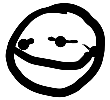
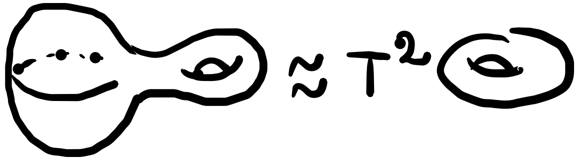
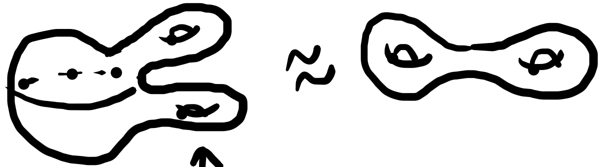
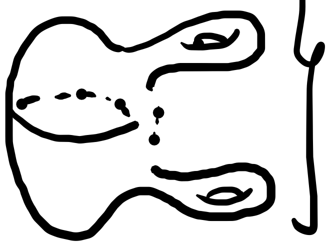
Прва фамилија: M_g

- $g=0$ $\boxed{M_0 := S^2}$ 
- M_1  $\approx T^2$ $\boxed{M_1 \approx T^2}$
- M_2 

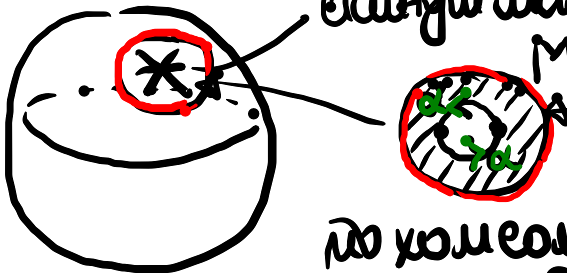
„2 ручке"

⋮

- M_g  g ручки $\approx$  g×

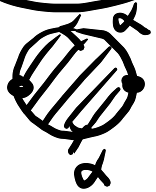
оријентабилне површи рода g

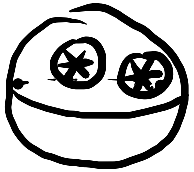
Друга фамилија N_h

N_1 

по хомеоморфизму граница, ∂M залепљује се границу исеченог малог диска

→ N_1 

$N_1 \approx$  $\boxed{N_1 \approx \mathbb{R}P^2}$

N_2  ← 2 меб. траке

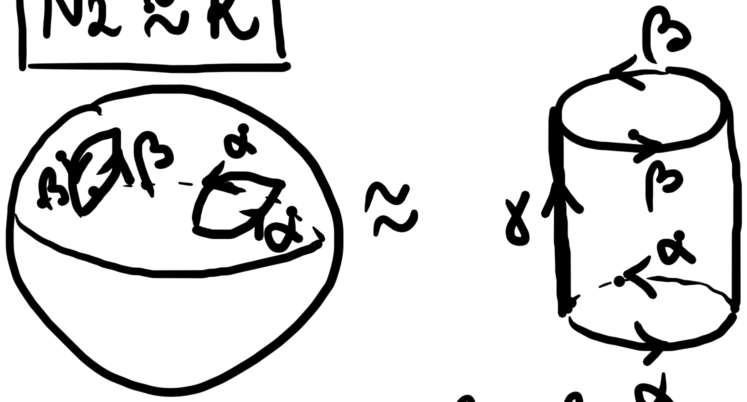
⋮

N_h  ← h меб. трака

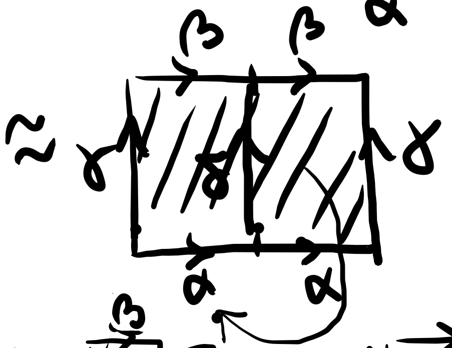
неоријентабилне површи рода h

Шта је N_2?

$\boxed{N_2 \approx K}$



исечемо γ:

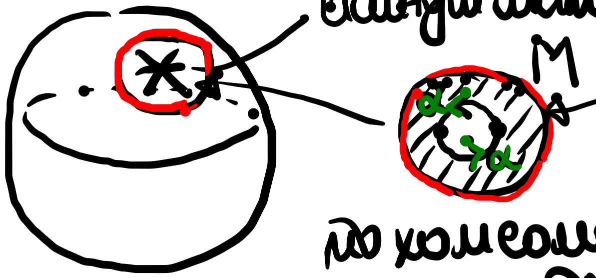


сечемо δ
лепимо α:

$\approx K$ ✓

Друга фамилија N_h

N_1

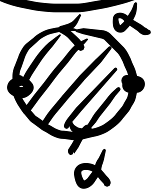


исећи мали отв. диск

M ∂M

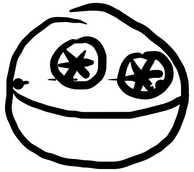
по хомеоморфизму
границе, ∂M залепити на
границу исеченог малог диска

$\rightarrow N_1$

$N_1 \approx$ 

$\boxed{N_1 \approx \mathbb{R}P^2}$

N_2



$\leftarrow$ 2 меб. траке

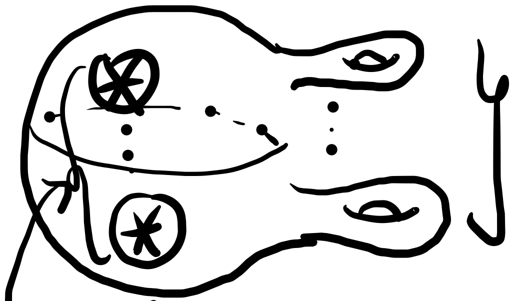
⋮

N_h

$\leftarrow$ h меб. трака

неоријентабилне површи рода h

Комбинујемо:

