Линеарна алгебра , Домаћи, 13. недеља . *1о3 група* *22. фебруар 2021.*

1. Нека је у векторском простору $V = \mathbb{R}^3[X]$ дато пресликавање $L : V \longrightarrow V$ са $L(p) = p'(x) + 2xp''(x)$.

   а) Доказати да је L линеарни оператор векторског простора V и наћи његову матрицу у односу на канонску базу e простора V.

   б) Одредити бар једну базу за језгро и слику оператора L.

   в) Одредити ранг, дефект и испитати да ли је пресликавање инвертибилно.

2. Нека је $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ и $L : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ дефинисано са $L(X) = AX - XA^T$.

   а) Доказати да је L линеарни оператор векторског простора $M_2(\mathbb{R})$ и наћи његову матрицу у односу на канонску базу e простора $M_2(\mathbb{R})$.

   б) Одредити бар једну базу за језгро и допунити ту базу до базе за цео простор.

   в) Н аћи бар једну базу за слику оператора L.

3. Нека за линеарно пресликавање $L : V \longrightarrow V$ важи да је $L^2 = L$ и $F = I - L$, где је I идентичко пресликавање. Доказати да је $F^2 = F$ и $KerF = ImL$.

4. Нека су U, V, W векторски простори над пољем K и $L : U \longrightarrow V$ и $G : V \longrightarrow W$ линеарна пресликавања. Доказати да је $\delta(G \circ L) \leq \delta(L) + \delta(G)$.