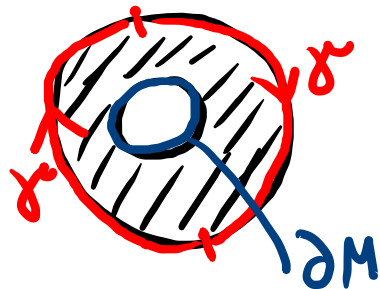
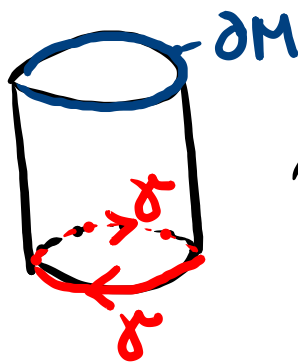


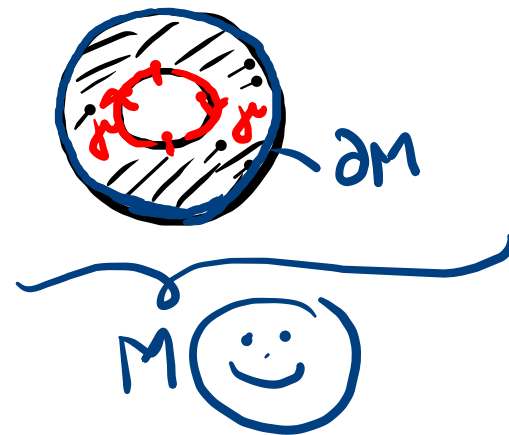
$$M \underset{\approx}{=} M(3)$$



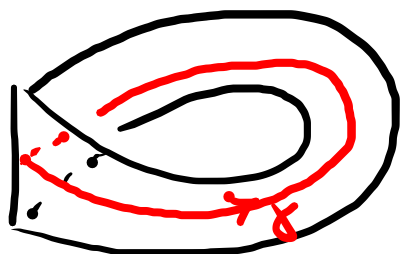
$\approx$



$\approx$



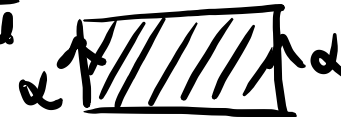
①!  $M \setminus \text{центричне крутище} \approx ?$



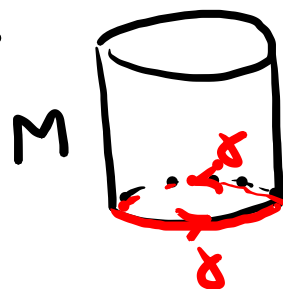
↑  
влезан



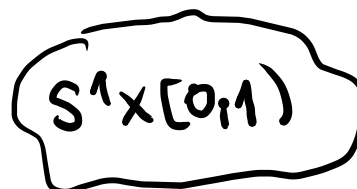
"фрагменти убривати  
цилиндр"



из модела:



$\setminus \gamma :$



$S^1 \times [0,1)$   
цилиндр  
без једне руба

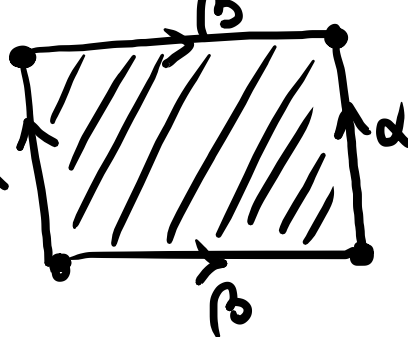


Торус:

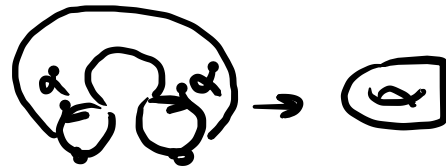
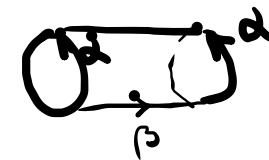
$T^2$

компактн. модел:

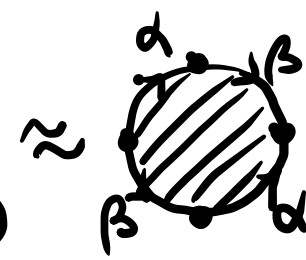
$T^2 \approx$



кит.  $\beta$



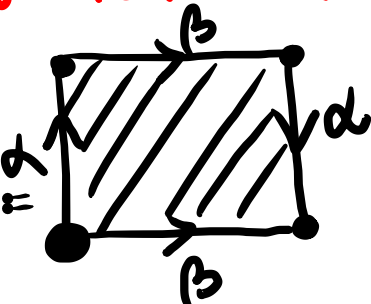
! оба шленка  
исчеза



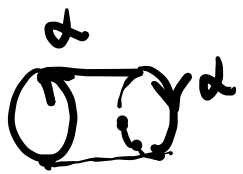
$T^2: \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = 1$

Клиффорда флация: K

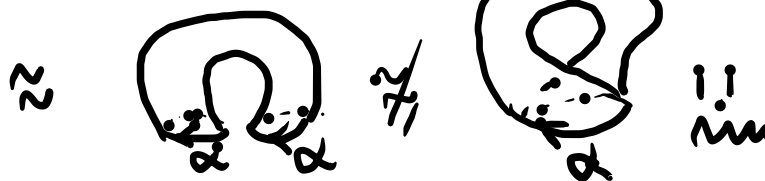
K:



кит.  $\beta$



! оба шленка  
исчеза

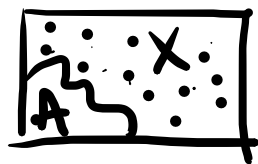


$K: \alpha\beta\alpha\beta^{-1} = 1$

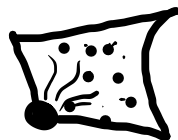
K не может реализоваться в  $\mathbb{R}^3$

# Коллапсание подпространства

$X$ -м.п.  $A \subset X$



$\xrightarrow{/A}$



$\sim$  - отношение на  $X$

$x_1, x_2 \in X: x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \vee x_1, x_2 \in A$

$\sim$  - рефлексивное

$\rightarrow X/\sim$  кол-простор.

$$\{X/A\} = X/\sim$$

"Коллапсание подпространства  $A$  в точку"

$X/A$ -элементы:  $x \notin A \rightarrow [x] = \{x\}$   
 $x \in A: [x] = A$

Пр.1.  $X$   $A: +$

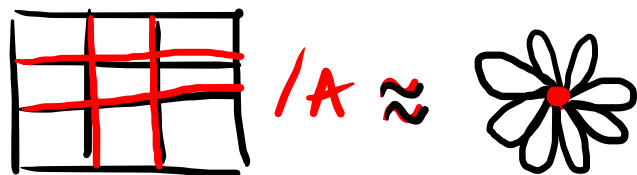
$X/A \approx$

Пр.2  $X = D^2; A = S^1$



$$D^2/S^1 \approx S^2$$

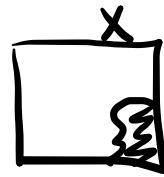
$$\therefore D^n/S^{n-1} \approx S^n$$



Διευκρινιστική σημείωση:  $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$

αιτιών:  $X \sqcup Y$

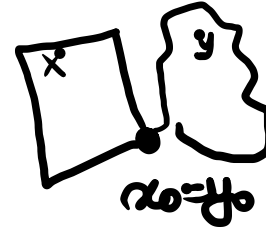
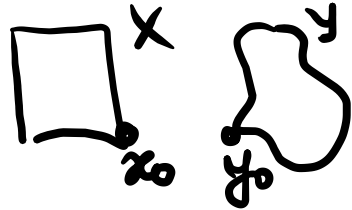
$\tau_{X \sqcup Y} \ni u \Leftrightarrow \cup \{x \in \tau_X \mid \cup \{y \in \tau_Y\}$



$$\begin{array}{c} S^2 \sqcup S^2 \\ \uparrow \\ S^2_{(1)} \sqcup S^2_{(2)} \\ \text{☺} \quad \text{☺} \end{array}$$

Ευκλειδ:

$(x, \tau_x)$  ποτε  $x$   
 $(y, \tau_y)$  ποτε  $y$



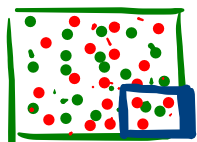
$$\boxed{X \vee Y} := X \sqcup Y / \{x_0, y_0\}$$

δηλ  
 $X \cup Y$   
σε διακριτή  
τοπολογία  $x_0 \cup y_0$

$$S^1 \vee S^1 \approx \text{figure-eight}$$



☺ "μια ιδιότητα της κλάσης"



$X, \sim$

$X/\sim$  (?)