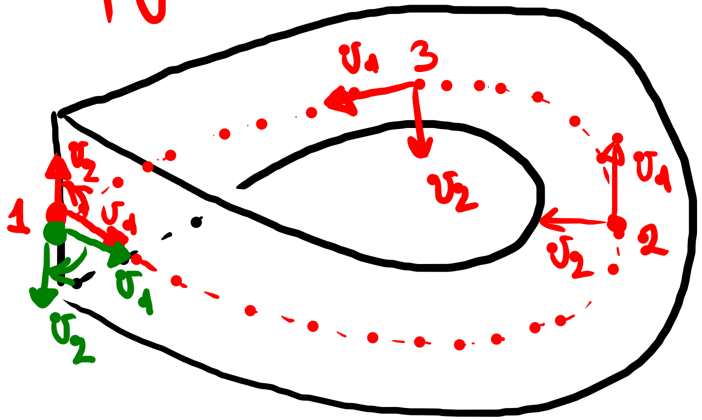


$H_{g,h}$

Важи: $\boxed{H_{g,h} \cong N_{2g+h}}$

за везу

Оријентабилност



P - површ је оријентабилна ако:
за ∀ просту затв. криву на P
и за произв. тачку a криве и базу тан. простора у њој
када се пређемо од a по кривој
и база тан. простора се непр. мења
она се враћа у базу која има исту оријентацију
као почетна.

иначе P - неоријентабилна

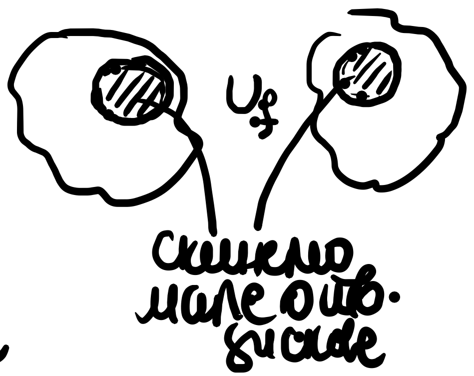
две стране → ориј. M_g

једна страна → неориј. N_h ⊃ M-неоријентабилне

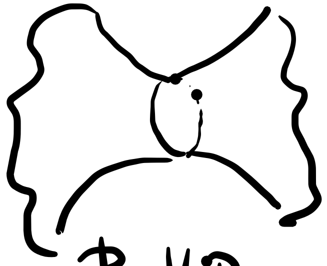
Повезана сума

P_1, P_2 - површи

$P_1 \# P_2 :=$



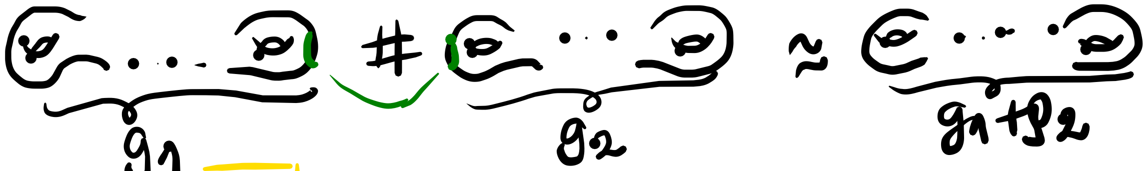
← лепљење по хомеоморфизму граница избачених дискова $\approx$



$P_1 \# P_2$

M_g, N_h $(H_{g,h}) \sim N_{2g+h}$

$M_{g_1} \# M_{g_2}$:

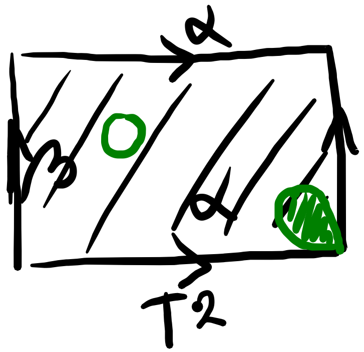


$$\boxed{M_{g_1} \# M_{g_2} \approx M_{g_1+g_2}}$$

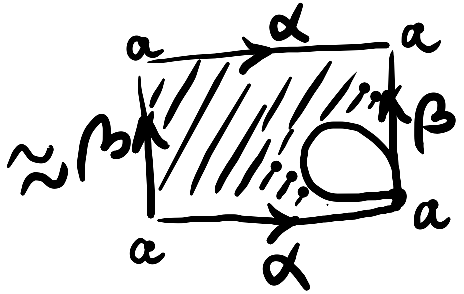
$$\boxed{N_{h_1} \# N_{h_2} \approx N_{h_1+h_2}}$$

\# неутрал: $S^2 = M_0$
комутативне, асоцијативне
до на $\approx$

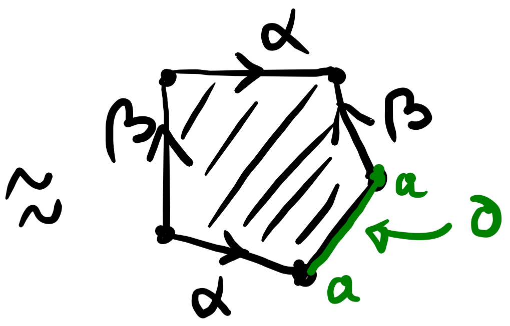
Канонични модели (равни) за M_g, N_a:



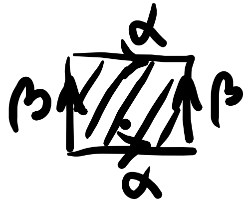
$T^2 \setminus$ без малък $\mathring{D}^2$ $\approx$



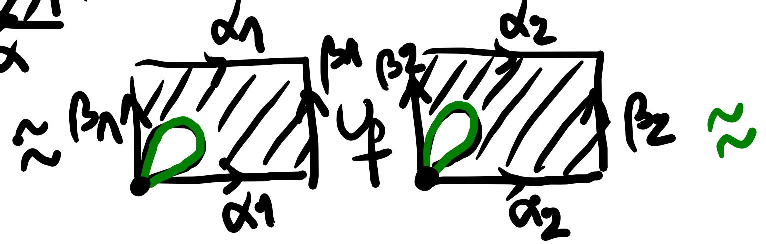
$\approx$

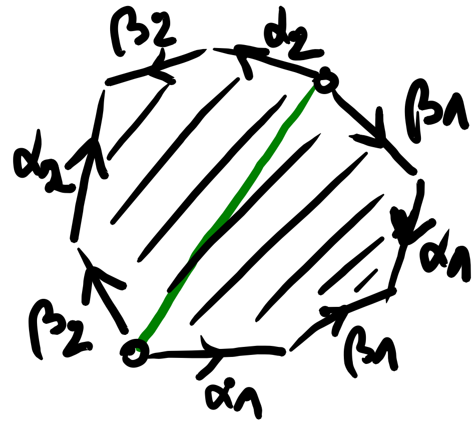


- $M_1 \approx T^2$:

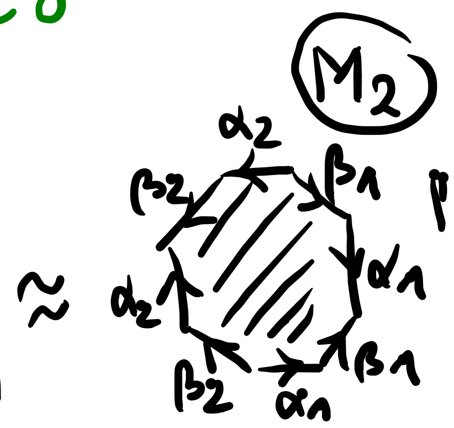


- $M_2 \approx M_1 \# M_1 \approx$





$\approx$

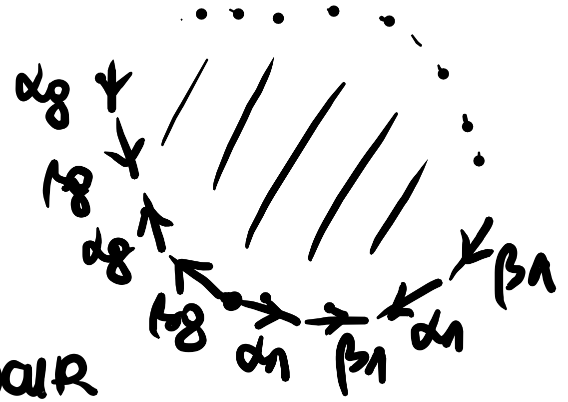


$\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\alpha_2\beta_2\alpha_2^{-1}\beta_2^{-1} = 1$

⋮

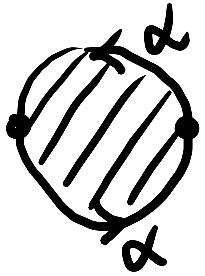
- $M_g \approx M_{g-1} \# M_1$

4g шпица с два съседни идентифицирани



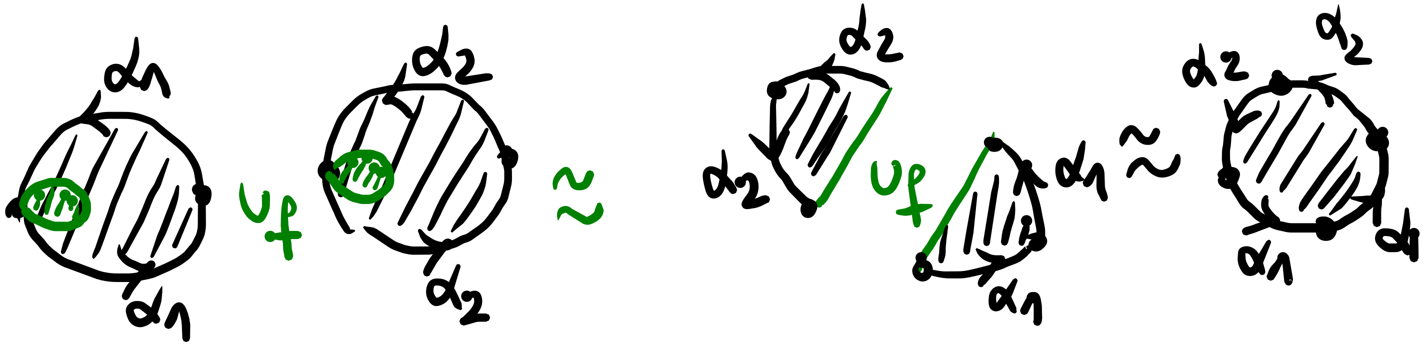
$\underbrace{\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}}_{\text{комутатор}} \cdots \alpha_g\beta_g\alpha_g^{-1}\beta_g^{-1} = 1$

