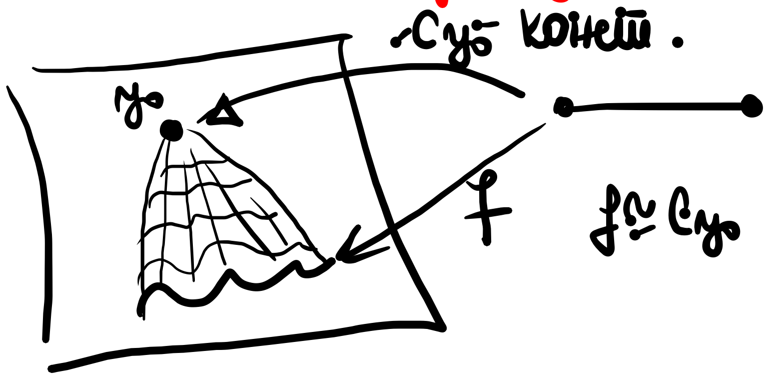
Хомотопски тривијална пресликавања



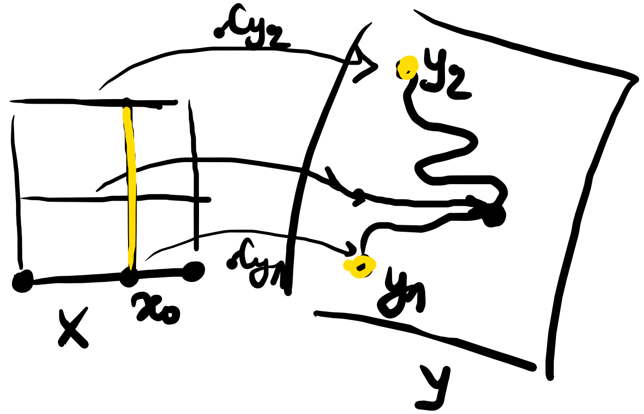
„најједноставнија пресл.
из угла хомотопије“

$\circledast$ $H(x,1) = \varphi(1) = y_2$

$H: c_{y_1} \simeq c_{y_2}$ ✓ □

$c_{y_0}: X \to Y$ ← константно

$c_{y_0}(x) = y_0, \ \forall x \in X$



Став $c_{y_1} \simeq c_{y_2} \iff \exists$ пут у Y који спаја y_1 и y_2

Доказ: ($\Rightarrow$) $H: c_{y_1} \simeq c_{y_2}$ $\quad H: X \times I \to Y$

$x_0 \in X$ $\quad \varphi: I \to Y$

$\varphi(t) := H(x_0, t)$

φ непр. $\varphi(0) = H(x_0, 0) = c_{y_1}(x_0) = y_1$ $\quad \varphi(1) = H(x_0, 1) = y_2$

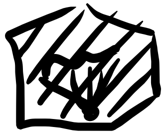
$\Rightarrow \varphi$ је пут од y_1 до y_2

($\Leftarrow$) $\exists$ пут $\varphi: I \to Y$ $\varphi(0) = y_1$, $\varphi(1) = y_2$ $\rightsquigarrow$ $H: X \times I \to Y$ $H(x,t) = \varphi(t)$ непр ✓ $\circledast$ $H(x,0) = \varphi(0) = y_1$

Последица: X-путно повезан ⇒ ∀ два константна пресл. су хомотопна

Деф $f: X \to Y$ је хомотопски тривијално ако је хомотопно неком константном пресл.
$f \simeq const$ (у п.пов. „сваком")

Тв $f: X \to K$ непр. ⇒ $f \simeq const$
K конвексан

$X \to$ 

!! битна пресликавања: $S^n \to \sim$, $\sim \to S^n$

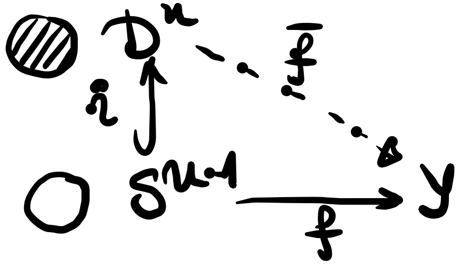
Деф $A \subset X$, $f: A \to Y$ непр.
Непрекидно $\bar{f}: X \to Y$ (ако ∃) које задовољава $\bar{f}|_A = f$ се назива проширење пресликавања f.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, dashed, "\bar{f}\,?"] & \\ A \arrow[u, "i"] \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

Ако $\bar{f}$ ∃ „f се може проширити на X"

$\boxed{\text{Тв}}$ Нека Y-т.п. $f: S^{n-1} \to Y$ непр.