"μια ιδιότητα της κλάσης"

$\leftarrow$  ACX A σε κλάση

$\leadsto A/\sim_A$

$X, \sim$  -rel. equiv.  $X \sim \subset X^2$

ACX  $\rightarrow$  η σχέση ισοτιμίας

$\sim_A := \sim \cap A^2$

$\rightarrow A/\sim_A$

Πρόταση Χ.α.  $\sim$ -rel. equiv.  $X/\sim$  χαμζορφος ισοτιμίας

ACX σε κλάση :  $(\forall x \in X) [x] \cap A \neq \emptyset$

$\Rightarrow X/\sim \approx A/\sim_A$

Δοκάζ:

$A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{\pi} X/\sim$   
ισοτιμία  $\pi$   $\pi$

1°  $\pi$   $\pi$   $\pi$

2° A σε κλάση  $\Rightarrow \pi$   $\pi$   $\pi$

$A \xrightarrow{\pi} X/\sim$   
 $\pi$   $\pi$   $\pi$

$\Rightarrow \pi$   $\pi$   $\pi$

$\Rightarrow \pi$   $\pi$   $\pi$   $\Rightarrow A/\pi \approx X/\sim$

$a_1, a_2 \in A$

$\pi(a_1) = \pi(a_2) \Leftrightarrow [a_1] = [a_2] \Leftrightarrow a_1 \sim a_2 \Leftrightarrow a_1 \sim_A a_2$

$\Rightarrow A/\pi = A/\sim_A \Rightarrow A/\sim_A \approx X/\sim \square$

# Ρεαλνι υπερεπιπεδοι προοωρ $\mathbb{RP}^n$ :

εκφῶ:  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \ni x, y$

$x \sim y \Leftrightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{R}) y = \lambda x$

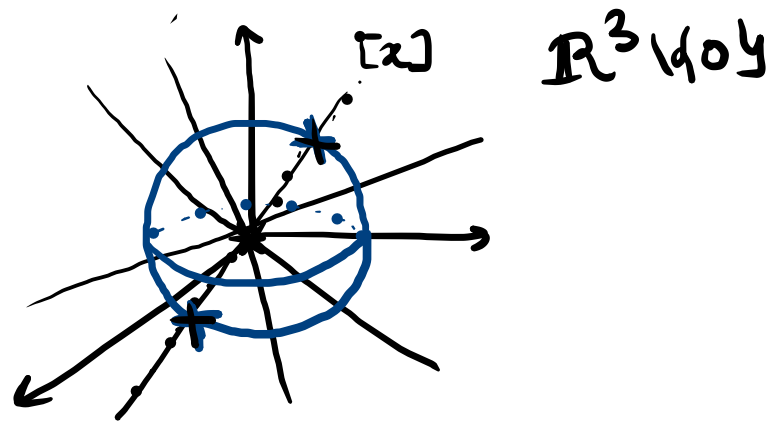
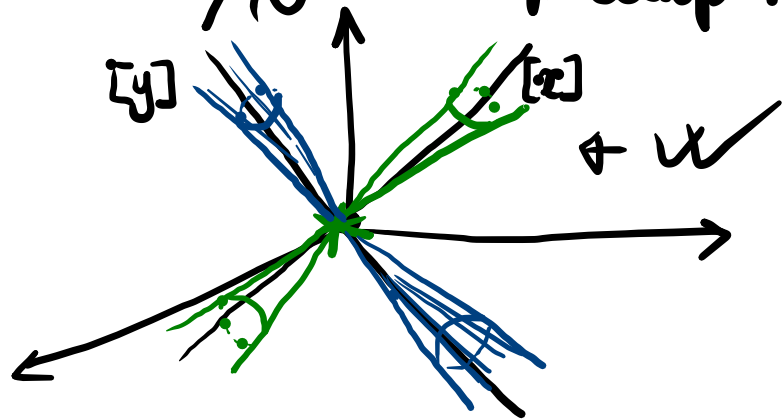
$\sim$  - ρελ. κλιβαλεσηκηε

κλασε:  $[x]$  - ῶραβα  $x$ 0, δεζ 0

$$[\mathbb{RP}^n] := \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$$

$S^n \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}$ ,  $S^n$  ρερε κλασε