$N_1 \approx \mathbb{R}P^2$



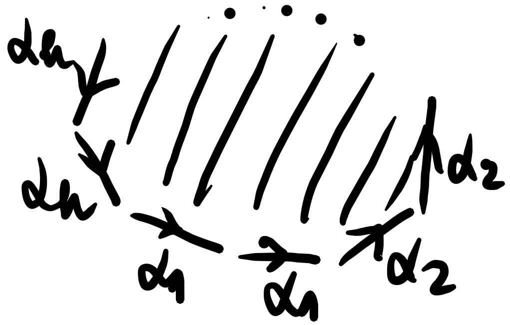
$\approx K$

$N_2 \approx K$ $N_2 \approx N_1 \# N_1 \approx$



⋮

$N_n \approx N_{n-1} \# N_1 \approx$



2n ивица

сва темена идентификована

⇒ повезане затворене

Теорема (о класификацији затв. пов.)

X - повезана затв. површ

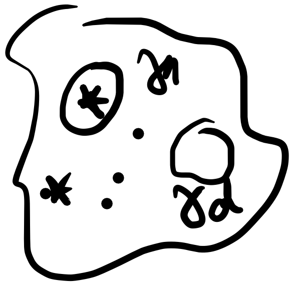
(1) X-оријентабилна ⇒ $(\exists g \in \mathbb{N}_0)\ X \approx M_g$

(2) X - неоријентабилна ⇒ $(\exists n \in \mathbb{N})\ X \approx N_n$

Род површи

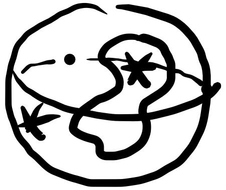
X – повезана затв. површ

род$(X) :=$ max$\{ d \in \mathbb{N} \mid \exists\, d$ међ. дисјунктних простих затворених кривих $\gamma_1, \dots, \gamma_d$ на X тд. $X \setminus \bigcup_{i=1}^{d} \gamma_i$ повезан простор$\}$



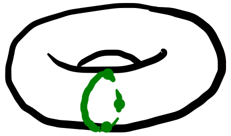
* род$(M_g) = g$

$M_0 = S^2$



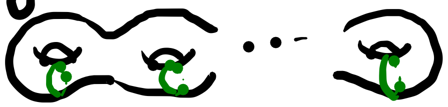
род $= 0$

M_1



1

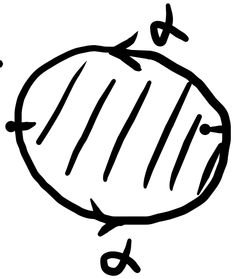
M_g



род $= g$

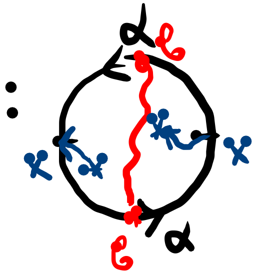
* род$(N_h) = h$

$N_1 \approx \mathbb{R}P^2$

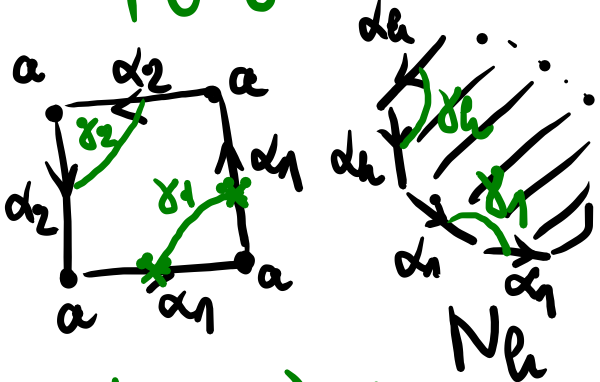


$\setminus \alpha \approx$

N_1:



N_2:



род$(N_h) = h$

~Хомотопија~

-Хомотопна пресликавања-

X, Y, Z ... т.п.

<u>Деф</u>: $f, g : X \to Y$ непр. пресл.

