odrediti glavne krivine i glavne vektore **jednogradnog hiperboloida** (zadatak 17). (vežbe Antić, zad. 17)

$x^2 - y^2 + z^2 = 1$, koristeći ... $r(u, v) = (\operatorname{ch} u \cos v, \operatorname{sh} u, \operatorname{ch} u \sin v)$, $u \in \mathbb{R}$, $v \in (0, 2\pi)$

$$E = \operatorname{ch} 2u, F = 0, G = \operatorname{ch}^2 u, e = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch} 2u}}, f = 0, g = -\frac{\operatorname{ch}^2 u}{\sqrt{\operatorname{ch} 2u}}$$

$$\kappa_1 = \frac{e}{E} = \frac{1}{(\operatorname{ch} 2u)^{\frac{3}{2}}}, \quad \kappa_2 = \frac{g}{G} = -\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch} 2u}}$$

$$t_1 = r_u, \quad t_2 = r_v$$

Definicija 2.20. Tačka P je **umbilička (zaobljena) tačka** ukoliko je $\kappa_1(P) = \kappa_2(P)$, a **planarna** ukoliko je $\kappa_1(P) = \kappa_2(P) = 0$.

Ukoliko u sve tačke povezane površi umbiličke, površ je deo sfere ili ravni (bez dokaza, poluprečnik sfere je $\frac{1}{\kappa_n}$).

Tvrđenje 2.16. Tačka P na regularnoj elementarnoj površi klase C^k , $k \geq 2$ je umbilička akko

$$\frac{e}{E} = \frac{f}{F} = \frac{g}{G}$$

i planarna ukoliko je $e = f = g = 0$.

Dokaz.

$$\begin{aligned} \kappa_1 = \kappa_2 &\iff 0 = D = b^2 - 4ac = 4 \frac{EG - F^2}{E} (Ef - Fe)^2 + [Eg - Ge - 2 \frac{F}{G} (Ef - Fe)]^2 \\ &\iff Ef = Fe, Eg - Ge - 2 \frac{F}{G} (Ef - Fe) = 0 \\ &\iff \frac{e}{E} = \frac{f}{F} = \frac{g}{G} \end{aligned}$$

Koristeći (2.39) i (2.53) zaključujemo da je u ovom slučaju $\kappa_n = \kappa_1 = \kappa_2 = \frac{e}{E} = \frac{f}{F} = \frac{g}{G}$.

$$e = f = g = 0 \implies (EG - F^2)\kappa^2 = 0 \implies \kappa^2 = 0 \implies \kappa_1 = \kappa_2 = 0$$

□

Primedba 2.9. *Prateći ovaj dokaz možemo zaključiti da su glavne krivine realno vrednosne funkcije, jer je*

$$D = b^2 - 4ac = 4 \frac{EG - F^2}{E} (Ef - Fe)^2 + [Eg - Ge - 2 \frac{F}{G} (Ef - Fe)]^2 \geq 0.$$

Tvrđenje 2.17. *Neka su κ_1 i κ_2 glavne krivine površi r u tački P .*

1. *Ukoliko je $\kappa_1 \neq \kappa_2$, tada su glavni vektori koji odgovaraju glavnim krivinama κ_1 i κ_2 ortogonalni.*
2. *Ukoliko je $\kappa_1 = \kappa_2$, svaki tangentni vektor $v \in T_P(r)$ je glavni vektor.*

Dokaz. Neka su

$$t_1 = \xi_1 r_u + \eta_1 r_v, \quad t_2 = \xi_2 r_u + \eta_2 r_v$$

dva tangentna vektora u nekoj tački površi r .

Tada je $\langle t_1, t_2 \rangle = E\xi_1\xi_2 + F(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) + G\eta_1\eta_2$, tj.

$$\langle t_1, t_2 \rangle = T_1^t \mathcal{F}_I T_2$$

za $T_1 = (\xi_1, \eta_1)^t$, $T_2 = (\xi_2, \eta_2)^t$,

$$\mathcal{F}_I = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}, \quad \mathcal{F}_{II} = \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix}.$$

Koristeći Definiciju 2.19 glavnih krivina možemo zapisati

$$\mathcal{F}_{II} T_1 = \kappa_1 \mathcal{F}_I T_1, \quad \mathcal{F}_{II} T_2 = \kappa_2 \mathcal{F}_I T_2. \quad (2.59)$$

Množeći jednačine (2.59) redom sa T_2^t i T_1^t dobija se

$$T_2^t \mathcal{F}_{II} T_1 = \kappa_1 \langle t_1, t_2 \rangle, \quad T_1^t \mathcal{F}_{II} T_2 = \kappa_2 \langle t_1, t_2 \rangle$$

Kako je $T_1^t \mathcal{F}_{II} T_2$ 1×1 matrica, to je

$$T_1^t \mathcal{F}_{II} T_2 = (T_1^t \mathcal{F}_{II} T_2)^t = T_2^t \mathcal{F}_{II}^t T_1 = T_2^t \mathcal{F}_{II} T_2,$$

pa je, koristeći (2.59),

$$\kappa_1 \langle t_1, t_2 \rangle = \kappa_2 \langle t_1, t_2 \rangle.$$

Ukoliko je $\kappa_1 \neq \kappa_2$, tada je $\langle t_1, t_2 \rangle = 0$, tj. t_1 i t_2 su ortogonalni.

Dokažimo da ukoliko su glavne krivine jednake u tački P površi r , ($\kappa_1(P) = \kappa_2(P)$), tada je svaki tangentni vektor $v \in T_P(r)$ glavni vektor.

Neka su t_1 i t_2 dva proizvoljna ortogonalna, jedinična vektora tangentne ravni površi r u tački P . Neka su $\xi_i, \eta_i, T_i, i = 1, 2$ definisani sa.... i neka je

$$A = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{bmatrix} = 0.$$

Tada je, s obzirom da su t_1 i t_2 jedinični i ortogonalni,

$$A^t \mathcal{F}_I A = \begin{bmatrix} T_1^t \mathcal{F}_I T_1 & T_1^t \mathcal{F}_I T_2 \\ T_2^t \mathcal{F}_I T_1 & T_2^t \mathcal{F}_I T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle t_1, t_1 \rangle & \langle t_1, t_2 \rangle \\ \langle t_2, t_1 \rangle & \langle t_2, t_2 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Neka je

$$\mathcal{G}_{II} = A^t \mathcal{F}_{II} A.$$

$\mathcal{G}$ je simetrična jer je

$$\mathcal{G}_{II}^t = (A^t \mathcal{F}_{II} A)^t = A^t \mathcal{F}_{II}^t (A^t)^t = A^t \mathcal{F}_{II} A = \mathcal{G}_{II}$$

Tada postoji ortogonalna matrica B takva da je

$$B^t \mathcal{G}_{II} B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

za neke skalare λ_1 i λ_2 . Neka je $C = A B$. Tada je $C^t \mathcal{F}_I C = B^t (A^t \mathcal{F}_I A) B = B^t B = I$ i $C^t \mathcal{F}_{II} C = B^t (A^t \mathcal{F}_{II} A) B = B^t \mathcal{G}_{II} B$, tj.

$$C^t \mathcal{F}_I C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C^t \mathcal{F}_{II} C = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

C je inverzibilna, pa je

$$\det(\mathcal{F}_{II} - \kappa \mathcal{F}_I) = 0 \iff \det(C^t (\mathcal{F}_{II} - \kappa \mathcal{F}_I) C) = 0$$

$$\det(\mathcal{F}_{II} - \kappa \mathcal{F}_I) = 0 \iff \det \left[\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} - \kappa \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right] = 0$$

Dakle, glavne krivine su koreni

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 - \kappa & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \kappa \end{vmatrix} = 0,$$

tj. λ_1 i λ_2 .

Ukoliko su glavne krivine jednake, npr. κ , tada je $\lambda_1 = \lambda_2 = \kappa$ i koristeći (2.60) sledi

$$C^t \mathcal{F}_I C = I, \quad C^t \mathcal{F}_{II} C = \kappa I$$

pa je

$$C^t (\mathcal{F}_{II} - \kappa \mathcal{F}_I) C = 0,$$

tj.

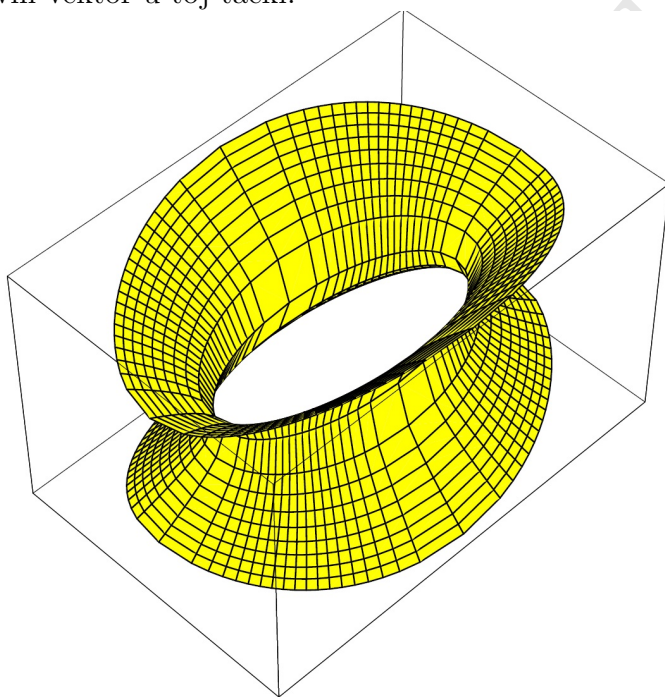
$$\mathcal{F}_{II} - \kappa \mathcal{F}_I,$$

jer su C i C^t inverzibilne matrice. Tada za bilo koju 2×1 matricu T važi

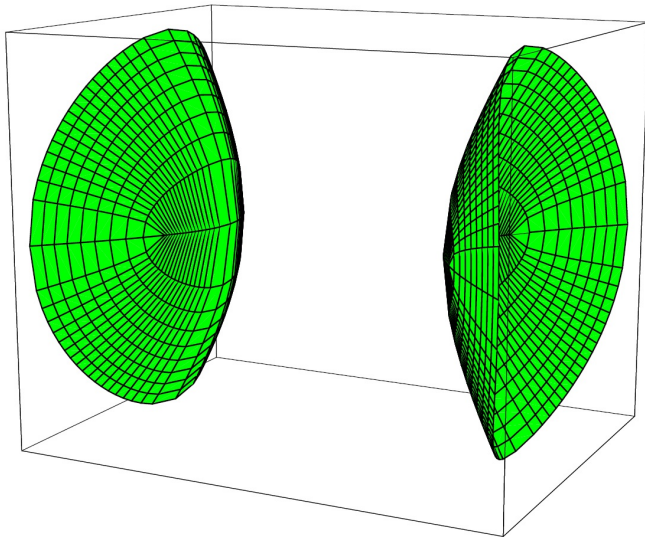
$$(\mathcal{F}_{II} - \kappa \mathcal{F}_I) T = 0,$$

odakle sledi da je svaki tangentni vektor u P glavni vektor. □

Linija krivine na elementarnoj površi je kriva čiji je tangentni vektor u svakoj tački glavni vektor u toj tački.



Linije krivine jednokrlnog hiperboloida



Linije krivine dvokrlnog hiperboloida

Tvrđenje 2.18. Meridijani i paralele rotacione površi (u tačkama koje nisu umbiličke) su linije krivine (glavne linije).

Dokaz. $r(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$, $f_u^2 + g_u^2 = 1$, $f > 0$

$$E = f_u^2 + g_u^2 = 1, \quad F = 0, \quad G = f^2$$

$$e = f_u g_{uu} - f_{uu} g_u, \quad f = 0, \quad g = f g_u$$

Kako je $F = f = 0$, koristeći (2.58), diferencijalna jednačina linija krivine $\alpha(t) = r(u(t), v(t))$ je $u'v'(eG - gE) = 0$. Dakle, koordinatne linije (meridijani i paralele) $u = u_0$ i $v = v_0$, tj. $\alpha(t) = r(u_0, v(t))$ i $\beta(t) = r(u(t), v_0)$ su linije krivine. Naime, posle reparametrizacije, linije krivine su:

$$\alpha(t) = (f(u_0) \cos v, f(u_0) \sin v, g(u_0)), \quad \beta(t) = (f(u) \cos v_0, f(u) \sin v_0, g(u)).$$

Da li su ovo jedine linije krivine rotacione površi? Kako tačke nisu umbiličke sledi $eG - gE \neq 0$, videti Tvrđenje..., pa je $\alpha(t) = r(u(t), v(t))$ linija krivine ukoliko je $u' = 0$ tj. $u = u_0 = \text{const}$, a v je proizvoljno, tj. $v = v(t)$ ili $v' = 0$ tj. $v = v_0 = \text{const}$, a u je proizvoljno, tj. $u = u(t)$. Dakle, linije krivine $\alpha(t) = r(u_0, t)$ i $\beta(t) = r(t, v_0)$ su koordinatne linije. $\square$

Primedba 2.10. Ukoliko su tačke rotacione površi umbiličke, tj. $eG - gE = 0$, tj., $f g_u = (f_u g_{uu} - f_{uu} g_u) f^2$, tj., $g_u = (f_u g_{uu} - f_{uu} g_u) f$ (jer je $f > 0$), situacija je komplikovanija...