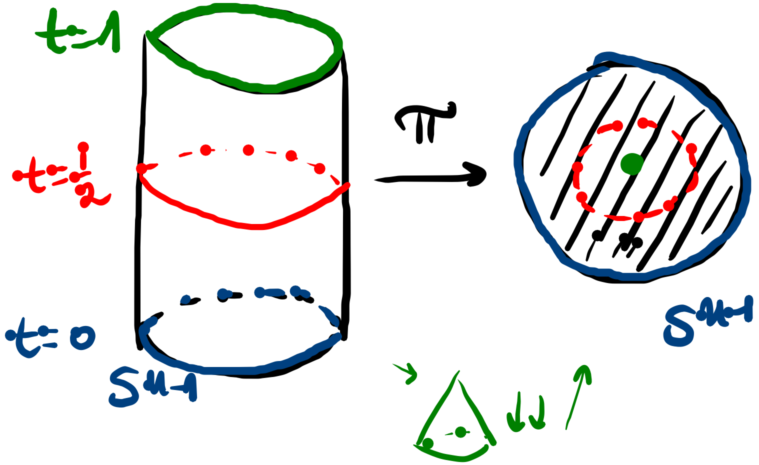
$f \simeq const \iff f$ се може проширити на D^n



Доказ (скица):

Уочимо $\pi: S^{n-1} \times I \to D^n$

$\pi(x,t) := (1-t)\cdot x$



- π је непр.
- π је НА
- комп. $\to T_2 \Rightarrow$ затворено

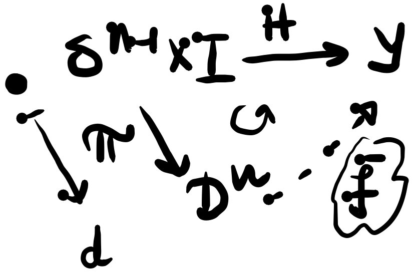
(*) $\Rightarrow \pi$ је количничко

($\Rightarrow$) $f \simeq const$

$\rightsquigarrow \exists$ хомотопија $H: S^{n-1} \times I \to Y$ $\quad \underline{H: f \simeq c_{y_0}}$

$c_{y_0}: S^{n-1} \to Y$ за неко y_0

$H(x,0) = f(x)$
$H(x,1) = y_0$ $\quad \forall x \in S^{n-1}$



Да ли $\exists F$ т.д. ∇ комутира?

$d \in D^n \xRightarrow{\pi \text{ НА}} \exists (x,t) \in S^{n-1} \times I$
$\pi(x,t) = d$

дефинишемо:
$F(d) := H(x,t)$

Добро деф? $\pi(x_1,t_1) = \pi(x_2,t_2) \overset{?}{\Rightarrow} H(x_1,t_1) = H(x_2,t_2)$

$\Rightarrow t_1 = t_2 = 1 \Rightarrow H(x_1,t_1) = y_0 = H(x_2,t_2)$ ✓

$\Rightarrow F$ задовољава: $\underset{\text{кол.}}{F \circ \pi} = \underset{\text{непр.}}{H}$ $\Rightarrow F$ непрекидно

$x \in S^{n-1}$: $F(x) = F((1-0)x) = F(\pi(x,0)) = H(x,0) = f(x)$ $\rightsquigarrow F$ проширење ✓

[Т] МЕН Ч-та: $f: S^{n-1} \to Y$ непр.