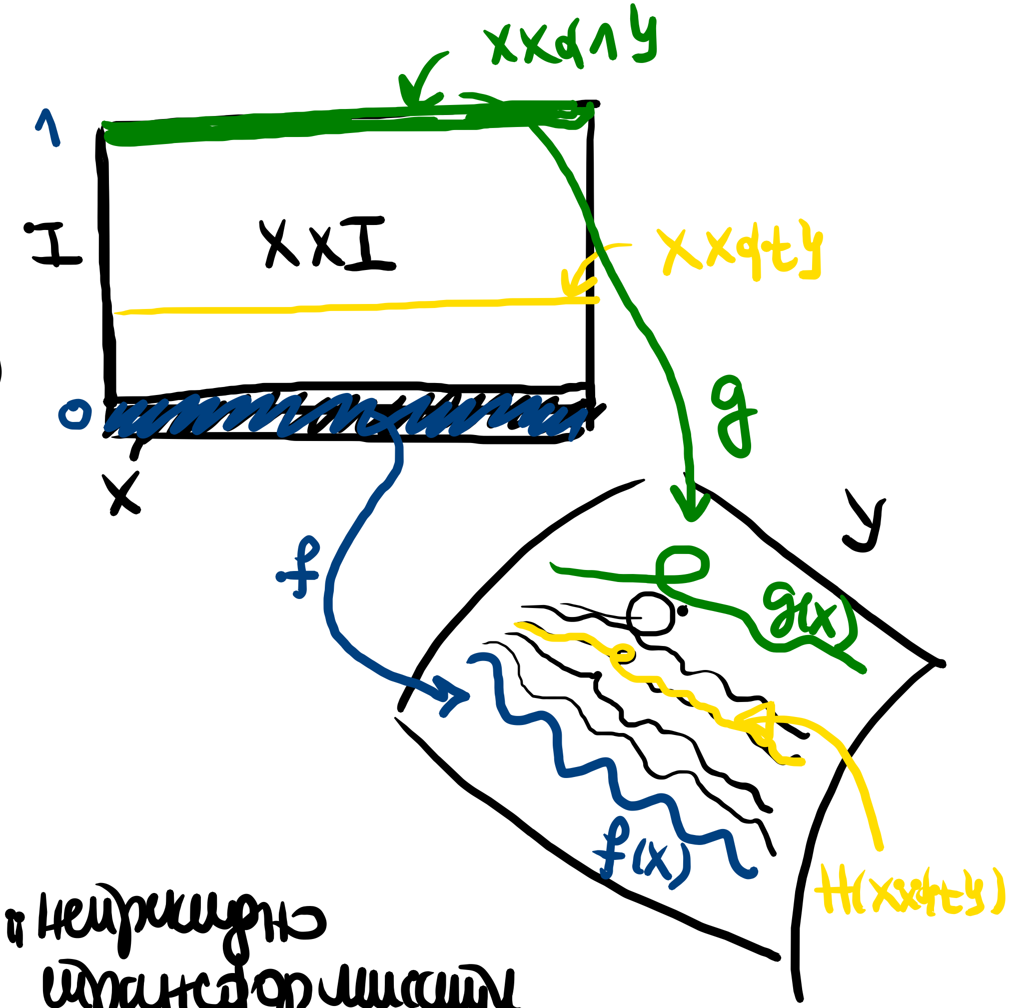
f је хомотопно са g, у ознаци $f \simeq g$

ако $\exists$ непр. пресл. $H : X \times I \to Y$ $(I = [0,1])$

тд. $\forall x \in X$ важи: $H(x,0) = f(x)$

$H(x,1) = g(x)$

H - хомотопија између f и g $\boxed{H : f \simeq g}$



! „непрекидно трансформисати f до g"

X, Y, Z .. т.п.

Деф: $f, g: X \to Y$ непр. пресл.

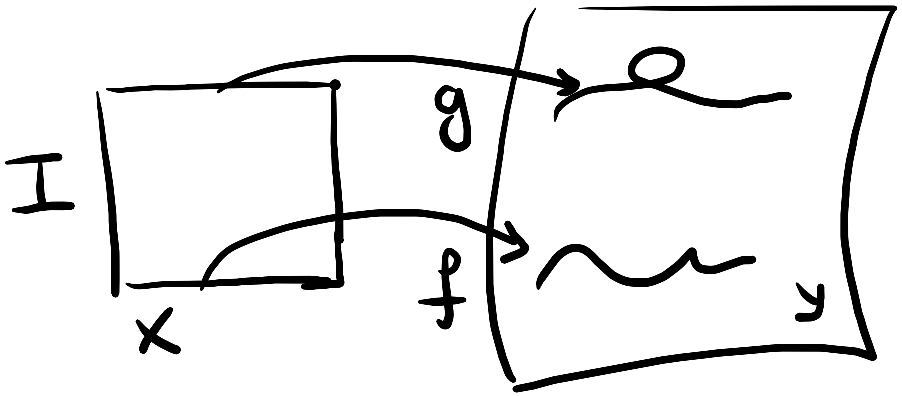
f је хомотопно са g, ознака $f \simeq g$

ако $\exists$ непр. пресл. $H: X \times I \to Y$ $(I := [0,1])$

тд. $\forall x \in X$ важи: $H(x,0) = f(x)$

$H(x,1) = g(x)$

H - хомотопија између f и g $H: f \simeq g$



$C(X,Y) :=$ скуп свих непр. пресликав. из X у Y

$\boxed{\text{Став}}$ $\simeq$ је рел. еквив. на $C(X,Y)$.

Доказ: $\boxed{P}$ $f \simeq f$ $H: X \times I \to Y$ $H(x,t) := f(x)$ H непр. ✓ јер f непр.

$H(x,0) = f(x) = H(x,1)$

$H: f \simeq f$

[S] $H: f\simeq g \quad H: X\times I\to Y$

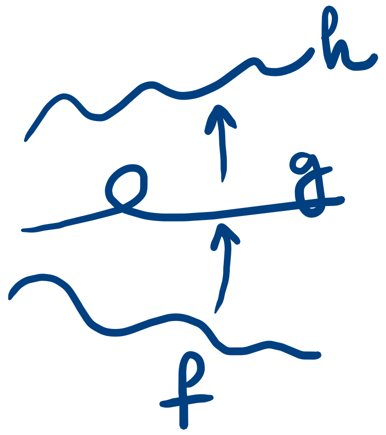
$G: X\times I\to Y \quad G(x,t):=H(x,1-t) \Rightarrow G: g\simeq f$

[T] $H: f\simeq g$

$G: g\simeq h$

Уочимо: $F: X\times I\to Y$

$$F(x,t):=\begin{cases} H(x,2t), & t\in[0,\tfrac{1}{2}] \\ G(x,2t-1), & t\in[\tfrac{1}{2},1]\end{cases}$$



$F|_{X\times[0,\frac{1}{2}]}$ – може $(x,t)\xrightarrow{\varphi}(x,2t)\xrightarrow{H}H(x,2t)$

