Линеарна алгебра, Домаћи, 17. недеља

<u>*Група 103*</u> *28.март 2021.*

1. Дата је матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 8 & -11 & -8 \\ -8 & 8 & 5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

   а) Одредити сопствене вредности и сопствене колоне матрице A.

   б) Да ли је матрица A слична дијагоналној, и ако јесте, наћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $P^{-1}AP = D$.

   в) Одредити A^n, $n \in \mathbb{N}$.

2. Нека је $L : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ дефинисано са $L(X) = AX - XA$, где је матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   а) Доказати да је L линеарно.

   б) Наћи бар једну базу за језгро и слику.

   в) Одредити матрицу оператора L у канонској бази e.

   г) Одредити сопствене вредности, сопствене векторе и сопствене потпросторе оператора L.

   д) Да ли је L дијагоналан оператор?

3. Ако су v_1, v_2,$\cdots$,v_k сопствени вектори оператора L који одговарају различитим сопственим вредностима λ_1, λ_2,$\cdots$, λ_k, доказати да вектор $v = v_1 + v_2 + \cdots + v_k$ не може бити сопствени вектор.