$\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$  T2-προοωρ? ✓



ῶραβα ῶραβα:

$$\mathbb{RP}^n \cong \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim \approx S^n / \sim_{S^n}$$

$\sim_{S^n}$ :  $\forall a \in S^n a \sim -a$

$$[\mathbb{RP}^n \approx S^n / a \sim -a]$$

ρερενο αο  
ηοημωοη  
ρερ εληε η  
κωη σὺ ὀαμε  
δε αηημωοη  
ηοημωοη

κοημωοη ρερε κλασε

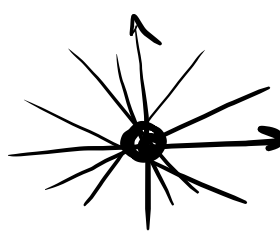
$$S^n \approx D^n$$

$$\mathbb{RP}^n \approx S^n_+ / a \sim -a \text{ } \forall a \in \partial S^n_+$$

$$[\mathbb{RP}^n \approx D^n / a \sim -a \text{ } a \in \partial D^n]$$

$$n=1: \mathbb{RP}^1 \approx \mathcal{D}^1 / \substack{a \sim -a \\ a \in \partial \mathcal{D}^1} \approx \begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \\ a \quad -a \end{array} \approx \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ a \end{array} \approx S^1 \quad \boxed{\mathbb{RP}^1 \approx S^1}$$

$$n=2: \mathbb{RP}^2 \approx \mathcal{D}^2 / \substack{a \sim -a \\ a \in \partial \mathcal{D}^2} \quad \substack{\text{circle with } \alpha \text{ and } -\alpha \text{ identified} \\ \alpha \quad -\alpha \quad \alpha}$$



$$\mathbb{RP}^2: \quad \begin{array}{c} \text{circle with } \alpha \text{ and } -\alpha \text{ identified} \\ \alpha \quad -\alpha \end{array} \quad \alpha\alpha=1$$

$$\mathbb{RP}^2 \approx \begin{array}{c} \text{square with } \alpha \text{ and } -\alpha \text{ identified} \\ \alpha \quad \beta \end{array} \quad \delta = \alpha\beta \quad \begin{array}{c} \text{square with } \delta \text{ and } -\delta \text{ identified} \\ \delta \quad -\delta \end{array}$$

~ Многообразия и поверхности ~

Зер.  $X$   $T_2$ -простор ( $T_X$ )

$X$  је  $n$ -дименсионално многообразие ако  
 $(\forall x \in X) \exists U_x \in \mathcal{O}(X) \cap T_X$   $U_x \approx \mathbb{R}^n$  ( $\approx \mathbb{R}^n$ )

Пр.  $\mathbb{R}^n, S^n$

Површ = 2-дим. многообразие

пр.  $S^2, \mathbb{R}^2, T^2, S^1 \times \mathbb{R}, \mathbb{RP}^2, K$



$\approx \mathbb{D}^2 \approx \mathbb{R}^2$

Слика

$X$   $n$ -дим. мнџ.

$Y$   $m$ -дим. мнџ.

$\Rightarrow$

$X \times Y$   
 $(n+m)$ -дим. мнџ.

~ Многомерность и границы ~

Def.  $X$   $T_2$ -пространство ( $T_X$ )

$X$  является  $n$ -мерной многомерностью с границей ако  
 $(\forall x \in X) \left( \underbrace{(\exists U_x \in \mathcal{O}(x) \cap T_X)}_{(1)} (U_x \approx \mathbb{R}^n) \right) \vee (\exists U_x \in \mathcal{O}(x) \cap T_X) (U_x \approx \mathbb{R}^n_+)$



Граница  $X$ :  $\partial X = \{x \in X \mid \neg (1)\}$

Примеры:  $C = S^1 \times I$    $\cap$    $\subset \mathbb{R}^n$  

\*  $X$  имеет границу  $\Rightarrow X \setminus \partial X$  многомерность

\*  $X$   $n$ -гум. имеет границу  $\Rightarrow \partial X$  является  $(n-1)$ -гум. многомерностью

Лемма  $X$   $n$ -гум. имеет гр.  $Y \Rightarrow X \times Y$  является  $(n+m)$ -гум. с границей  
 $Y$   $m$ -гум. имеет гр.  $\checkmark$   $\partial(X \times Y) = \partial X \times Y \cup X \times \partial Y$

Пр   $\partial(S^1 \times I) = \cancel{\partial S^1 \times I} \cup S^1 \times \underbrace{\partial I}_{\{0,1\}} = S^1 \times \{0,1\}$  

Слика.  $X, Y$ -мнст. са границом  $h: X \xrightarrow{\sim} Y$  хомеом.  
 $\Rightarrow h(\partial X) = \partial Y$

① Док. да  $C \not\approx M$ .

