Линеарна алгебра, Домаћи, 18. недеља *Група 103* *2.април 2021.*

1. Нека је L линеарни оператор векторског простора V димензије 3 над пољем $\mathbb{R}$ одређен својом матрицом

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

у односу на неку фиксирану базу $e = [e_1, e_2, e_3]$ тог простора.

   а) Одредити минимални полином од L. Да ли је L дијагоналан?

   б) Наћи матрицу оператора $G = L - 2I$ у односу на базу e.

   в) Доказати да је G нилпотентан оператор степена нилпотентности 2.

   г) Одредити бар један вектор v тако да је $G(v) \neq 0$ и бар један вектор w из $KerG$ такав да је линеарно независан са $G(v)$.

   д) Доказати да вектори $f_1 = G(v)$, $f_2 = v$ и $f_3 = w$ одређују базу простора V и наћи матрицу пресликавања G у односу на базу f.

   ђ) Одредити матрицу пресликавања L у односу на базу f.

2. Дата је матрица

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Одредити Жорданову матрицу $J(A)$ и одредити бар једну инвертибилну матрицу P такву да је $P^{-1}AP = J(A)$.

3. Нека су оператори $L, G : V \longrightarrow V$ такви да је $LG = GL$. Доказати да су и LG и $L + G$ нилпотентни.