Tvrđenje 2.19. Koordinatne linije regularne elementarne površi (koje ne sadrže umbiličke tačke) su (jedine) glavne linije (linije krivine) ako i samo ako je $F = f = 0$.

Dokaz. Neka je u -koordinatna linija $\alpha(t) = r(t, v_0)$ glavna linija, tj. za $\alpha(t) = r(u(t), v(t))$ je $u(t) = t$ i $v(t) = v_0$. Tada je, koristeći (2.57):

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0,$$

odakle je $-Ef + Fe = 0$.

Neka je v -koordinatna linija $\beta(t) = r(u_0, t)$ glavna linija, tj. za $\beta(t) = r(u(t), v(t))$ je $u(t) = u_0$ i $v(t) = t$ i, koristeći (2.57), važi

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0,$$

odakle je $-Fg + Gf = 0$.

Sistem jednačina $-Ef + Fe = 0$, $-Fg + Gf = 0$, ima samo trivijalno rešenje $F = f = 0$, jer je determinanta sistema $Ge - Eg \neq 0$, koristeći Tvrdjenje..., s obzirom da nijedna tačka nije umbilička.

Neka je sada $F = f = 0$. Koristeći (2.58), kriva $\alpha(t) = r(u(t), v(t))$ je glavna linija $\dots u'v'(Eg - Ge) = 0 \dots$ pratiti dokaz Tvrdjenja 2.18. $\square$

Imajući u vidu koliko slučaj $F = f = 0$ pojednostavljuje račun i uzimajući u obzir Tvrdjenje 2.19, važno je parametrizovati površi tako da koordinatne linije budu glavne. Takva parametrizacija se naziva glavna parametrizacija.

Parametrizovati površi $r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, av)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi)$, $a > 0$ (helikoid) i $z = xy$ (sedlo), tako da važi $F = f = 0$.

Uputstvo: Naći glavne linije i parametrizovati površ tako da one budu koordinatne (vezbe zad. 31)

Teorema 2.17. (Euler-ova teorema) *Neka je α prirodno parametrizovana kriva na površi r i neka su κ_1 i κ_2 glavne krivine površi r . Tada je*

$$\kappa_n = \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta, \quad (2.61)$$

pri čemu je θ ugao između α' i glavnog vektora koji odgovara krivini κ_1 .

U formulaciji prethodne teoreme κ_n je normalna krivina u tački u pravcu vektora brzine krive α , tj. α' , glavne krivine su u tački.

Euler-ova teorema se često formuliše i na sledeći način:

Neka je Y jedinični tangentni vektor u tački P elementarne regularne površi. Tada je

$$II(Y, Y) = \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta,$$

pri čemu je θ ugao između Y i glavnog vektora koji odgovara glavnoj krivini κ_1 .

Dokaz. Ukoliko je $\kappa_1 = \kappa_2$, u dokazu Tvrdjenja ... smo zaključili da je $\kappa_n = \kappa_1 = \kappa_2$, pa relacija (2.61) važi.

Ukoliko je $\kappa_1 \neq \kappa_2$, neka su t_1 i t_2 glavni vektori koji redom odgovaraju glavnim krivinama κ_1 i κ_2 . Na osnovu Tvrdjenja ..., t_1 i t_2 su ortogonalni, možemo ih i normirati, pa važi

$$\alpha' = \cos \theta t_1 + \sin \theta t_2.$$

Uvedimo oznake

$$t_i = \xi_i r_u + \eta_i r_v, \quad i = 1, 2, \quad \alpha' = \xi r_u + \eta r_v$$

Tada je

$$\begin{aligned} \xi r_u + \eta r_v &= \alpha' = \cos \theta t_1 + \sin \theta t_2 \\ &= \cos \theta (\xi_1 r_u + \eta_1 r_v) + \sin \theta (\xi_2 r_u + \eta_2 r_v) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \cos \theta \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{bmatrix} + \sin \theta \begin{bmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \end{bmatrix},$$

$$T = \cos \theta T_1 + \sin \theta T_2$$

Koristeći .. normalna krivina krive α je

$$\begin{aligned} \kappa_n &= T^t \mathcal{F}_{II} T \\ &= (\cos \theta T_1^t + \sin \theta T_2^t) \mathcal{F}_{II} (\cos \theta T_1 + \sin \theta T_2) \\ &= \cos^2 \theta T_1^t \mathcal{F}_{II} T_1 + \cos \theta (T_1^t \mathcal{F}_{II} T_2 + T_2^t \mathcal{F}_{II} T_1) + \sin^2 \theta T_2^t \mathcal{F}_{II} T_2 \end{aligned}$$

Relacija (2.61) sledi koristeći

$$\begin{aligned} T_1^t \mathcal{F}_{II} T_1 &= \kappa_1 T_1^t \mathcal{F}_I T_1 = \kappa_1 \\ T_2^t \mathcal{F}_{II} T_2 &= \kappa_2 T_2^t \mathcal{F}_I T_2 = \kappa_2 \\ T_1^t \mathcal{F}_{II} T_2 &= \kappa_1 T_1^t \mathcal{F}_I T_2 = 0 \\ T_2^t \mathcal{F}_{II} T_1 &= \kappa_2 T_2^t \mathcal{F}_I T_1 = 0. \end{aligned}$$

□

Meusnier-ova (1776) i Euler-ova (1760) teorema su najstariji rezultati iz teorije površi.

Na kraju, bez umanjenja opštosti, pretpostavimo $\kappa_1 > \kappa_2$.

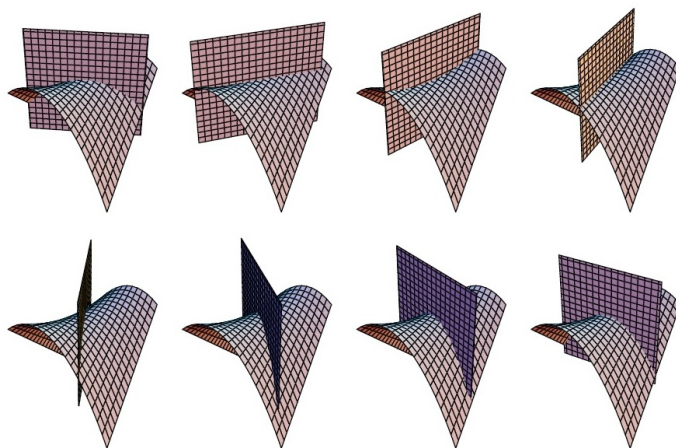
$$\begin{aligned} \kappa_n &= \cos^2 \theta \kappa_1 + \sin^2 \theta \kappa_2 \\ &= (1 - \sin^2 \theta) \kappa_1 + \sin^2 \theta \kappa_2 \\ &= \kappa_1 - (\kappa_1 - \kappa_2) \sin^2 \theta \end{aligned}$$

Jedakost se postiže za $\theta = 0, \pi$.

$$\begin{aligned}\kappa_n &= \cos^2 \theta \kappa_1 + \sin^2 \theta \kappa_2 \\ &= \cos^2 \theta \kappa_1 + (1 - \cos^2 \theta) \kappa_2 \\ &= (\kappa_1 - \kappa_2) \cos^2 \theta + \kappa_2\end{aligned}$$

Odavde zaključujemo $\kappa_2 \leq \kappa_n \leq \kappa_1$ tj.:

Posledica 2.4. *Glavne krivine u tački površi su maksimalna i minimalna vrednost normalne krivine svih prirodno parametrizovanih krivih na površi koje sadrže tu tačku.*



2.8 Gauss-ova i srednja krivina površi

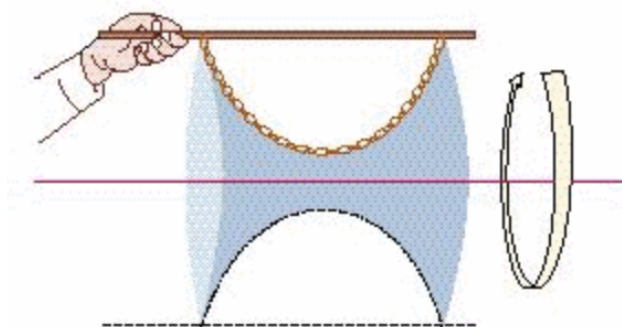
Definicija 2.21. Gauss-ova krivina K i srednja krivina H regularne elementarne površi $r : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$, čije su glavne krivine κ_1, κ_2 , su funkcije $K, H : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ definisane sa

$$K(u, v) = \kappa_1(u, v) \kappa_2(u, v), \quad H(u, v) = \frac{1}{2}(\kappa_1(u, v) + \kappa_2(u, v)).$$

Gauss-ova krivina ne zavisi od parametrizacije površi, iako glavne krivine (obe) mogu promeniti znak.



Površni čija je srednja krivina jednaka nuli nazivaju se **minimalne površi**. Katenoid (nastao rotacijom lančaniće) je minimalna površ.



Helikoid je minimalna površ. Za više detalja pogledati: M. Đorić, Vajershtasova reprezentacija minimalnih površi, master rad, Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet, 2011.

Tvrđenje 2.20.

$$(1) \quad K(u, v) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}(u, v); \quad (2.62)$$

$$(2) \quad H(u, v) = \frac{eG + gE - 2fF}{2(EG - F^2)}(u, v); \quad (2.63)$$

$$(3) \quad \text{glavne krivine su } H \pm \sqrt{H^2 - K}. \quad (2.64)$$

Dokaz. Relacije se dobijaju korišćenjem Vietè-ovih formula i (2.53). $\square$

Dokazati da je $K \leq H^2$ u svakoj tački orijentisane regularne površi. Za koje tačke važi jednakost?

Koristeći Tvrdjenje 2.20 često se prvo izračunaju Gauss-ova i srednja krivina, pa tek onda glavne krivine. Na primer, posmatrajmo **helikoid**:

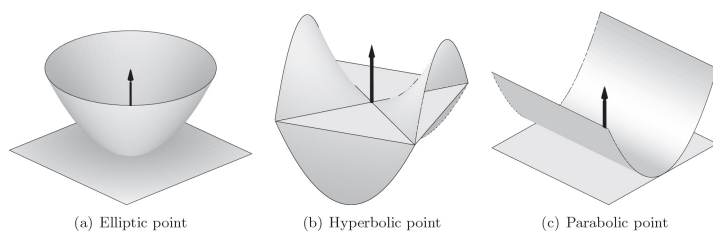
$$r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v), \quad 0 \leq u < R, \quad -\infty < v < +\infty.$$

Kako su koeficijenti prve i druge osnovne forme $E = 1$, $F = 0$, $G = \frac{1}{u^2}$, $e = 0$, $f = -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$, $g = 0$, koristeći (2.62) i (2.63), sledi

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -\frac{1}{(1+u^2)^2}, \quad H = \frac{eG + gE - 2fF}{2(EG - F^2)} = 0.$$

Kako su glavne krivine jednake $H \pm \sqrt{H^2 - K}$, to je

$$\kappa_1 = -\frac{1}{1+u^2}, \quad \kappa_2 = \frac{1}{1+u^2}.$$



Uočimo tačku P koja pripada tragu regularne površi. Ukoliko je $K(P) > 0$, tačka P se naziva **eliptička tačka** ($\kappa_1(P) \cdot \kappa_2(P) > 0$), ukoliko je $K(P) < 0$, tačka P se naziva **hiperbolička tačka** ($\kappa_1(P) \cdot \kappa_2(P) < 0$), ukoliko je $K = 0$, tačka P se naziva **parabolička tačka** ukoliko je jedna glavna krivina različita od 0 i **planarna tačka** ukoliko su obe glavne krivine 0 ($\kappa_1(P) = 0 = \kappa_2(P)$). (Primetimo da su planarne tačke već definisane u Definiciji 2.20.)

Dokazati da su Gauss-ove i srednje krivine

- ravni: $K = H = 0$,
- jedinične sfere: $K = H = 1$,
- sfere poluprečnika R : $K = \frac{1}{R^2}$, $H = \frac{1}{R}$,
- kružnog cilindra poluprečnika 1: $K = 0$, $H = \frac{1}{2}$,
- rotacionih površi $r(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$, za generatrisu jedinične brzine, tj. $f'^2 + g'^2 = 1$: $K = -\frac{f''(u)}{f(u)}$.