$\varphi: X\times[0,\tfrac{1}{2}]\to X\times\underbrace{[0,1]}_{I}$

$= H\circ\varphi$

непр ✓

$X\times[0,\tfrac{1}{2}]$ – затворен у $X\times I$

$X\times[\tfrac{1}{2},1]$ – || — ← $F|_{\square}$ непр. аналогно

Лема о лепљењу ⇒ F непрекидна ✓

$$\left.\begin{aligned} F(x,0)&=H(x,0)=f(x)\\ F(x,1)&=G(x,1)=h(x)\end{aligned}\right\}\Rightarrow \boxed{F: f\simeq h} \quad ✓$$

$\Rightarrow \simeq$ је рел. еквиваленције $\square$

Став $f, g: X \to Y$ непр $f \simeq g$

(a) $\varphi: Y \to Z$ непр. $\Rightarrow$ $\varphi \circ f \simeq \varphi \circ g$

(б) $\psi: W \to X$ непр $\Rightarrow$ $f \circ \psi \simeq g \circ \psi$

Доказ: (a) $f \simeq g \leftarrow H: X \times I \to Y$ непр.

$H(x,0) = f(x)$

$H(x,1) = g(x)$

Тогаш: $\left.\begin{array}{l} \varphi \circ H: X \times I \to Z \text{ непр.} \\ \varphi \circ H(x,0) = \varphi \circ f(x) \\ \varphi \circ H(x,1) = \varphi \circ g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\varphi \circ H: \varphi \circ f \simeq \varphi \circ g}$

(б) - за вежбу □

Став $K \subset \mathbb{R}^n$ K-конвексан

X-топ. $\quad f,g : X \to K$ непр. $\Rightarrow f \simeq g$

Доказ: $H : X \times I \to K$

$\boxed{H(x,t) := (1-t)f(x) + tg(x)} \in K$

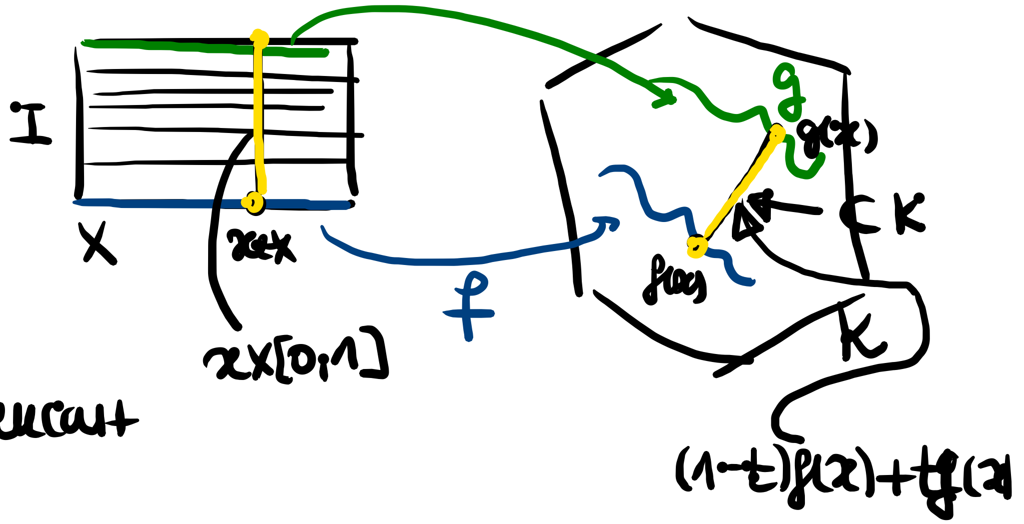
← конвексан

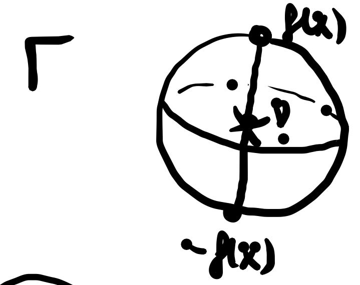
непрекидна ✓

$H(x,0) = f(x)$ ✓

$H(x,1) = g(x)$ ✓ $\quad H : f \simeq g$

линијска (линеарна) хомотопија



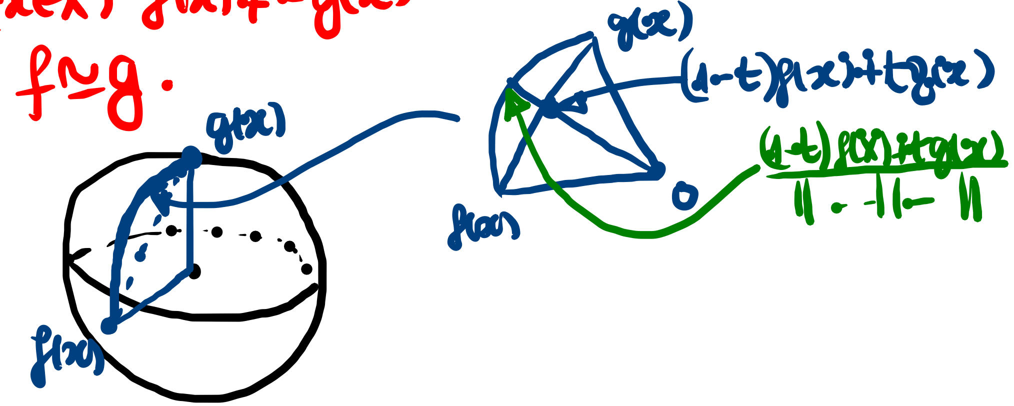


Став X-топ. $\quad f,g : X \to S^n$ нека f,g непр.