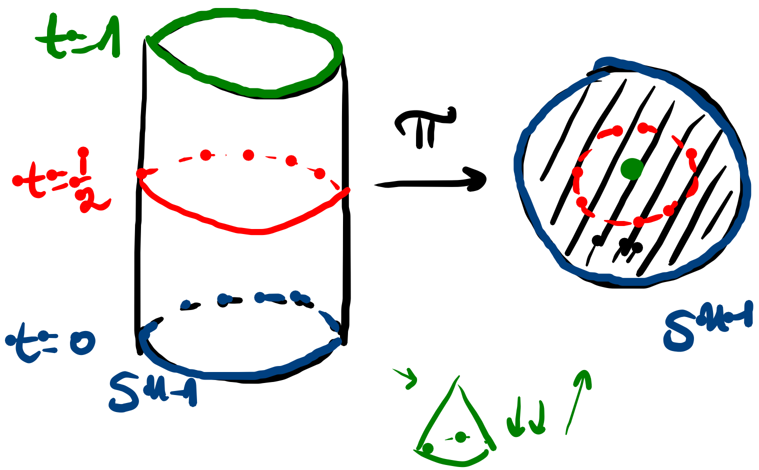
$f \simeq const \iff f$ се може проширити на D^n

$$\begin{tikzcd} D^n \arrow[dr, dashed, "\bar f"] & \\ S^{n-1} \arrow[u, "i"] \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

Доказ (скица):

Уочимо $\pi: S^{n-1} \times I \to D^n$

$\pi(x,t) := (1-t)\cdot x$



- π је непр.
- π је НА
- компакт $\to T_2 \Rightarrow$ затворено (*)

(*) $\Rightarrow \pi$ је количничко

($\Leftarrow$) Претпоставка да $\exists$ проширење $\bar f: D^n \to Y$

Дефинишемо:

$H: S^{n-1} \times I \to Y$

$H(x,t) := \bar f \circ \pi(x,t) = \bar f((1-t)x)$

$t=0$: $H(x,0) = \bar f(x) = f(x)$

$t=1$: $H(x,1) = \bar f(0)$, $\forall x \in S^{n-1}$

$\bar f(0) =: y_0$

$H(x,1) = c_{y_0}(x)$

$\boxed{H: f \simeq c_{y_0}}$

$f \simeq const$ ✓ ■

Хомотопски еквивалентни простори

Деф X, Y - т.п.

$\boxed{X \simeq Y}$ „X и Y су хомотопски еквивалентни"

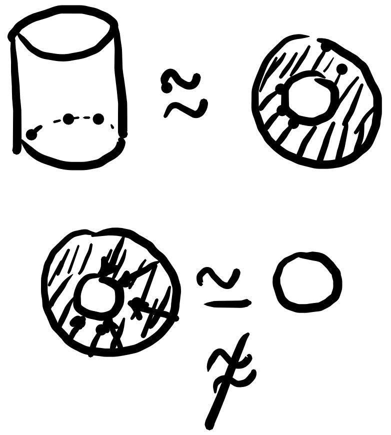
„X и Y имају исти хомотопски тип"

ако $\exists$ непр. $f: X \to Y$ и непр. $g: Y \to X$ т.д.

$$f \circ g \simeq 1_Y \quad \text{и} \quad g \circ f \simeq 1_X$$

f, g - (међ. инверзне) хомотопске еквиваленције

$$X \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} Y$$



- $X \approx Y \Rightarrow X \simeq Y$ (обрнуто не важи!)

  $X \underset{h^{-1}}{\overset{h}{\underset{\approx}{\rightleftarrows}}} Y \quad h^{-1} \circ h = 1_X \simeq 1_X$ ✓

- $X \simeq Y \Rightarrow Y \simeq X$

Став: $X \simeq Y,\ Y \simeq Z \Rightarrow X \simeq Z.$

Доказ:

$$X \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} Y \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} Z \rightsquigarrow X \underset{g\circ\psi}{\overset{\varphi\circ f}{\rightleftarrows}} Z$$