пн.  $C \approx M \xRightarrow{\text{шоб.}} \partial C \approx \partial M \quad \nexists$   


Def Манифолдаци је затворена ако је компактна и без границе.

Пр.  $S^2, T^2, \mathbb{RP}^2, K$

Циљ: Какве затв. форми постоје?

Прва фамилија:  $M_g$

•  $g=0$   $|M_0 := S^2|$

•  $M_1$   $\approx T^2$   $|M_1 \approx T^2|$

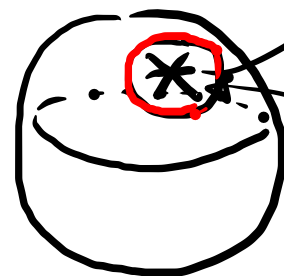
•  $M_2$

•  $M_g$   $\approx$   $g$  ручки

ориентационе  
поврх  
кога  $g$

Друга фамилија  $N_h$

$N_1$



екстремум или особ. тачка

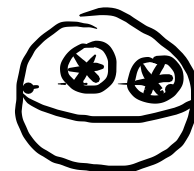


по комедијацију  
гранца,  $\partial M$  зависи по  
фамилију сличних граничних



$N_1 \approx$   $|N_1 \approx \mathbb{R}P^2|$

$N_2$



2 мед. тачке

$N_h$

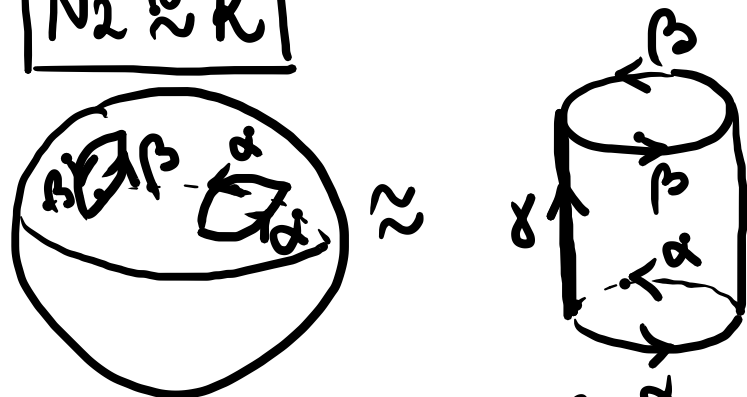


$h$  мед. тачка

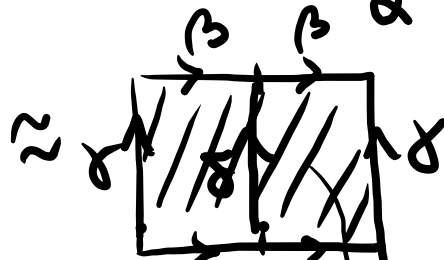
неориентирана поврх кога  $h$

Ща је  $N_2$ ?

$$N_2 \approx K$$



исчено  $\delta$ :

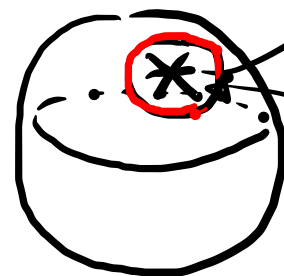


сечено  $\delta$



Друга фамилија  $N_h$

$N_1$



екстремуми оуб. функција



$M$   $\partial M$

по ком слоју унутрашњих граница,  $\partial M$  зависи из функција сликајући нају јача



$$N_1 \approx \mathbb{RP}^2$$

$N_2$



2 мед. шраке

$N_h$



$h$  мед. шрака

неоргунизиране шраке  $h$

Комбинировано:



8 речки Hg<sub>12</sub>

Ваме:  $\boxed{Hg_{12} \approx N_{2g} + h}$   
за центу