Primer 2.16. Rotacione površi

$$r(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)), \quad f_u^2 + g_u^2 = 1, \quad f > 0$$

$$E = f_u^2 + g_u^2 = 1, \quad F = 0, \quad G = f^2$$

$$e = f_u g_{uu} - f_{uu} g_u, \quad f = 0, \quad g = f g_u$$

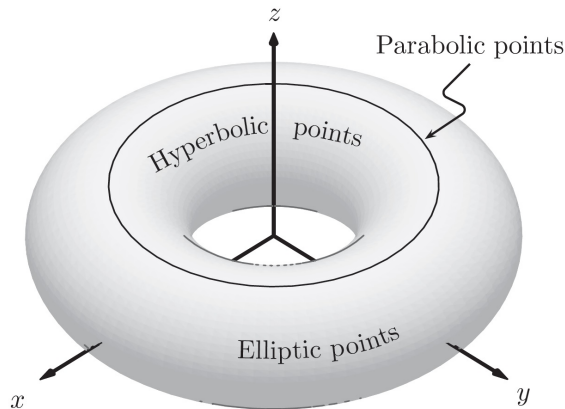
$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{(f_u g_{uu} - f_{uu} g_u) f g_u}{f^2}$$

Izvod $f_u^2 + g_u^2 = 1$ je $f_u f_{uu} + g_u g_{uu} = 0$, pa je

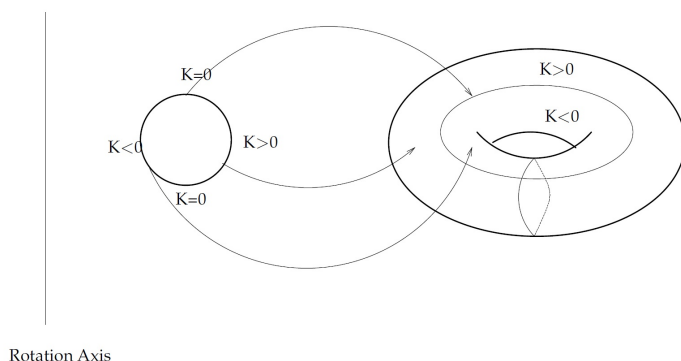
$$f_u g_{uu} - f_{uu} g_u = -\frac{f_{uu}(f_u^2 + g_u^2)}{g_u} = -\frac{f_{uu}}{g_u}$$

$$K = \frac{(f_u g_{uu} - f_{uu} g_u) f g_u}{f^2} = -\frac{f_{uu} f g_u}{f^2 g_u} = -\frac{f_{uu}}{f}$$

Specijalno, za jediničnu sferu je $u = \theta$, $v = \varphi$, $f(\theta) = \cos \theta$, $g(\theta) = \sin \theta$, pa je $K = 1$.

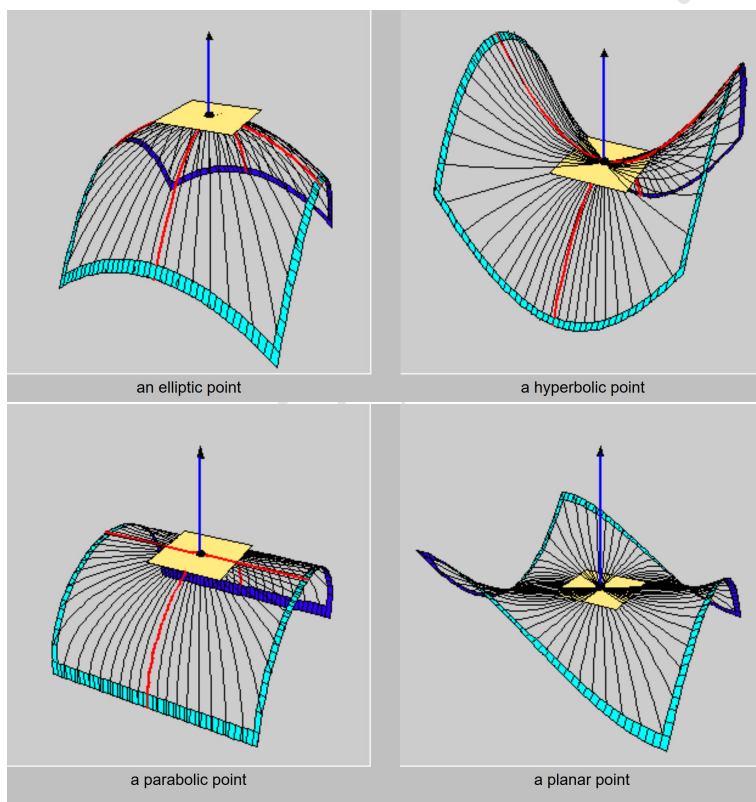


Za torus $r(u, v) = ((a + b \cos v) \cos u, (a + b \cos v) \sin u, b \sin v)$, $0 \leq u < 2\pi$, $0 \leq v < 2\pi$ je $K = \frac{\cos v}{b(a + b \cos v)}$. Dakle, torus ima i paraboličkih (za $v = \frac{\pi}{2}$ i $v = \frac{3\pi}{2}$) i eliptičkih (za $0 < v < \frac{\pi}{2}$ i $\frac{3\pi}{2} < v < 2\pi$) i hiperboličkih tačaka (za $\frac{\pi}{2} < v < \frac{3\pi}{2}$).



Tvrđenje 2.21. *Ukoliko je tačka P regularne površi umbilička, tada je $K(P) \geq 0$.*

Dokaz. Primenom Tvrđenja ... sledi $e = \kappa_n E$, $f = \kappa_n F$, $g = \kappa_n G$, pa je $K(P) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \kappa_n^2(P) \geq 0$. $\square$



Tvrđenje 2.22. *Ukoliko su sve tačke povezane regularne površi umbiličke, Gauss-ova krivina površi je konstantna i nenegativna.*

Dokaz. Koristeći Weingarten-ove formule i $e = \kappa_n E$, $f = \kappa_n F$, $g = \kappa_n G$, sledi

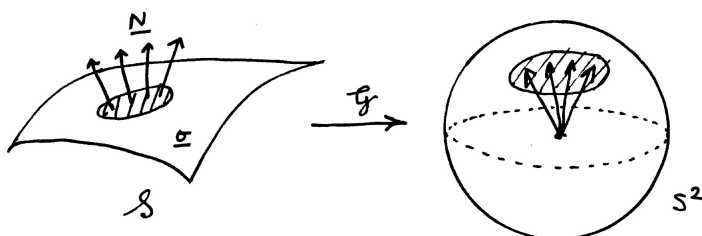
$$n_u = -\kappa_n r_u, \quad n_v = -\kappa_n r_v.$$

Diferencirajući n_u po v i n_v po u i oduzimajući dobijene izraze, sledi

$$\frac{\partial \kappa_n}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial \kappa_n}{\partial v} = 0,$$

tj. normalna krivina je konstantna. itd... $\square$

Neka je $r : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ regularna elementarna površ i neka je $\mathcal{S}^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. **Gauss-ovo preslikavanje** $\mathcal{G} : r(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{S}^2$ tački $r(u, v) \in r(\mathcal{U})$ dodeljuje tačku na jediničnoj sferi $\mathcal{S}^2$ koja odgovara "vrhu vektora normale" $n(u, v)$ površi $r(u, v)$.



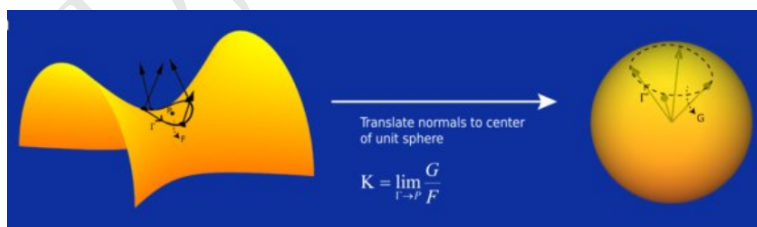
Teorema 2.18. Neka je $r : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ regularna elementarna površ, $(u_0, v_0) \in \mathcal{U}$ i neka je $\delta > 0$ takvo da je disk

$$\mathcal{R}_\delta = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : (u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 \leq \delta^2\}$$

podskup od $\mathcal{U}$. Tada je

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\mathcal{P}(\mathcal{G}(r(\mathcal{R}_\delta)))}{\mathcal{P}(r(\mathcal{R}_\delta))} = |K|$$

pri čemu je K Gauss-ova krivina površi r u tački $r(u_0, v_0)$.



Dokaz.

$$\frac{\mathcal{P}(\mathcal{G}(r(\mathcal{R}_\delta)))}{\mathcal{P}(r(\mathcal{R}_\delta))} = \frac{\int_{\mathcal{R}_\delta} \|n_u \times n_v\| du dv}{\int_{\mathcal{R}_\delta} \|r_u \times r_v\| du dv}$$

Koristeći Weingarten-ove formule dobija se

$$n_u \times n_v = (\beta_1^1 r_u + \beta_1^2 r_v) \times (\beta_2^1 r_u + \beta_2^2 r_v) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} r_u \times r_v = K r_u \times r_v$$

Izaberimo δ dovoljno malo da $|K(u, v) - K(u_0, v_0)| < \epsilon$ za $(u, v) \in \mathcal{R}_\delta$. Tada je

$$|K(u_0, v_0)| - \epsilon < \frac{\mathcal{P}(\mathcal{G}(r(\mathcal{R}_\delta)))}{\mathcal{P}(r(\mathcal{R}_\delta))} < |K(u_0, v_0)| + \epsilon$$

□

Djoric27. maj 2021.

2.9 Gauss-ova briljantna teorema

Zamenjujući izraze za Christoffel-ove simbole (2.10) u Gauss-ove formule (2.22)-(2.25) dobija se

Brioschi-jeva formula

Za Gauss-ovu krivinu regularne elementarne površi $r : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ važi $K = \frac{A-B}{(EG-F^2)^2}$, pri čemu je

$$A = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}E_{vv} + F_{uv} - \frac{1}{2}G_{uu} & \frac{1}{2}E_u & F_u - \frac{1}{2}E_v \\ F_v - \frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix}.$$

Ukoliko je $F = 0$ tada je

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right) \right\}.$$

$$K = -\frac{1}{EG} \left[\frac{1}{2}(E_{vv} + G_{uu}) - \frac{1}{4} \left(\frac{E_u G_u + E_v^2}{E} + \frac{E_v G_v + G_u^2}{G} \right) \right]$$

Ukoliko je $E = 1$ i $F = 0$ tada je

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2}{\partial u^2} (\sqrt{G}).$$

Dakle, za rotacionu površ $r(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$, za $f > 0$ i $f'^2 + g'^2 = 1$ je $E = 1$, $F = 0$, $G = f(u)^2$, pa je $K = -\frac{f''}{f}$.

Gauss-ova briljantna teorema

(Theorema Egregium, "Disquisitiones generales circa superficies curvas", "General investigation of curved surfaces")

Ova teorema je jedna od najvažnijih teorema XIX veka. Matematičari su na kraju XVIII veka (Euler, Monge) koristili Gauss-ovu krivinu, ali samo definisanu kao proizvod glavnih krivina. Kako glavne krivine površi zavise od načina smeštanja površi u $\mathbb{R}^3$, proizvod glavnih krivina nije posmatran kao unutrašnja osobina površi.

Teorema 2.19. (Gauss-ova Teorema egregium, 1827.) *Gauss-ova krivina elementarne površi je unutrašnja karakteristika površi.*

Drugim rečima, Gauss-ova krivina elementarne površi zavisi samo od prve osnovne forme i čuva se pri izometrijama.

Tvrđenje 2.23. *Neka je $f : S_1 \rightarrow S_2$ lokalna izometrija regularnih elementarnih površi r^1 i r^2 . Tada je*

$$K^1 = K^2 \circ f,$$

pri čemu su K^1 i K^2 Gauss-ove krivine površi r^1 i r^2 .

Dokaz. Koristiti Tvrđenje 2.5, odakle sledi da postoje parametrizacije površi r^1 i r^2 takve da su koeficijenti prve osnovne forme ovih površi isti, pa imaju i iste izvode, koristeći Gauss-ovu teoremu 2.19 (ili Brioschi-evu formulu), sledi da površi r^1 i r^2 imaju istu Gauss-ovu krivinu. $\square$

Naime, ukoliko su dve elementarne regularne površi lokalno izometrične, tada one imaju istu Gauss-ovu krivinu u odgovarajućim tačkama.

Posledica 2.5. *Sfera i ravan nisu lokalno izometrične jer je Gauss-ova krivina sfere poluprečnika R jednaka $\frac{1}{R^2}$, a Gauss-ova krivina ravni je 0. Dakle, svako preslikavanje dela sfere na ravan menja rastojanja.*

Da li važi i obrat?