$(\forall x \in X)\ f(x) \neq -g(x)$

$\Rightarrow f \simeq g.$

Доказ:



$(1-t)f(x) + tg(x) \neq 0, \quad \forall x \in X$

ппс $= 0$ за неко x

$1-t = (1-t)\cdot\underbrace{\|f(x)\|}_{1} = \|(1-t)f(x)\| = \|-tg(x)\| =$

$= t\|g(x)\| = t$

$t = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}g(x) = 0$

$f(x) = -g(x)$ ↯

Наставак:

$H : X \times I \to S^n$

$$H(x,t) = \frac{(1-t)f(x)+tg(x)}{\|(1-t)f(x)+tg(x)\|}$$

→ добро дефинисано ✓

непр. ✓

$$H(x,0) = \frac{f(x)}{\underbrace{\|f(x)\|}_{1}} = f(x)$$

$H(x,1) = g(x)$

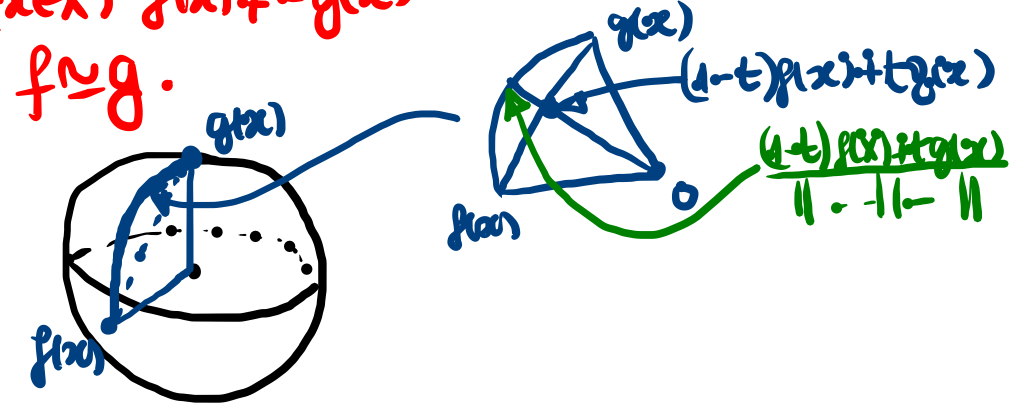
$\Rightarrow \boxed{H : f \simeq g}$ □

Став X-тп. $f,g : X \to S^n$ нека f,g непр.

$(\forall x \in X)\ f(x) \neq -g(x)$

$\Rightarrow f \simeq g.$

Доказ:



$(1-t)f(x)+tg(x) \neq 0,\ \forall x \in X$

ппс $=0$ за неко x

$1-t = (1-t)\cdot\underbrace{\|f(x)\|}_{1} = \|(1-t)f(x)\| = \|-tg(x)\| =$

$= t\|g(x)\| = t$

$t = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}g(x) = 0$

$f(x) = -g(x)$ ↯

– Релативна хомотопија –

Деф: $f, g: X \to Y$ непр, $A \subset X$

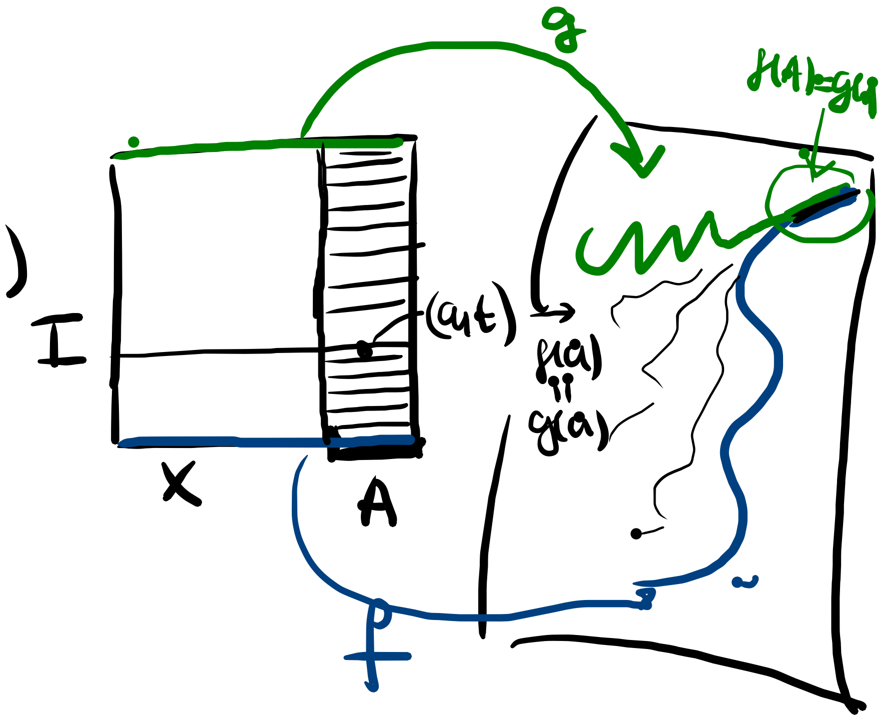
f хомотопно са g релативно A, $f \simeq g\ (\mathrm{rel}\ A)$

акко: $\exists$ непр. $H: X \times I \to Y$ тд.