$g\circ f \simeq 1_X$ $\qquad$ $\psi\circ\varphi \simeq 1_Y$

$f\circ g \simeq 1_Y$ $\qquad$ $\varphi\circ\psi \simeq 1_Z$

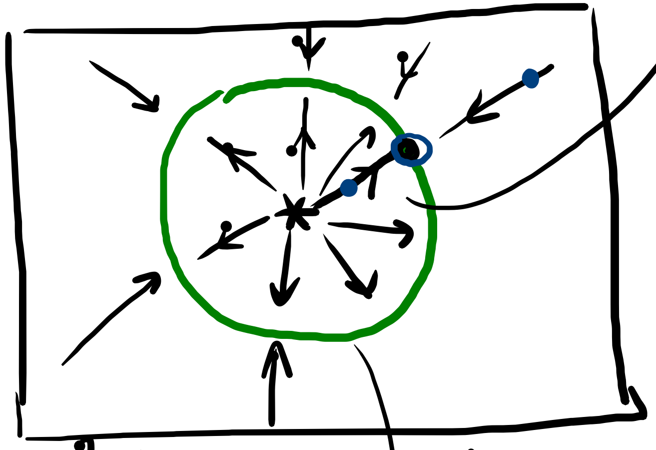
$$(g\circ\psi)\circ(\varphi\circ f) \simeq g\circ(\underbrace{\psi\circ\varphi}_{\simeq 1_Y})\circ f$$

$$\simeq g\circ 1_Y\circ f = g\circ f \simeq 1_X$$

Аналогно: $(\varphi\circ f)\circ(g\circ\psi) \simeq 1_Z \Rightarrow X \simeq Z$ $\square$

Важан пример:

$\mathbb{R}^n \setminus \{*\} \simeq S^{n-1}$



$D^2\setminus\{*\} \simeq S^1$

од сваке тачке из $\mathbb{R}^n\setminus\{*\}$ до њене слике на S^{n-1} посматрамо пут и та фамилија путева је непрекидна

$D^2 \not\simeq S^1$

$\pi_1(D^2) \not\cong \pi_1(S^1)$

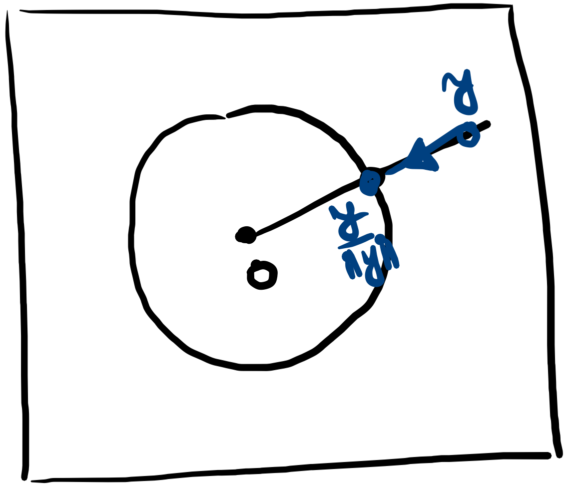
$\Downarrow$

$D^2 \not\simeq S^1$

III лема $\mathbb{R}^n \setminus \{*\} \simeq S^{n-1}$

Доказ: $\mathbb{R}^n\setminus\{a\} \approx \mathbb{R}^n\setminus\{b\}$
→ довољно за $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$

$$S^{n-1} \underset{r}{\overset{i}{\rightleftarrows}} \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$$



$r : \mathbb{R}^n\setminus\{0\} \to S^{n-1}$ $\quad r(y) = \frac{y}{\|y\|}$

i – инклузија

* $\boxed{r\circ i}$ $\quad x\in S^{n-1}$ $\quad r\circ i(x) = r(x) = \frac{x}{\underbrace{\|x\|}_{=1}} = x$ $\quad r\circ i = \mathbb{1}_{S^{n-1}}$, $\simeq$ ✓

* $\boxed{i\circ r}$ $\quad y\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$
$i\circ r(y) = i\left(\frac{y}{\|y\|}\right) = \frac{y}{\|y\|}$ $\quad$ желимо $\underbrace{i\circ r}_{\frac{y}{\|y\|}} \simeq \underbrace{\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}}_{y}$

линијска хомотопија

$H : (\mathbb{R}^n\setminus\{0\})\times I \to (\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$

$H(y,t) := (1-t)\frac{y}{\|y\|} + ty = \frac{1-t(1-\|y\|)}{\|y\|}\cdot y$?