Teorema 2.20. (Minding-ova teorema, 1839) *Dve elementarne regularne površi koje imaju istu konstantnu Gauss-ovu krivinu su lokalno izometrične.*

Tvrđenje 2.24. *Površ čija je Gauss-ova krivina jednaka $c > 0$ ima lokalno istu unutrašnju geometriju kao sfera poluprečnika $\frac{1}{\sqrt{c}}$.*

Površ čija je Gauss-ova krivina nula ima lokalno istu unutrašnju geometriju kao ravan. (Takve površi se nazivaju "razvojne", "developable", mogu se "razviti u ravan".)

Površ čija je Gauss-ova krivina jednaka $c < 0$ ima lokalno istu unutrašnju geometriju kao hiperbolička ravan.

Vrednost Gauss-ove krivine određuje prirodu geometrije koja opisuje površ. U najjednostavnijem slučaju, kada je K konstantno: to je euklidska geometrija, za $K = 0$, eliptička geometrija, za $K > 0$, hiperbolička geometrija, za $K < 0$. Gauss je prvi uveo termin "ne-euklidske geometrije".

Gauss-ova briljantna teorema tvrdi da se Gauss-ova krivina površi smeštene u trodimenzioni prostor može razumeti kao unutrašnja osobina površi. "Stanovnici" površi mogu izučavati Gauss-ovu krivinu površi bez ulaganja u $\mathbb{R}^3$, tj. mogu posmatrati krivinu površi na kojoj žive čak i bez znanja o trodimenzionom prostoru u koji su smešteni.

Gauss-ova krivina se može meriti proveravanjem koliko se obim male kružnice razlikuje od $2r\pi$, tj. od vrednosti koju bi imao u euklidskom prostoru. Ukoliko bi

obim bio manji od $2r\pi$, prostor ima pozitivnu Gauss-ovu krivinu, ukoliko je veći ima negativnu i ukoliko je jednak, prostor ima Gauss-ovu krivinu nula.

Difeomorfizmi koji čuvaju Gauss-ovu krivinu ne moraju biti lokalne izometrije.

Primer 2.17.

$$\begin{aligned} r^1(u, v) &= (av \cos u, av \sin u, b \log v), \\ r^2(u, v) &= (av \cos u, av \sin u, bu) \end{aligned}$$

$$f(av \cos u, av \sin u, b \log v) = (av \cos u, av \sin u, bu)$$

$$K^1 = K^2 = -\frac{b^2}{b^2 + a^2 v^2}$$

Dakle, f je difeomorfizam koji čuva Gauss-ovu krivinu. Kako su koeficijenti prve forme:

$$E^1 = a^2 v^2, G^1 = a^2 + \frac{b^2}{v^2}, E^2 = b^2 + a^2 v^2, G^2 = a^2, F^1 = F^2 = 0$$

f nije izometrija za parametrizacije r^1 i r^2 .

Pored toga, ne postoji nijedna lokalna izometrija između ove dve površi, jer... Dakle, ne važi obrat Gauss-ove teoreme.

Primer 2.18. $r(u, v) = (u, v, u^3 - 3uv^2)$ $K = -\frac{36(u^2 + v^2)}{(1 + 9u^4 + 18u^2v^2 + 9v^4)^2}$ Gauss-ova krivina je invarijantna pri rotacijama oko z -ose, iako površ nema tu osobinu. Samo rotacije za celobrojni umnožak od $\frac{2\pi}{3}$ su izometrije. Dakle, obrat Gauss-ove teoreme ne važi.

2.10 Geodezijske linije

Definicija 2.22. Kriva α čiji trag pripada tragu regularne elementarne površi r se naziva **geodezijska linija** ukoliko je vektorsko polje $\alpha''(t)$ nula ili "normalno na površ", tj. paralelno normalnom vektorskom polju $n(t)$, za sve vrednosti parametra t .

Tvrđenje 2.25. Svaka geodezijska linija ima konstantnu brzinu.

Dokaz. $\frac{d}{dt} \|\alpha'(t)\|^2 = \frac{d}{dt} \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = 2 \langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle = 0$ □

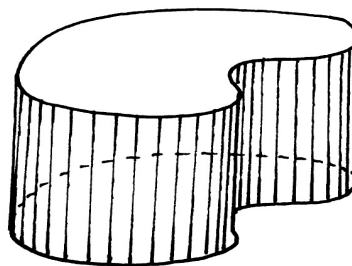
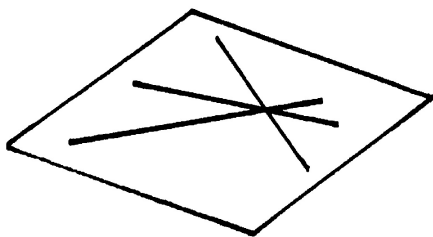
Neka je $\|\alpha'(t)\| = \lambda$. Tada je $\tilde{\alpha}(t) = \alpha(\frac{t}{\lambda})$ prirodna reparametrizacija krive α . Tada je $\frac{d^2}{dt^2} \tilde{\alpha}(t) = \frac{1}{\lambda^2} \frac{d^2}{dt^2} \alpha(t)$. Odavde sledi da je prirodna reparametrizacija geodezijske linije takođe geodezijska linija, pa se uvek možemo, ukoliko želimo, ograničiti na izučavanje geodezijskih linija jedinične brzine. Međutim, u opštem slučaju, reparametrizacija geodezijskih linija neće biti geodezijska linija. Zbog toga se često koristi sledeća ("ekvivalentna") definicija geodezijskih linija.

Tvrđenje 2.26. Kriva jedinične brzine α na površi r je geodezijska linija ako i samo ako je geodezijska krivina krive α svuda nula, duž cele krive.

Dokaz. Dokaz sledi koristeći Definiciju 2.17 geodezijske krivine. □

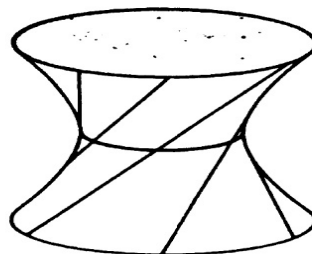
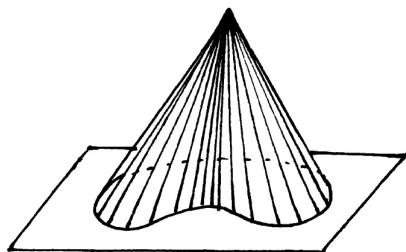
Imajući u vidu Tvrđenje 2.26, geodezijska linija elementarne regularne površi se često definiše kao kriva jedinične brzine čija je geodezijska krivina svuda nula.

Tvrđenje 2.27. Kriva α jedinične brzine na elementarnoj površi je geodezijska akko je $[n, T, T'] = 0$.



Tvrđenje 2.28. Prava ili deo prave na površi je geodezijska linija.

Dokaz. Uočimo prirodnu parametrizaciju prave $\alpha(s) = a + bs$, pri čemu su $a, b \in \mathbb{R}^3$ konstantni vektori, b je jedinični. Tada je $\alpha''(s) = 0$, pa je $\kappa_g(s) = 0$. □



Primer: Koristeći Tvrdjenje 2.28, zaključujemo da su sve prave u ravni geodezijske linije, kao i generatriše cilindara i konusa. Takođe, generatriše pravolinijskih provši su njihove geodezijske linije, npr. generatriše jednokrlnog hiperboloida.

Tvrdjenje 2.29. *Svako normalno sečenje površi je geodezijska linija.*

Dokaz. Tvrdjenje... $\kappa_g = 0$ i koristiti Tvrdjenje 2.26. □

Primer: Svi veliki krugovi sfere su geodezijske linije.

Veliki krug je presek sfere i ravni koja sadrži centar sfere S . Dakle, za tačku P koja pripada velikom krugu, SP pripada ovoj ravni, pa je ova ravan normalna na sferu i veliki krug je normalno sečenje. Namerno nismo koristili termin "trag krive" ... Znamo da je za sferu $n(u, v) = \pm \frac{1}{R} r(u, v)$.

Presek cilindra (ne obavezno kruznog) i konusa i ravni Π koja je normalna na osu cilindra i konusa je geodezijska linija. Na primer, ukoliko je osa cilindra z -osa, parametrizacija cilindra je $r(u, v) = (f(u), g(u), v)$. Tada je $n(u, v) = \frac{(f_u, -g_u, 0)}{\sqrt{f_u^2 + g_u^2}}$. Dakle, n je normalno na z -osu i paralelno ravni Π , tj. Π je normalno na cilindar.

Tvrdjenja 2.28 i 2.29 nisu dovoljna da se odrede geodezijske linije površi.

Teorema 2.21. *Kriva $\alpha(t) = r(u(t), v(t))$ čija slika pripada tragu elementarne regularne površi $r : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ je geodezijska linija ako i samo ako*

$$\frac{d}{ds}(Eu' + Fv') = \frac{1}{2}(E_u(u')^2 + 2F_u u'v' + G_u(v')^2), \quad (2.65)$$

$$\frac{d}{ds}(Fu' + Gv') = \frac{1}{2}(E_v(u')^2 + 2F_v u'v' + G_v(v')^2). \quad (2.66)$$

Dokaz. Kako je $[r_u, r_v]$ baza tangentnog prostora $T(r)$, kriva α je geodezijska linija ako i samo ako je α'' normalno na r_u i r_v . $\alpha' = u'r_u + v'r_v$

$$\left\langle \frac{d}{dt}(u'r_u + v'r_v), r_u \right\rangle = 0, \quad \left\langle \frac{d}{dt}(u'r_u + v'r_v), r_v \right\rangle = 0. \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{d}{dt}(u'r_u + v'r_v), r_u \right\rangle &= \frac{d}{dt} \left\langle u'r_u + v'r_v, r_u \right\rangle - \left\langle u'r_u + v'r_v, \frac{d}{dt}r_u \right\rangle \\
&= \frac{d}{dt}(Eu' + Fv') - \left\langle u'r_u + v'r_v, u'r_{uu} + v'r_{uv} \right\rangle \\
&= \frac{d}{dt}(Eu' + Fv') - ((u')^2 \left\langle r_u, r_{uu} \right\rangle + \\
&\quad + u'v'(\left\langle r_u, r_{uv} \right\rangle + \left\langle r_v, r_{uu} \right\rangle + (v')^2 \left\langle r_v, r_{uv} \right\rangle)
\end{aligned}$$

U u Teoreme... (Gauss-ove formule) zaključili smo:

$$\left\langle r_u, r_{uu} \right\rangle = \frac{1}{2}E_u, \quad \left\langle r_v, r_{uv} \right\rangle = \frac{1}{2}G_u, \quad \left\langle r_u, r_{uv} \right\rangle + \left\langle r_v, r_{uu} \right\rangle = \left\langle r_u, r_v \right\rangle_u = F_u$$

Zamenom se dobija jednačina (2.65).

Slično se dokazuje i jednačina (2.66). $\square$

Diferencijalne jednačine (2.65)-(2.66) se često nazivaju "geodezijske jednačine". Međutim, uobičajeno je da se i jednačine (2.68)-(2.69) tako nazivaju.

Posledica 2.6. *Izometrija površi "čuva" geodezijske linije, tj. slika geodezijske linije je geodezijska linija.*

Dokaz. Dve izometrične površi mogu biti parametrizovane tako da imaju iste prve osnovne forme (Tvrdjenje...). Reparametrizacija površi ne menja geodezijske linije (Primerba...). Geodezijske jednačine ... zavise samo od koeficijenata prve osnovne forme. $\square$

Teorema 2.22. *Neka je $\alpha(t)$ kriva čiji trag pripada tragu elementarne regularne površi $r : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$, tj. $\alpha(t) = r(u(t), v(t))$ za neke funkcije u, v . Tada je α geodezijska linija akko*

$$u'' + \Gamma_{11}^1(u')^2 + 2\Gamma_{12}^1u'v' + \Gamma_{22}^1(v')^2 = 0, \quad (2.68)$$

$$v'' + \Gamma_{11}^2(u')^2 + 2\Gamma_{12}^2u'v' + \Gamma_{22}^2(v')^2 = 0. \quad (2.69)$$

Dokaz. Koristiti izraz za α'' ... $\square$

Može se dokazati da su Teorema 2.21 i Teorema 2.22 ekvivalentne.

