Линеарна алгебра, Домаћи, 21.недеља *Група 103* *25. април 2021.*

1. Нека су A и B квадратне матрице димензије n. Претпоставимо да је B симетрична и да важи $B = A^{-1}A^T$. Показати да је A^2 симетрична матрица.

2. Нека је C реална симетрична матрица димензије n таква да је $C^2 = C$. Ако је $D = E - 2C$, где је E јединична матрица реда n, доказати да је D симетрична и ортогонална.

3. Нека је $e = [e_1, e_2, ..., e_n]$ база векторског простора V са скаларним производом $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и $A = [L]_e$ матрица линеарног пресликавања у бази e. Дефинишимо матрицу $S_e = (\langle e_i, e_j \rangle) \in M_n(\mathbb{R})$. (Зове се матрица скаларног производа). Доказати:

   а) Матрица S_e је симетрична.

   б) Скаларни производ се мозе написати у облику
   $$\langle x, y \rangle = [x]_e^T S_e [x]_e^T,$$
   где су $[x]_e^T$ и $[y]_e^T$ колоне координата вектора $x, y \in V$.

   в) Пресликавање L је симетрично акко $A^T S_e = S_e A$.