Линеарна алгебра, Домаћи, 20.недеља *Група 103* *17. април 2021.*

1. На простору $M_2(\mathbb{R})$ је дат скаларни производ са $A \circ B = Tr\left(A^T B\right)$, где $A, B \in M_2(\mathbb{R})$.

   а) Нека је U потпростор простора $M_2(\mathbb{R})$ задат са $U = \Omega\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\right)$. Одредити бар једну базу потпростора $U^{\perp}$.

   б) Ортонормирати нађену базу у односу на дати скаларни производ.

   в) Наћи ортогоналну пројекцију и ортогоналну допуну матрице $C = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$ на потпростор U.

2. Ако је W потпростор еуклидског векторског простора V, доказати да је $W^{\perp\perp} = W$.

3. Дато је пресликавање $L : \mathbb{R}^3 \longleftrightarrow \mathbb{R}^2$ на следећи начин:
   $L(x, y, z) = (-4x + 2y + 3z, 2x - y + 6z, 3x + 6y + 4z)$.
   Доказати да је L симетричан линеарни оператор еуклидског векторског простора $(\mathbb{R}^3, \circ)$, где је $\circ$ стандардни скаларни производ на R^3. Затим одредити бар једну ОНБ овог простора у којој оператор L има дијагоналну матрицу као и матрицу оператора L у нађеној бази. Да ли постоји линеарни оператор $G : R^3 \longleftrightarrow R^3$ такав да је $G^2 = L$?