Primer 2.19. *Odrediti geodezijske linije kružnog cilindra.*

$r(u, v) = (R \cos u, R \sin u, v)$, $\Gamma_{ij}^k = 0$, pa se jednačine (2.68)-(2.69) svode na

$$u''(s) = 0, \quad v''(s) = 0,$$

odakle sledi

$$u(s) = c_1 s + d_1, \quad v(s) = c_2 s + d_2, \quad c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}. \quad (2.70)$$

Dakle, sve geodezijske linije na cilindru su oblika

$$\alpha(s) = r(u(s), v(s)) = (R \cos(c_1 s + d_1), R \sin(c_1 s + d_1), c_2 s + d_2).$$

S obzirom da je geodezijska linija α prirodno parametrizovana, sledi

$$\|\alpha'(s)\|^2 = I(\alpha'(s), \alpha'(s)) = E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2 = 1. \quad (2.71)$$

Kako su koeficijenti prve osnovne forme cilindra $E = R^2$, $F = 0$, $G = 1$, koristeći (2.70), dobija se

$$c_1^2 R^2 + c_2^2 = 1, \quad (2.72)$$

Diskutujući vrednosti koje konstante c_1 , c_2 mogu imati, zaključujemo da su geodezijske linije cilindra prave, krugovi i heliksi:

1. $c_1 = 0$, iz (2.72) sledi $c_2 = \pm 1$, $u(s) = d_1$, $v(s) = c_2(s) + d_2$, pa je

$$\alpha_1(s) = (R \cos d_1, R \sin d_1, \pm s + d_2), \quad \text{prava (meridijan)}$$

2. $c_2 = 0$, $c_1 = \pm \frac{1}{R}$, $u(s) = \pm \frac{1}{R}s + d_1$, $v(s) = d_2$,

$$\alpha_2(s) = (R \cos(\pm \frac{1}{R}s + d_1), R \sin(\pm \frac{1}{R}s + d_1), d_2), \quad \text{krug (paralela)}$$

3. $c_1, c_2 \neq 0$, $c_2 = \pm \sqrt{1 - c_1^2 R^2}$

$$\alpha_3(s) = (R \cos(c_1 s + d_1), R \sin(c_1 s + d_1), \pm \sqrt{1 - c_1^2 R^2} s + d_2), \quad \text{kružni heliks}$$

Tvrđenje 2.30. Svaki meridijan rotacione površi je geodezijska linija. Paralela rotacione površi je geodezijska linija akko su tangente meridijana paralelne osi rotacije u svim tačkama paralele.

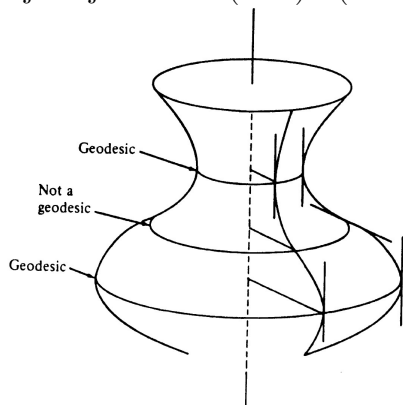
Dokaz. I način:

Christoffel-ovi simboli rotacione površi... Koristeći ... sledi da su jednačine geodezijskih linija (2.68)-(2.69):

$$u'' - f f_u (v')^2 = 0, \quad (2.73)$$

$$v'' + 2 \frac{f_u}{f} u' v' = 0. \quad (2.74)$$

Neka su $\alpha(s), \beta(s)$ redom meridijani i paralele rotacione površi... Za meridijane su zadovoljene jednačine (2.73) i (2.74), a za paralele...



II način:

Kako su za rotacionu površ $r(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$, $f_u^2 + g_u^2 = 1$, $f > 0$ koeficijenti prve osnovne forme $E = f_u^2 + g_u^2 = 1$, $F = 0$, $G = f^2(u)$, koristeći (...) sledi

$$u'' = f f_u (v')^2, \quad \frac{d}{ds}(f^2 v') = 0. \quad (2.75)$$

S obzirom da je geodezijska linija α prirodno parametrizovana, koristeći (2.71) i $E = 1$, $F = 0$, $G = f^2(u)$, sledi

$$(u')^2 + f^2(v')^2 = 1. \quad (2.76)$$

Kako za meridijane važi $v = v_0$, druga jednačina sistema (2.75) je zadovoljena. Kako je $v' = 0$, to iz (2.76) sledi $u' = \pm 1$, tj. u' je konstanta, pa je i prva jednačina sistema (2.75) zadovoljena. Dakle, meridijani rotacione površi su geodezijske linije.

Ukoliko je kriva paralela, tj. $u = u_0$, tada je $v' = \pm \frac{1}{f(u_0)}$, koristeći (2.76). Kako je $f > 0$, $v' \neq 0$, iz prve jednačine sistema (2.75) sledi $f_u = 0$. S druge strane, ukoliko je $f_u = 0$ za $u = u_0$, prva jednačina sistema (2.75) je automatski zadovoljena ($f_u(u_0) = 0$). S obzirom da je $v' = \pm \frac{1}{f(u_0)}$, druga jednačina sistema (2.75) je zadovoljena jer je $f(u) = f(u_0)$ konstanta.

Dakle, paralela $u = u_0$ je geodezijska linija akko je $f_u = 0$ za $u = u_0$, tj. ukoliko je u_0 stacionarna tačka funkcije f .

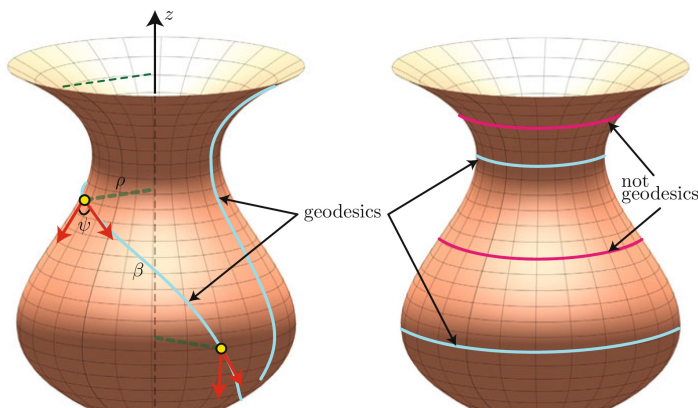
Vektor brzine meridijana $v = v_0$ je $\frac{d}{ds}r(s, v_0) = (f'(s) \cos v_0, f'(s) \sin v_0, g'(s))$. (S obzirom da je meridijan dobijen rotacijom prirodno parametizovane krive, meridijan je takođe prirodno parametrizovan.) Tangentni vektor na meridijan u tački (u_0, v_0) je $(0, 0, g'(u_0))$ (s obzirom da je $f'(u_0) = 0$), tj. paralelan je vektoru ose rotacije $(0, 0, 1)$. $\square$

Protumačite prethodno tvrđenje koristeći normalna sečenja.

Naravno, ovo nisu sve geodezijske linije rotacionih površi. Da li možemo da odredimo sve geodezijske linije (rotacionih) površi?

Primer 2.20. Uočimo rotacionu površ $r(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$, $f_u^2 + g_u^2 = 1$, $f > 0$. Neka je $\theta \in [0, \pi]$ ugao koji geodezijska linija zaklapa sa paralelom koja je preseca i neka je R poluprečnik paralele u tački preseka. Tada važi **Clairaut-ova** relacija:

$$R \cos \theta = \text{const.} \quad (2.77)$$



Koristeći (2.75), tj. $\frac{d}{ds}(f^2 v') = 0$ sledi $f^2 v' = \text{const.}$ Primenom formule za ugao između dve krive... sledi

$$\cos \theta = \frac{\langle r_v, u' r_u + v' r_v \rangle}{\|r_v\|} = f v'.$$

Kako je $f = R$ u tački preseka, sledi (2.77).

Dokazati da važi i obrnuto, tj., ukoliko je $R \cos \theta$ konstantno i nijedna tačka nema paralelan tangentni vektor, kriva je geodezijska.

Primetimo da Clairaut-ova relacija važi i za regularnu elementarnu površ (klase ≥ 2) parametrizovanu tako da su joj koordinatne linije ortogonalne, a koeficijenti prve forme E i G zavise samo od jednog parametra, tj. važi i nešto opštije od primera (2.20):

Tvrđenje 2.31. Neka je $\alpha(s) = r(u_1(s), v_1(s))$ prirodno parametrizovana geodezijska linija čiji trag pripada tragu površi $r(u, v)$, takvoj da je $E = E(u)$, $F = 0$, $G = G(u)$. Dokazati da je

$$\sqrt{G} \cos \theta = \text{const}, \quad (2.78)$$

gde je θ ugao između geodezijske linije α i v -parametarske krive $u = \text{const}$.

Dokaz. S obzirom da je $F = 0$, koristeći formule (2.12), jedini Christoffel-ovi simboli različiti od nula su

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{E_u}{2E}, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{G_u}{2E}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{G_u}{2G}. \quad (2.79)$$

Koristeći Teoremu 2.22, jednačine geodezijskih linija (2.68)-(2.69) su

$$u_1'' + \frac{E_u}{2E}(u_1')^2 - \frac{G_u}{2E}(v_1')^2 = 0, \quad (2.80)$$

$$v_1'' + \frac{G_u}{G}u_1'v_1' = 0. \quad (2.81)$$

Kako je

$$\begin{aligned} v_1''(s) + \frac{G_u(u_1(s))}{G(u_1(s))}u_1'(s)v_1'(s) = 0 &\Leftrightarrow v_1''(s)G(u_1(s)) + G_u(u_1(s))u_1'(s)v_1'(s) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{d}{ds}(v_1'(s)G(u_1(s))) = 0 \end{aligned}$$

to je

$$v_1'(s)G(u_1(s)) = \text{const} = C. \quad (2.82)$$

Koristeći (ugao između dve krive...), za ugao θ između geodezijske linije α i v -parametarske krive $u = u_0$, $v = v(s)$ važi

$$\begin{aligned} \cos \theta = \frac{\langle T_\alpha, r_v \rangle}{\|T\| \cdot \|r_v\|} &= \frac{\langle \alpha', r_v \rangle}{\sqrt{G}} = \frac{\langle u_1' r_u + v_1' r_v, r_v \rangle}{\sqrt{G}} = v_1' \sqrt{G} \\ \sqrt{G} \cos \theta &= v_1' G = \text{const} \end{aligned}$$

□

Primedba 2.11. Oznaka $G = G(u_1(s))$ u prethodnom dokazu samo naglašava uslov Tvrdjenja 2.31 da koeficijent G zavisi samo od jedne promenljive.

Tvrđenje 2.31 važi i u obratnom smeru, tj. ukoliko za prirodno parametrizovanu krivu α i v -parametarske krive $u = \text{const}$ zadovoljena relacija (2.78), tada je α geodezijska linija. Dovoljno je još samo dokazati da je zadovoljena i jednačina (2.80). S obzirom da je α prirodno parametrizovana, važi

$$1 = \|\alpha'(s)\|^2 = E(u_1')^2 + G(v_1')^2.$$

Zamenom v_1' iz (2.82), dobija se

$$u_1' = \pm \sqrt{\frac{G - C^2}{GE}}.$$

Diferenciranjem se izračuna u_1'' , pa se lako dokaže da važi (2.80).

Proučiti primere iz ispitnih rokova jun 2 2014, drugi kolokvijum 2011.

Ukoliko je $r = r(u, v)$ regularna elementarna površ takva da su u i v -parametarske linije ortogonalne i da koeficijenti prve osnovne forme zavise samo od jednog parametra, tada se geodezijske linije mogu naći kvadraturom, tj. važi:

Tvrđenje 2.32. Neka je $r = r(u, v)$ regularna elementarna površ (klase ≥ 2) čiji koeficijenti prve osnovne forme zadovoljavaju uslove $E = E(u)$, $F = 0$, $G = G(u)$. Tada važi:

1. u -parametarske krive $v = v_0$ su geodezijske linije;
2. v -parametarske krive $u = u_0$ su geodezijske linije akko $G_u(u_0) = 0$;
3. prirodno parametrizovane krive oblika $\alpha(s) = r(u(s), v(u(s)))$ su geodezijske linije akko

$$v(t) = \pm \int \frac{C\sqrt{E}}{\sqrt{G}\sqrt{G-C^2}} dt + C_1, \quad C, C_1 = \text{const.} \quad (2.83)$$

Dokaz. S obzirom da je $F = 0$, koristeći formule (za geodezijsku krivinu) sledi

$$\kappa_g = -\frac{E_v}{2E\sqrt{G}} = 0,$$

tj. u -parametarska kriva je geodezijska linija (koristeći Tvrđenje...).

Za v -parametarsku krivu je

$$\kappa_g = \frac{G_u(u_0)}{2G(u_0)\sqrt{E(u_0)}},$$

tj. kriva $u = u_0$ je geodezijska linija akko $G_u(u_0) = 0$.