$(\forall x \in X)\ H(x,0) = f(x)$

$(\forall x \in X)\ H(x,1) = g(x)$

$(\forall a \in A)(\forall t \in I)\ H(a,t) = f(a) = g(a)$



(!!) неопходан услов $(\forall a \in A)\ f(a) = g(a)$

Пр $f, g: X \to K$ K-конвексан

$A \subset X$ $(\forall a \in A)\ f(a) = g(a)$

линфока : $a \in A$, $t \in I$ $H(a,t) = (1-t) f(a) + t \underbrace{g(a)}_{f(a)} = f(a) = g(a)$ ✓

$H: f \simeq g\ (\mathrm{rel}\ A)$

Став $f,g,h: X\to Y$ непр. $A\subset X$

(1) $f\simeq f$ (rel A)

(2) $f\simeq g$ (rel A) $\Rightarrow$ $g\simeq f$ (rel A)

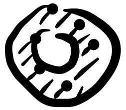
(3) $f\simeq g$ (rel A), $g\simeq h$ (rel A) $\Rightarrow$ $f\simeq h$ (rel A)

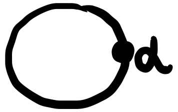
Доказ-за вкъщи

Став $f,g: X\to Y$ непр. $f\simeq g$ (rel A)
$A\subset X$

(1) $\varphi: Y\to Z$ непр. $\Rightarrow$ $\varphi\circ f\simeq \varphi\circ g$ (rel A)

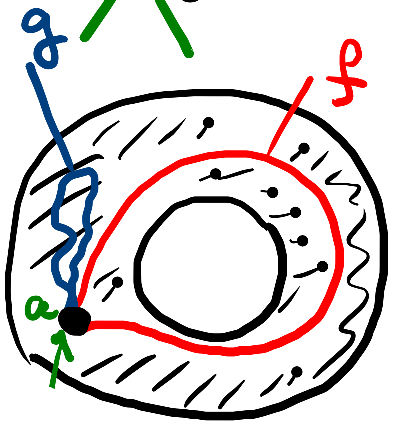
! (2) $\left.\begin{array}{l}\psi: W\to X \text{ непр.}\\ B\subset W \text{ т.ч. } \psi(B)\subset A\end{array}\right\}$ $\Rightarrow$ $f\circ\psi\simeq g\circ\psi$ (rel B)

Пр. $f,g: S^1\to$ 

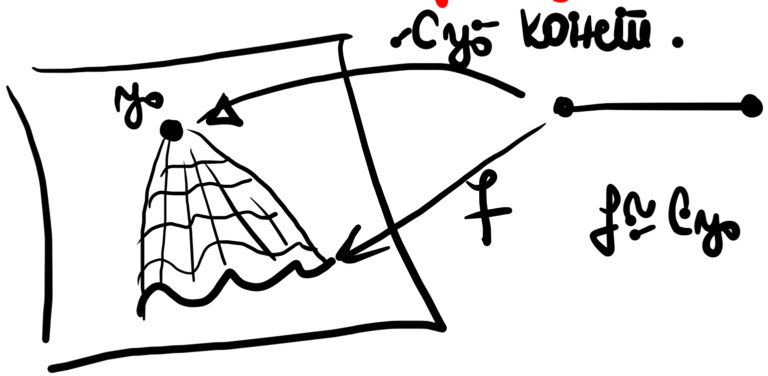


$f(a)=g(a)=a$

$f\not\simeq g$ (rel a)



Хомотопски тривијална пресликавања



„Најдепресивнија идеја из угла хомотопије"

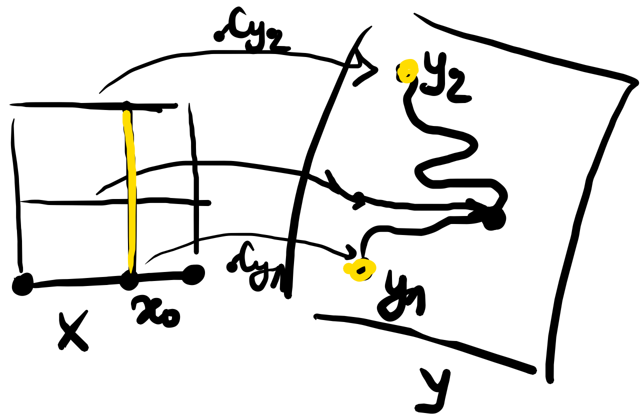
⊛ $H(x,1)=\varphi(1) = y_2$

$H: c_{y_1} \simeq c_{y_2}$ ✓ □

$c_{y_0}: X \to Y$ ← константно

$c_{y_0}(x) = y_0, \ \forall x \in X$

Став $c_{y_1} \simeq c_{y_2} \iff \exists$ пут у Y који спаја y_1 и y_2



Доказ: $(\Rightarrow)$ $H: c_{y_1} \simeq c_{y_2}$ $\quad H: X \times I \to Y$

$x_0 \in X$ $\quad \varphi: I \to Y$

$\varphi(t) := H(x_0, t)$

φ непр. $\varphi(0) = H(x_0, 0) = c_{y_1}(x_0) = y_1$ $\quad \varphi(1) = H(x_0, 1) = y_2$

$\Rightarrow \varphi$ је пут од y_1 до y_2

$(\Leftarrow)$ $\exists$ пут $\varphi: I \to Y$ $\varphi(0) = y_1$ $\varphi(1) = y_2$ $\rightsquigarrow$ $H: X \times I \to Y$ $H(x,t) = \varphi(t)$ непр ✓ ⊛ $H(x,0) = \varphi(0) = y_1$