добро деф ? ← $1-t(1-\|y\|) \neq 0$

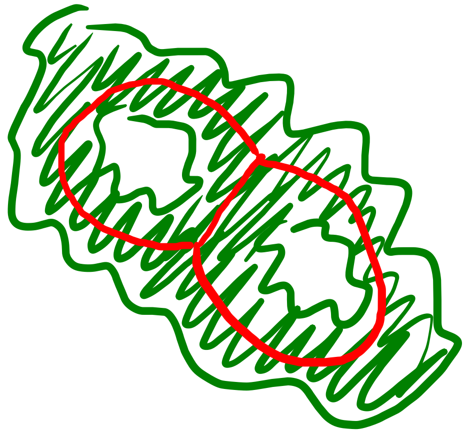
$\|y\|>1:$ $\quad 1-t(1-\|y\|) \geq 1$ $(\neq 0)$ ✓

$\|y\|<1:$ $\quad 1-\underbrace{t(1-\|y\|)}_{[0,1]\cdot[0,1)} > 0 \neq 0$ ✓ $\quad \in[0,1)$

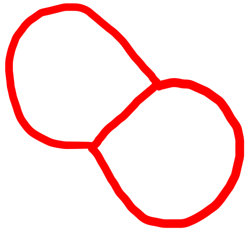
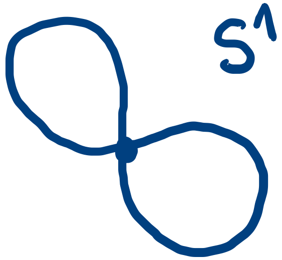
H је непрекидно ✓

$\Rightarrow H : i\circ r \simeq \mathbb{1}_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}$ ✓

$\Rightarrow \mathbb{R}^n\setminus\{*\} \simeq S^{n-1}$ $\square$

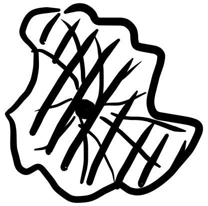


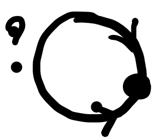
(!) идентични простор до на $\simeq$

$\simeq$  $\simeq$  $S^1 \vee S^1$

- Контрактибилни простори -

Деф. X је контрактибилан ако $X \simeq *$ „може се скупити у тачку"

 $\simeq *$

 $\not\simeq *$

Ств $X \simeq * \iff \mathbb{1}_X \simeq \text{const}$

Доказ: $(\Rightarrow)$ $X \simeq *$

$$X \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} * \quad \Rightarrow \quad \mathbb{1}_X \simeq g \circ f = C_{g(*)} \leftarrow \text{const}$$

$$\mathbb{1}_X \simeq \text{const} \quad \checkmark$$

$(\Leftarrow)$ $\mathbb{1}_X \simeq \text{const}$

$\mathbb{1}_X \simeq c_{x_0} \leftarrow c_{x_0} : X \to X$

$\forall x \in X \quad x \mapsto x_0$

Зрахуємо композиції відоб.

$$X \underset{i}{\overset{f}{\rightleftarrows}} \{x_0\} \qquad \begin{rcases} f \circ i = \mathbb{1}_{\{x_0\}} \checkmark \\ i \circ f = c_{x_0} \simeq \mathbb{1}_X \checkmark \end{rcases} X \simeq \{x_0\}$$

$\square$

Став $X \simeq * \iff 1_X \simeq const$

Последице:

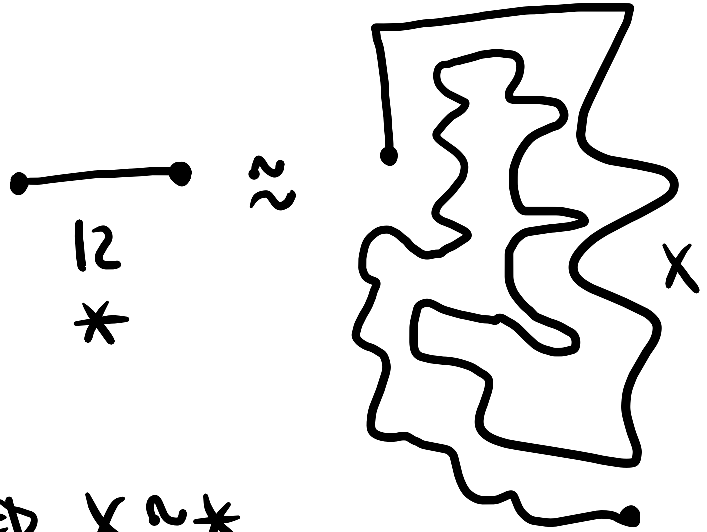
* K конвексан $\Rightarrow K \simeq *$

  Посл. $\mathbb{R}^n \simeq *$

  $D^n \simeq *$

  $\mathring{D}^n \simeq *$

$\simeq * \Rightarrow X \simeq *$



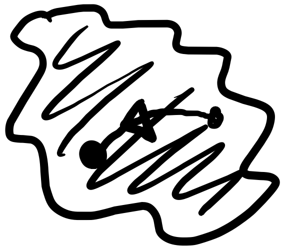
$I \simeq *$

$\Rightarrow X \simeq *$

$X \simeq *$ „X се може непрекидно кроз себе скупити у тачку"

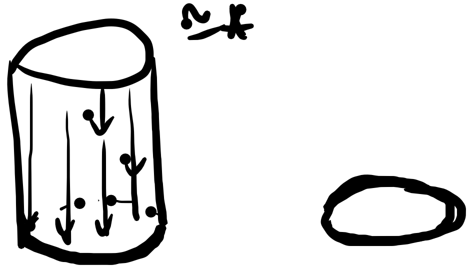
Својства:

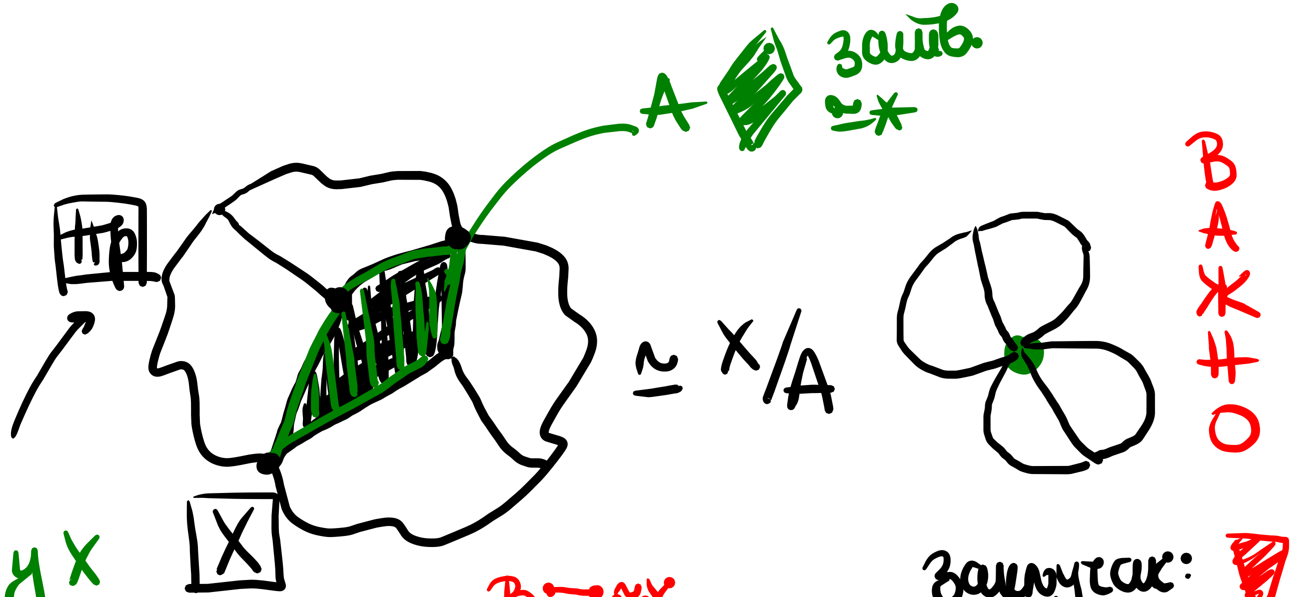
Став $X \simeq * \Rightarrow X$ путно повезан