Neka je $\alpha(u(s), v(u(s)))$ prirodno parametrizovana geodezijska linija površi r . Tada je

$$1 = \|\alpha'(s)\|^2 = E(u(s)) (u'(s))^2 + G(u(s)) (v'(u(s)))^2 (u'(s))^2.$$

Koristeći (2.82), sledi

$$v'(u(s)) = \frac{C}{G(u(s)) u'(s)},$$

pa je

$$u'(s) = \pm \sqrt{\frac{G-C^2}{EG}},$$

a zatim i

$$v'(u(s)) = \pm C \sqrt{\frac{E}{G(G-C^2)}}.$$

S obzirom da i u Tvrđenju 2.31 važi obrat, lako se proveriti da važi i ovde. □

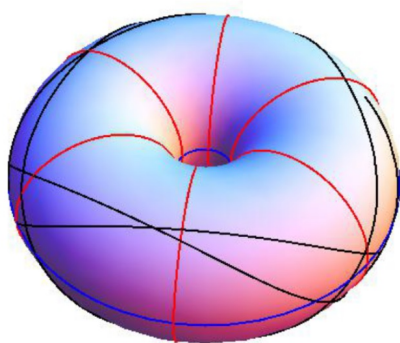
Primedba 2.12. Uslov $F = 0$ je ekvivalentan uslovu da su koordinatne linije ortogonalne (videti...).

Uslov $E = E(u)$, $G = G(u)$ znači da koeficijenti zavise samo od jednog parametra.

Koje površi koje smo izučavali zadovoljavaju ove uslove?

Rotacione površi

$$v(t) = \pm \int \frac{1}{f\sqrt{f^2 - C^2}} dt + C_1.$$



Pogledati zadatak 1. drugi kolokvijum 2011.

Teorema 2.23. Egzistencija i jedinstvenost geodezijskih linija Neka je P tačka na tragu regularne elementarne površi $r : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{P} = r(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^3$ i neka je X jedinični vektor u $T_P(r)$. Tada, za $s_0 \in \mathbb{R}$, postoji jedinstvena geodezijska linija α čiji trag pripada tragu površi r , takva da je $\alpha(s_0) = P$ i $\alpha'(s_0) = X$.

Dokaz. Neka je $P = r(a, b)$, $X = X_1 r_u + X_2 r_v$. Tada za krivu α čiji trag pripada tragu površi r važi: $\alpha(s) = r(u(s), v(s))$, trag krive sadrži tačku P ukoliko $u(s_0) = a$, $v(s_0) = b$, $u'(s_0) = X_1$, $v'(s_0) = X_2$. Sistem diferencijalnih jednačina ... se može zapisati u obliku

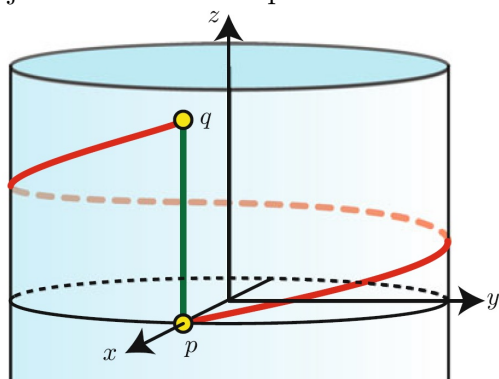
$$u''(s) = f(u(s), v(s), u'(s), v'(s)), \quad (2.84)$$

$$v''(s) = g(u(s), v(s), u'(s), v'(s)), \quad (2.85)$$

za glatke funkcije f, g . Primenom teoreme o egzistenciji i jedinstvenosti sistema diferencijalnih jednačina, za početne uslove $u(s_0) = a$, $v(s_0) = b$, $u'(s_0) = X_1$, $v'(s_0) = X_2$, postoji jedinstveno rešenje, tj. $u(s), v(s)$. $\square$

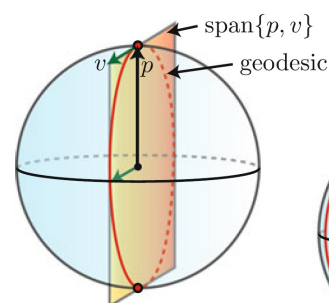
Trag geodezijske linije α jednoznačno određene Teoremom 2.23 sadrži tačku P i njen tangenti vektor je X . Dakle, za datu tačku i dati jedinični vektor, postoji tačno jedna geodezijska linija koja sadrži tu tačku i čiji je to tangenti vektor.

Odrediti sve geodezijske linije ravni, sfere, cilindra, konusa, rotacione površi, jednokrillnog hiperboloida, ... Za rotacionu površ važi: svaki meridijan je geodezijska linija, a paralela je geodezijska linija akko su tangente meridijana paralelne osi rotacije u svim tačkama paralele.

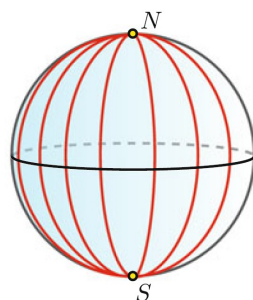


Teorema 2.24. *Neka je α kriva na površi $\mathcal{P}$ parametrizovana dužinom luka i neka α sadrži tačke $P = \alpha(a)$ i $Q = \alpha(b)$. Ako je α najkraća kriva između tačaka P i Q , tada je α geodezijska linija.*

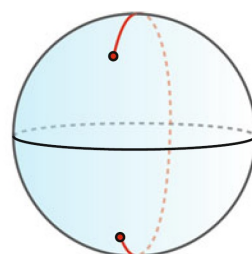
Obrnuto nije tačno. Geodezijske linije ne moraju minimizirati rastojanje.



Geodesics are great circles.



There are infinitely many geodesic segments from N to S .



This geodesic is not the shortest curve in S^2 between its endpoints.

2.11 Paralelno pomeranje

Definicija 2.23. Tangentno vektorsko polje površi duž krive $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ čiji trag pripada tragu površi $r : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ je funkcija X koja svakom $t \in [a, b]$ dodeljuje tangentni vektor $X(t)$ na površ r u tački $\alpha(t)$. Tangentno vektorsko polje $X(t)$ duž krive $\alpha(t)$ je **diferencijabilno** ako je diferencijabilna funkcija $X : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$. Diferencijabilno tangentno vektorsko polje $X(t)$ duž krive $\alpha(t)$ je **paralelno duž krive** $\alpha(t)$ ukoliko je $\frac{dX}{dt}$ normalno na površ.

Često koristimo i termin "tangentni vektor $X(t)$ krive $\alpha(t)$ na površi r ".

Primeri:

(1) Neka je $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), 0)$ kriva u ravni $r(u, v) = (u, v, 0)$. Odrediti sva paralelna tangentna vektorska polja duž krive α .

(2) Neka je $X(t)$ jedinično tangentno vektorsko polje jedinične sfere duž ekvatora koje je paralelno sa z -osom. Da li je ono paralelno?

(3) Da li je vektorsko polje tangentnih vektora ekvatora jedinične sfere paralelno duž ekvatora?

(4) Da li je tangentno vektorsko polje jedinične sfere duž paralele $u = \frac{\pi}{4}$ koje je usmereno ka severnom polu paralelno?

Teorema 2.25. Neka je $\alpha(t) = r(\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ regularna kriva na površi $r : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ i $X(t)$ tangentno diferencijabilno vektorsko polje duž krive α . Tada je vektorsko polje $X(t)$ paralelno duž krive α ako i samo ako je

$$\frac{dX_k}{dt} + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k X_i \frac{d\alpha_j}{dt} = 0, \quad k = 1, 2, \quad \text{tj.}$$

$$\begin{aligned} \frac{dX_1}{dt} + \Gamma_{11}^1 X_1 \frac{d\alpha_1}{dt} + \Gamma_{12}^1 X_1 \frac{d\alpha_2}{dt} + \Gamma_{21}^1 X_2 \frac{d\alpha_1}{dt} + \Gamma_{22}^1 X_2 \frac{d\alpha_2}{dt} &= 0 \\ \frac{dX_2}{dt} + \Gamma_{11}^2 X_1 \frac{d\alpha_1}{dt} + \Gamma_{12}^2 X_1 \frac{d\alpha_2}{dt} + \Gamma_{21}^2 X_2 \frac{d\alpha_1}{dt} + \Gamma_{22}^2 X_2 \frac{d\alpha_2}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Primetimo da sistem (2.86) zavisi samo od koeficijenata prve osnovne forme, tj. paralelnost vektorskog polja je unutrašnja karakteristika.

Teorema 2.26. Neka je α regularna kriva na površi r klase C^2 tj. $\alpha((a, b)) \subset r(\mathcal{U})$ i X^0 tangentni vektor na površi r u tački $\alpha(t_0)$ (tj. $X^0 \in T_{\alpha(t_0)}r$). Tada postoji jedinstveno tangentno vektorsko polje $X(t)$ paralelno duž krive $\alpha(t)$ takvo da je $X(t_0) = X^0$.

Definicija 2.24. Jedinstveno tangentno vektorsko polje $X(t)$ paralelno duž krive $\alpha(t)$ takvo da je $X(t_0) = X^0$ naziva se **paralelno pomeranje** vektora X^0 duž krive α .

Teorema 2.27. Neka su $X(t)$ i $Y(t)$ paralelna tangentna vektorska polja duž regularne krive $\alpha(t)$ na površi $\mathcal{P}$. Tada se intenziteti ovih vektorskih polja, kao i ugao koji ona zaklapaju, ne menjaju duž krive α .

Definicija 2.25. Regularna kriva $\alpha(t)$ na površi $\mathcal{P}$ je **potpuno prava** ako je vektorsko polje $\frac{d\alpha}{dt}$ paralelno duž krive α .

Teorema 2.28. Regularna kriva $\alpha(t)$ na površi $\mathcal{P}$ je potpuno prava ako i samo ako je $\frac{dt}{ds}$ konstanta i $\alpha(t(s))$ je prirodno parametrizovana geodezijska linija. (s je dužina luka.)

Tj. potpuno prava linija se od geodezijske linije može razlikovati samo za afinu promenu parametra.

Posledica 2.7. Ako je regularna kriva α na površi $\mathcal{P}$ parametrizovana dužinom luka, tada je ona potpuno prava akko je geodezijska, tj.

Vektorsko polje tangentnih vektora prirodno parametrizovane krive je paralelno duž α akko je α geodezijska linija.

Uporediti sistem jednačina (2.86) u Teoremi 2.25 sa sistemom u Teoremi 2.22.

Kovarijantni izvod tangentnog vektorskog polja je normalna projekcija $\frac{dX}{dt}$ na tangentni prostor, tj. $\frac{DX}{dt} = \frac{dX}{dt} - \langle \frac{dX}{dt}, n \rangle n$, $n > n$.

Specijalno, u slučaju ravni, $E = G = 1$, $F = 0$, pa je $\Gamma_{ij}^k = 0$ i $\frac{DX}{dt} = \frac{dX}{dt}$.

Primer 2.21. Paralelno pomeranje duž paralele sfere.

Na jediničnoj sferi $r(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$ odrediti paralelno pomeranje tangentnog vektora sfere $X^0 = r_u(\frac{\pi}{4}, 0)$ duž paralele $u = \frac{\pi}{4}$.

Kako trag krive α pripada tragu jedinične sfere sa centrom u koordinatnom početku, to je $\alpha(t) = r(\alpha_1(t), \alpha_2(t))$, $\alpha_1(t) = \frac{\pi}{4}$, $\alpha_2(t) = t$. Vektor

$$X^0 = r_u(\frac{\pi}{4}, 0) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$$

je tangentni vektor tangentnog vektorskog prostora sfere u tački $P = r(\frac{\pi}{4}, 0) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

Kako je $E = 1$, $F = 0$, $G = \cos^2 u$, $EG - F^2 = \cos^2 u$, to je $\Gamma_{22}^1 = -\sin u \cos u$, $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = -\tan u$, ostali Christoffel-ovi simboli su 0. Koristeći sistem (2.86) za $u = \frac{\pi}{4}$ dobijamo:

$$\frac{dX_1}{dt} - \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} X_2 \frac{d\alpha_2}{dt} = 0 \quad (2.87)$$

$$\frac{dX_2}{dt} - \tan \frac{\pi}{4} X_1 \frac{d\alpha_2}{dt} = 0, \quad (2.88)$$

tj.

$$\frac{dX_1}{dt} - \frac{1}{2} X_2 = 0 \quad (2.89)$$

$$\frac{dX_2}{dt} - X_1 = 0. \quad (2.90)$$

Lako se proveriti da je rešenje ovog sistema:

$$X_1(t) = \frac{1}{2} e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t} + \frac{1}{2} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t} \quad (2.91)$$

$$X_2(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t} - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t} \quad (2.92)$$

(Opšte rešenje je $X_2 = C_1 e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t} + C_2 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t}$, $X_1 = \frac{dX_2}{dt} = C_1 \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t} - C_2 \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t}$. Kako je $r_u = X^0 = X_1^0 r_u + X_2^0 r_v$ to je $X_1(0) = 1$, $X_2(0) = 0$, dobijaju se C_1 i C_2 .) Koristeći $r_u = (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u)$, $r_v = (-\cos u \sin v, \cos u \cos v, 0)$, lako se izračuna da je

$$\begin{aligned} X(2\pi) &= X_1(2\pi) r_u\left(\frac{\pi}{4}, 2\pi\right) + X_2(2\pi) r_v\left(\frac{\pi}{4}, 2\pi\right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} (e^{\sqrt{2}\pi} + e^{-\sqrt{2}\pi}) (-1, 0, 1) + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} (e^{\sqrt{2}\pi} - e^{-\sqrt{2}\pi}) (0, 1, 0) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} (-e^{\sqrt{2}\pi} - e^{-\sqrt{2}\pi}, \sqrt{2} e^{\sqrt{2}\pi} - \sqrt{2} e^{-\sqrt{2}\pi}, e^{\sqrt{2}\pi} + e^{-\sqrt{2}\pi}), \end{aligned}$$

što je (očigledno) različito od $X(0) = X^0 = r_u\left(\frac{\pi}{4}, 0\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ($e^{\sqrt{2}\pi} \neq e^{-\sqrt{2}\pi}$).