Став X - произвољан т.п. $Y \simeq *$ $\Big\}$ $X \times Y \simeq X$

Пр. $S^1 \times I \simeq S^1$, $I \simeq *$



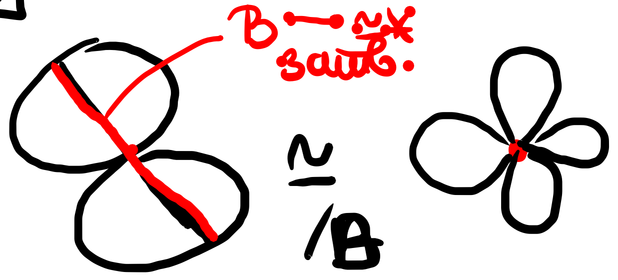


Теорема X - т.п. $A \subset X$

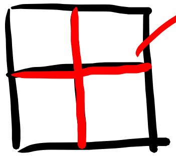
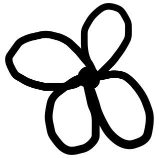
$A \simeq *$, A - затворен у X

((X,A) има HEP) - „лепи"

$\Rightarrow$ $\boxed{X \simeq X/A}$



Закључак: $X \simeq \bigvee_4 S^1$!

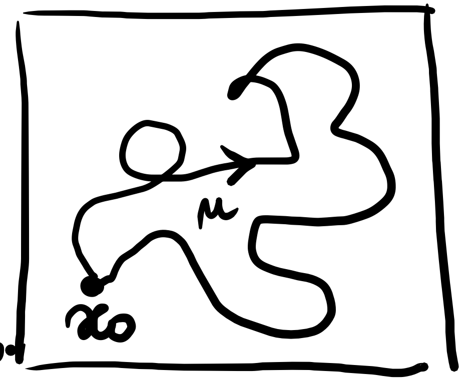
пр. $X =$  $\simeq X/A$ 

A – $+$ $\simeq *$, A зат.

фундаментална група

X – т.п. $x_0 \in X$ базна тачка

(X, x_0) – простор са базном тачком



$u : I \to X$ је петља у т. x_0 ако је то пут који спаја x_0 са собом
тј. $u(0) = u(1) = x_0$

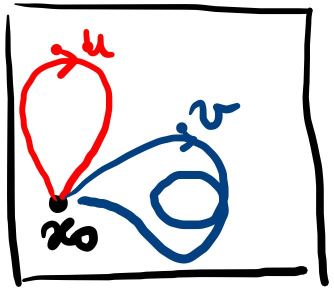
$\boxed{P(X, x_0)} = \{ u : I \to X \mid u \text{ је непрекидно}, u(0) = u(1) = x_0 \}$

НАДОВЕЗИВАЊЕ ПЕТЉИ $(u, v) \longmapsto u \cdot v$

$u, v \in P(X, x_0)$

$u \cdot v : I \to X$

$$u \cdot v(t) = \begin{cases} u(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ v(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$



хомотопни патеки, $\mathrm{rel}\{0,1\}$

Став $u, u', v, v' \in P(X, x_0)$

$u \simeq u' \ (\mathrm{rel}\{0,1\})$

$v \simeq v' \ (\mathrm{rel}\{0,1\})$

$\Rightarrow \quad u \cdot v \simeq u' \cdot v' \ (\mathrm{rel}\{0,1\})$