3 Dodatak

3.1 Neke poznate krive

1. prava $\alpha(t) = p + tq$, $p, q \in \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, $q \neq 0$, $t \in (-\infty, \infty)$,
 $\alpha(t) = (p_1, p_2, p_3) + t(q_1, q_2, q_3)$;
2. kružnica $\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t)$, $t \in (0, 2\pi]$, $r > 0$; $x^2 + y^2 = r^2$;
3. elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\alpha(t) = (a \cos t, b \sin t)$, $t \in (0, 2\pi]$, $a, b > 0$;
4. hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\alpha(t) = (a \cosh t, b \sinh t)$, $t \in (0, 2\pi]$, $a, b > 0$;
5. parabola $y^2 = 2px$, $\alpha(t) = (2pt^2, 2pt)$;
6. astroida $\alpha(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t)$, $t \in (0, 2\pi]$, $a > 0$, $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $a > 0$;
7. Bernoulli-jeva lemniskata $\alpha(t) = \left(\frac{a \cos t}{1 + \sin^2 t}, \frac{a \sin t \cos t}{1 + \sin^2 t} \right)$, $t \in (0, 2\pi)$;
8. Cassini-jevi ovali $(x^2 + y^2)^2 + 2a^2(y^2 - x^2) = b^4 - a^4$;
9. Descartes-ov list $\alpha(t) = \left(\frac{3t}{1 + t^3}, \frac{3t^2}{1 + t^3} \right)$, $x^3 + y^3 = 3xy$;
10. Diocles-ova cisoida $\alpha(t) = \left(\frac{2at^2}{1 + t^2}, \frac{2at^3}{1 + t^2} \right)$, $x^3 + xy^2 - 2ay^2 = 0$;
11. cikloide $\alpha(t) = (at - b \sin t, a - b \cos t)$, $t \in (0, 2\pi]$, za $a = b$, $x = a \arccos \frac{a - y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}$;
12. epicikloida $\alpha(t) = (R(m + 1) \cos(mt) - Rm \cos t(m + 1), R(m + 1) \sin(mt) - Rm \sin t(m + 1))$;
13. hipocikloida $\alpha(t) = (R(1 - m) \cos(mt) + Rm \cos t(1 - m), R(m - 1) \sin(mt) + Rm \sin t(m - 1))$;
14. kardioida $\alpha(t) = (2a \cos t(1 + \cos t), 2a \sin t(1 + \cos t))$, $t \in (0, 2\pi)$, $a > 0$;
15. lančanica $y = a \cosh \frac{x}{a}$, $a > 0$, $\alpha(t) = \left(t, a \cosh \left(\frac{t}{a} \right) \right)$;

16. Archimedes-ova spirala $\rho(\theta) = a\theta$;
17. logaritamska spirala $\rho(\theta) = ae^{b\theta}$;
18. sinusoidne spirale $\rho^m = a^m \cos m\theta$;
19. traktrisa ("dog curve") $\alpha(t) = a \left(\sin t, \cos t + \log \left(\tan \left(\frac{t}{2} \right) \right) \right)$;
20. (desni) kružni heliks $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, $a > 0$, $t \in (0, \infty)$;
21. (desni) konusni heliks $\alpha(t) = (at \cos t, at \sin t, bt)$, $a > 0$, $t \in (0, \infty)$;
22. Viviani-jeva kriva $\alpha(t) = a(1 + \cos t, \sin t, 2 \sin \frac{t}{2})$, $a > 0$;

3.2 Krivina i torzija nekih krivih

1. Krivina kružnice $\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t)$, $t \in (0, 2\pi]$ je $\kappa(t) = \frac{1}{r}$.

2. Krivina elipse $\alpha(t) = (a \cos t, b \sin t)$, $t \in (0, 2\pi]$ je

$$\kappa(t) = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}.$$

3. Krivina hiperbole $\alpha(t) = (a \cosh t, b \sinh t)$, $-\infty < t < \infty$ je

$$\kappa(t) = \frac{ab}{(a^2 \sinh^2 t + b^2 \cosh^2 t)^{\frac{3}{2}}}.$$

4. Krivina parabole $\alpha(t) = (t, \frac{t^2}{2p})$, $-\infty < t < \infty$ je

$$\kappa(t) = \frac{p^2}{(t^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

5. Krivina i torzija kružnog heliksa $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, $a > 0$, $t \in (0, \infty)$ su

$$\kappa(t) = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad \tau(t) = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

6. Krivina i torzija Viviani-jeve krive $\alpha(t) = a(1 + \cos t, \sin t, 2 \sin \frac{t}{2})$ su

$$\kappa(t) = \frac{a^2 \sqrt{13 + 3 \cos t}}{[a^2(3 + \cos t)]^{\frac{3}{2}}}, \quad \tau(t) = \frac{6 \cos \frac{t}{2}}{a(13 + 3 \cos t)}.$$

3.3 Neke poznate površi

1. ravan $Ax + By + Cz + D = 0$, $A^2 + B^2 + C^2 > 0$, $r(u, v) = r_0 + up + vq$, $-\infty < u, v < +\infty$, $r_0, p, q \in \mathbb{R}^3$, $r(\rho, \phi) = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, 0)$, $0 \leq \rho < +\infty$, $0 \leq \phi < 2\pi$;
2. kružni cilindar $x^2 + y^2 = R^2$, $r(u, v) = (R \cos u, R \sin u, v)$, $0 \leq u < 2\pi$, $-\infty < v < +\infty$;
3. cilindrična površ $r(u, v) = (u, f(u), v)$, $-\infty < u, v < +\infty$, $r(u, v) = \alpha(u) + v\alpha$, $\alpha < u < \beta$, $-\infty < v < +\infty$;
4. konusna površ $r(u, v) = (1 - v)p + v\alpha(u)$, $a < u < b$, $-\infty < v < +\infty$;
5. pravolinijska površ ("ruled surface") $r(u, v) = \alpha(u) + v\beta(u)$, $a < u < b$, $-\infty < v < +\infty$;
6. sfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $r(u, v) = (R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, R \sin u)$, $-\frac{\pi}{2} \leq u < \frac{\pi}{2}$, $0 \leq v \leq 2\pi$;
7. elipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $r(u, v) = (a \cos u \cos v, b \sin u \sin v, c \cos v)$, $0 \leq u < 2\pi$, $0 \leq v \leq \pi$;
8. jednograni hiperboloid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$,
 $r(u, v) = \left(\frac{a}{2} \left(u + \frac{1}{u} \right) \cos v, \frac{b}{2} \left(u + \frac{1}{u} \right) \sin v, \frac{c}{2} \left(u - \frac{1}{u} \right) \right)$, $u \neq 0$, $0 \leq v < \pi$;
9. dvograni hiperboloid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$,
 $r(u, v) = \left(\frac{a}{2} \left(u - \frac{1}{u} \right) \cos v, \frac{b}{2} \left(u - \frac{1}{u} \right) \sin v, \frac{c}{2} \left(u + \frac{1}{u} \right) \right)$, $u \neq 0$, $0 \leq v < \pi$;
10. rotacioni paraboloid $z = x^2 + y^2$, $r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2)$, $-\infty < u < +\infty$, $0 \leq v < 2\pi$;
11. eliptički paraboloid $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, $r(u, v) = \left(u, v, \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} \right)$, $-\infty < u, v < +\infty$;
12. hiperbolički paraboloid $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$, $r(u, v) = \left(u, v, \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} \right)$, $z = xy$,
 $r(u, v) = (u, v, uv)$, $-\infty < u, v < +\infty$, $z = x^2 - y^2$, $z > 0$, $r(u, v) = (u \cosh v, u \sinh v, u^2)$;

13. torus $(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - b^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$,
 $r(u, v) = ((a + b \cos v) \cos u, (a + b \cos v) \sin u, b \sin v)$, $0 \leq u < 2\pi$, $0 \leq v < 2\pi$;
14. helikoid $r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$, $0 \leq u < R$, $-\infty < v < +\infty$;
15. pseudosfera $r(u, v) = (\cos u + \ln \tan \frac{u}{2}, \sin u \cos v, \sin u \sin v)$, $0 < u < \pi$, $0 \leq v < 2\pi$;
16. katenoid $r(u, v) = (\cos u \cosh v, \sin u \cosh v, v)$, $0 \leq u < 2\pi$, $-\infty < v < +\infty$;
17. Mebijusova traka $r(u, v) = \left((a + u \sin \frac{v}{2}) \cos v, (a + u \sin \frac{v}{2}) \sin v, u \cos \frac{v}{2} \right)$, $-\frac{a}{2} < u < \frac{a}{2}$, $0 \leq v \leq 2\pi$;
18. rotaciona površ $r(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$, $u_1 \leq u \leq u_2$, $0 \leq v < 2\pi$;
19. majmunsko sedlo $r(u, v) = (u, v, u^3 - 3uv^2)$, $-\infty < u, v < +\infty$.

3.4 Površ: osnovne forme, krivine

1. Ravan

$$r(u, v) = r_0 + up + vq, \quad -\infty < u, v < +\infty, \quad r_0, p, q \in \mathbb{R}^3$$

$$E = \|p\|^2, F = \langle p, q \rangle, G = \|q\|^2, \quad e = f = g = 0$$

Specijalno, za $\|p\| = \|q\| = 1, \langle p, q \rangle = 0$: $E = 1, F = 0, G = 1, e = f = g = 0$.

$$r(\rho, \phi) = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, 0), \quad 0 \leq \rho < +\infty, 0 \leq \phi < 2\pi$$

$$E = 1, F = 0, G = \rho^2, \quad e = f = g = 0$$

$$K = 0, H = 0$$

2. Sfera

$$r(u, v) = (R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, R \sin u), \quad -\frac{\pi}{2} \leq u < \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq v < 2\pi$$

$$E = R^2, \quad F = 0, \quad G = R^2 \cos^2 u$$

$$e = R, \quad f = 0, \quad g = R \cos^2 u$$

$$K = \frac{1}{R^2}, \quad H = \frac{1}{R}$$

3. Rotacione površi

$$r(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)), \quad f_u^2 + g_u^2 = 1, \quad f > 0$$

$$E = f_u^2 + g_u^2 = 1, \quad F = 0, \quad G = f^2(u)$$

$$e = f_u g_{uu} - f_{uu} g_u, \quad f = 0, \quad g = f g_u$$

$$K = -\frac{f_{uu}}{f}$$

4. Kružni cilindar

$$r(u, v) = (R \cos u, R \sin u, v), \quad 0 \leq u < 2\pi, \quad -\infty < v < +\infty$$

$$E = R^2, F = 0, G = 1, e = -R, f = 0, g = 0$$

$$\kappa_1 = 0, \quad \kappa_2 = -\frac{1}{R}$$

$$K = 0, H = -\frac{1}{2R}$$

5. Rotacioni paraboloid

$$r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2), \quad -\infty < u < +\infty, \quad 0 \leq v < 2\pi;$$

$$E = 1 + 4u^2, F = 0, G = u^2,$$

$$e = \frac{2}{u\sqrt{1+4u^2}}, f = 0, g = \frac{2u^2}{\sqrt{1+4u^2}}$$

$$K = \frac{2}{(1+4u^2)^2}, \quad H = \frac{2(1+2u^2)}{(1+4u^2)^{\frac{3}{2}}}$$

6. Torus

$$r(u, v) = ((a + b \cos v) \cos u, (a + b \cos v) \sin u, b \sin v), \quad 0 \leq u < 2\pi, \quad 0 \leq v < 2\pi;$$

$$E = (a + b \cos v)^2, \quad F = 0, \quad G = b^2,$$

$$e = -\cos v(a + b \cos v), \quad f = 0, \quad g = -b$$

$$K = \frac{\cos v}{b(a + b \cos v)}, \quad H = -\frac{a + 2b \cos v}{2b(a + b \cos v)}$$

7. Helikoid

$$r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v), \quad 0 < u < R, \quad 0 < v < 2\pi;$$

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = 1 + u^2,$$

$$e = 0, \quad f = -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}, \quad g = 0$$

$$\kappa_1 = -\frac{1}{1+u^2}, \quad \kappa_2 = \frac{1}{1+u^2}$$

$$K = -\frac{1}{(1+u^2)^2}, \quad H = 0$$

8. Pseudosfera

$$r(u, v) = (\cos u + \ln \tan \frac{u}{2}, \sin u \cos v, \sin u \sin v), \quad 0 < u < \pi, \quad 0 \leq v < 2\pi;$$

$$E = \tan^2 u, \quad F = 0, \quad G = \sin^2 u,$$

$$e = -\tan u, \quad f = 0, \quad g = \sin u \cos u$$

$$\kappa_1 = -\tan u, \quad \kappa_2 = \cot u$$

$$K = -1, \quad H = \cot 2u$$

9. Katenoid

$$r(u, v) = (\cosh u \cosh v, \sinh u \cosh v, v), \quad 0 < u < 2\pi, \quad -\infty < v < +\infty;$$

$$E = \cosh^2 u, \quad F = 0, \quad G = \cosh^2 v,$$

$$e = -\frac{1}{\cosh^2 v}, \quad f = 0, \quad g = -\frac{1}{\cosh^2 v}$$

$$\kappa_1 = \frac{1}{\cosh^4 v}, \quad \kappa_2 = -\frac{1}{\cosh^4 v}$$

$$K = -\frac{1}{\cosh^8 v}, \quad H = 0$$

3.5 Literatura

Literatura

- [1] E. Abbena, A. Gray, S. Salamon, Modern differential geometry of curves and surfaces, CRC Press 2006.
- [2] C. Bär, Elementary Differential Geometry, Cambridge University Press, 2010.
- [3] M. Berger, B. Gostiaux, Differential Geometry: Manifolds, Curves, and Surfaces, Graduate Texts in Mathematics 115, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1988.
- [4] N. Blažić, N. Bokan, Uvod u diferencijalnu geometriju, Matematički fakultet i Vesta, Beograd, 1996.
- [5] M. P. do Carmo, Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1976.
- [6] V. Dragović, D. Milinković, Analiza na mnogostrukostima: Primene u geometriji, mehanici, topologiji, Matematički fakultet, Beograd, 2003.
- [7] B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko and S. P. Novikov, Modern Geometry, Methods and Applications, Graduate Texts in Mathematics 93, 104, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1984, 1985.
- [8] J. Gallier, Geometric Methods and Applications For Computer Science and Engineering, Springer, 2001.
- [9] M. Janjić, Krive i površi, Prirodno-matematički fakultet u Banjoj Luci, 2005.
- [10] W. Kühnel, Differential Geometry: Curves - Surfaces - Manifolds, AMS, 2005.
- [11] M. M. Lipschutz, Schaum's outline of theory and problems of Differential geometry, McGraw-Hill, 1969.
- [12] R. S. Millman, G. D. Parker, Elements of Differential Geometry, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1977.
- [13] S. Montiel, A. Ros, Curves and surfaces, AMS 1998.

- [14] B. O'Neill, Elementary Differential Geometry, 2nd Edition, Academic Press, San Diego, 1997.
- [15] J. Oprea, Differential Geometry and Its Applications, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1997.
- [16] A. Pressley, Elementary Differential Geometry Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin-New York, 2002.
- [17] K. Tapp, Differential Geometry of Curves and Surfaces, Springer, 2016.
- [18] J. A. Thorpe, Elementary Topics in Differential Geometry, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1979.

3.6 Ispitna pitanja

GEOMETRIJA 3

(ispitna pitanja za školsku 2020/21. godinu)

- Krive 1 (definicija, reparametrizacija, prirodna parametrizacija, dužina krive, ugao između dve krive, primeri)
- Krive 2 (krivina, torzija, Frenet–ov reper, Frenet–Serret–ove formule, primeri),
- Krive 3 (osnovna teorema za krive, prirodne jednačine krive, primeri)
- Krive 4 (krive u ravni)
- Površ 1 (definicija, reparametrizacija površi, krive čiji trag pripada tragu površi, tangentni prostor, primeri)
- Površ 2 (prva osnovna forma, definicija, reparametrizacija površi i prva osnovna forma, dužina krive, ugao između dve krive čiji tragovi pripadaju tragu površi, površina površi, preslikavanja površi, primeri)
- Površ 3 (druga osnovna forma, Gauss–ove i Weingarten–ove formule, primeri)
- Površ 4 (Gauss–ove i Codazzi–jeve jednačine, osnovna teorema za površi)
- Površ 5 (krivina površi: geodezijska i normalna krivina, glavne krivine, Gauss–ova i srednja krivina, primeri)
- Površ 6 (geodezijske linije, definicija, osobine, primeri, paralelno pomeranje)
- Površ 7 (izometrija površi, definicija, primeri, Gauss–ova teorema egregium)

Data je kriva $\alpha(t) = (1 + \cos 2t, \sin 2t, 2 \sin t)$, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(a) Trag krive α pripada sferi poluprečnika 2, sa centrom u $O(0, 0, 0)$.

Kako je $x^2 + y^2 + z^2 = (1 + \cos 2t)^2 + (\sin 2t)^2 + (2 \sin t)^2 = 4$, to sledi da trag krive α pripada sferi poluprečnika 2, sa centrom u $O(0, 0, 0)$.

Takođe, koristeći zapis

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= (1 + \cos 2t, \sin 2t, 2 \sin t) \\ &= (2 \cos t \cos t, 2 \cos t \sin t, 2 \sin t)\end{aligned}$$

zaključujemo da kriva α pripada sferi poluprečnika 2, sa centrom u $O(0, 0, 0)$, čija je jedna parametrizacija

$$r(u, v) = 2(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u), \quad -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < v < 2\pi.$$

Koristeći Lemu 2.3 sledi da postoje jedinstvene diferencijabilne funkcije $\alpha_1, \alpha_2 : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ takve da $\alpha(t) = r(\alpha_1(t), \alpha_2(t))$, pri čemu je $\alpha_1(t) = t$, $\alpha_2(t) = t$.

(b) Izračunati uglove i površinu krivolinijskog trougla na sferi određenog tragom krive α , ravni $z = 1$ i poluravni $x = y$, $x > 0$.

$$z = 1 \Rightarrow 2 \sin u = 1 \Rightarrow u = \frac{\pi}{6}$$

$$x = y, x > 0 \Rightarrow v = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\mathcal{S}) &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \int_u^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \int_u^{\frac{\pi}{4}} 4 \cos u \, du \, dv \\ &= -\frac{\pi}{6} + 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})\end{aligned}$$

Uočimo temena $A = r(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$, $B = r(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$, $C = r(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$ krivolinijskog trougla određenog tragovima krivih α , β i γ pri čemu je trag krive β presek ravni $z = 1$ i sfere, a trag krive γ presek i poluravni $x = y$, $x > 0$ i sfere.

$$z = 1 \Rightarrow \sin u = \frac{1}{2} \Rightarrow u = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \beta_1(t) = \frac{\pi}{6}, \beta_2(t) = t$$

$$x = y, x > 0 \Rightarrow v = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \gamma_1(t) = t, \gamma_2(t) = \frac{\pi}{4}$$

U prvom delu zadatka smo već zaključili da je $\alpha_1(t) = t$ i $\alpha_2(t) = t$, pa je

$$\alpha(t) = r(t, t), \quad \beta(t) = r(\frac{\pi}{6}, t), \quad \gamma(t) = r(t, \frac{\pi}{4}) \quad (3.1)$$

U presečnoj tački $A = r(u_0, v_0) = r(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}) = 2(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2})$, koristeći (2.3), ugao između stranica AB i AC , (tj. krivih α i β) krivolinijskog trougla ABC je određen sa

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{\mathcal{I}(X, Y)}{\sqrt{\mathcal{I}(X, X)}\sqrt{\mathcal{I}(Y, Y)}} \\&= \frac{E(u_0, v_0)\beta'_1(t_0)\alpha'_1(t_0) + G(u_0, v_0)\beta'_2(t_0)\alpha'_2(t_0)}{\sqrt{E(u_0, v_0)(\beta'_1(t_0))^2 + G(u_0, v_0)(\beta'_2(t_0))^2}\sqrt{E(u_0, v_0)(\alpha'_1(t_0))^2 + G(u_0, v_0)(\alpha'_2(t_0))^2}} \\&= \frac{G(u_0, v_0)\beta'_2(t_0)\alpha'_2(t_0)}{\sqrt{G(u_0, v_0)(\beta'_2(t_0))^2}\sqrt{E(u_0, v_0)(\alpha'_1(t_0))^2 + G(u_0, v_0)(\alpha'_2(t_0))^2}} \\&= \frac{G(u_0, v_0) \cdot 1 \cdot 1}{\sqrt{G(u_0, v_0) \cdot 1}\sqrt{E(u_0, v_0) \cdot 1 + G(u_0, v_0) \cdot 1}} = \frac{\sqrt{G(u_0, v_0)}}{\sqrt{E(u_0, v_0) + G(u_0, v_0)}} \\&= \frac{2 \cos \frac{\pi}{6}}{\sqrt{4 + 4 \cos^2 \frac{\pi}{6}}} = \sqrt{\frac{3}{7}},\end{aligned}$$

koristeći (3.1) i imajući u vidu da je $A = \alpha(t_0) = \beta(t_0) = r(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$, tj. $t_0 = \frac{\pi}{6}$ i da su za sferu poluprečnika $R = 2$ koeficijenti prve osnovne forme: $E = R^2 = 4$, $F = 0$, $G = R^2 \cos^2 u = 4 \cos^2 \frac{\pi}{6}$.

Ugao između stranica BA i BC , (tj. krivih α i γ) krivolinijskog trougla ABC je određen sa

$$\begin{aligned}\cos \eta &= \frac{E(u_1, v_1)\gamma'_1(t_1)\alpha'_1(t_1) + G(u_1, v_1)\gamma'_2(t_1)\alpha'_2(t_1)}{\sqrt{E(u_1, v_1)(\gamma'_1(t_1))^2 + G(u_1, v_1)(\gamma'_2(t_1))^2}\sqrt{E(u_1, v_1)(\alpha'_1(t_1))^2 + G(u_1, v_1)(\alpha'_2(t_1))^2}} \\&= \frac{E(u_1, v_1) \cdot 1 \cdot 1}{\sqrt{E(u_1, v_1) \cdot 1}\sqrt{E(u_1, v_1) \cdot 1 + G(u_1, v_1) \cdot 1}} \\&= \frac{4}{2\sqrt{4 + 4 \cos^2 \frac{\pi}{4}}} = \sqrt{\frac{2}{3}},\end{aligned}$$

imajući u vidu da je presečna tačka $B = r(u_1, v_1) = r(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ i $B = \alpha(t_1) = \gamma(t_1) = r(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$, tj. $t_1 = \frac{\pi}{4}$.

Ugao između stranica CA i CB , (tj. krivih β i γ) krivolinijskog trougla ABC je određen sa

$$\cos \nu = \frac{E(u_2, v_2)\gamma'_1(t_2)\beta'_1(t_3) + G(u_2, v_2)\gamma'_2(t_2)\beta'_2(t_3)}{\sqrt{E(u_2, v_2)(\gamma'_1(t_2))^2 + G(u_2, v_2)(\gamma'_2(t_2))^2}\sqrt{E(u_2, v_2)(\beta'_1(t_3))^2 + G(u_2, v_2)(\beta'_2(t_3))^2}} = 0,$$

imajući u vidu da je $\beta'_1(t) = 0, \gamma'_2(t) = 0$, $C = r(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}) = \gamma(t_2) = \beta(t_3)$, tj. $t_2 = \frac{\pi}{6}$, $t_3 = \frac{\pi}{4}$, što smo i očekivali jer je to presek koordinatnih linija ($\beta(t)$ i $\gamma(t)$) rotacione površi r .

Sadržaj

1	KRIVE	1
1.1	Osnovne definicije i primeri	1
1.2	Dužina luka krive i prirodna parametrizacija krive	4
1.3	Krivina i torzija krive, Frenet-Serret-ove formule	10
1.4	Osnovna teorema o egzistenciji i jedinstvenosti krivih	21
1.5	Krive u ravni: krivina, osnovna teorema	23
2	POVRŠI	36
2.1	Osnovne definicije i primeri	36
2.2	Prva osnovna forma	41
2.3	Preslikavanje površi	49
2.4	Druga osnovna forma	56
2.5	Gauss-ove i Weingarten-ove formule	59
2.6	Normalna i geodezijska krivina krivih na površi	64
2.7	Glavne krivine površi	74
2.8	Gauss-ova i srednja krivina površi	85
2.9	Gauss-ova briljantna teorema	91
2.10	Geodezijske linije	94
2.11	Paralelno pomeranje	104
3	Dodatak	107
3.1	Neke poznate krive	107
3.2	Krivina i torzija nekih krivih	109
3.3	Neke poznate površi	110
3.4	Površ: osnovne forme, krivine	112
3.5	Literatura	114
3.6	Ispitna pitanja	116