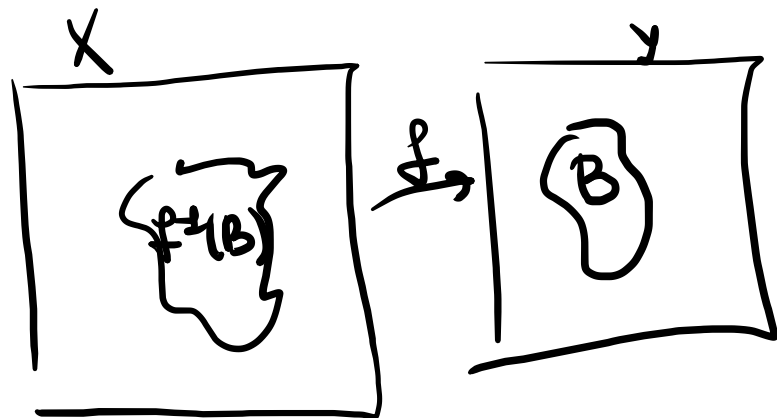
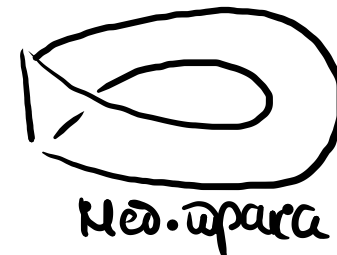


Компактна пресликавања

Def. $f: X \rightarrow Y$ f је компактно ако је HA
и важи: $(\forall B \subseteq Y) (B \in \mathcal{T}_Y \Leftrightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X)$



- $B \in \mathcal{T}_Y \Rightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X$
 $\Rightarrow f$ је непрекинуто
- $\textcircled{!} \forall$ компактно прса је непрекинуто
- $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X \Rightarrow B \in \mathcal{T}_Y$
непрекинуто
HA

Сваб: $f: X \rightarrow Y$ је компактно $(\Leftrightarrow) f$ је HA и $(\forall F \subseteq Y) (F \in \mathcal{T}_Y \Leftrightarrow f^{-1}(F) \in \mathcal{T}_X)$

Доказ: $(\Rightarrow)$ f је HA $\vee$

$F \subseteq Y \quad F \in \mathcal{T}_Y \stackrel{?}{\Rightarrow} f^{-1}(F) \in \mathcal{T}_X$ ✓ јер f непрекинуто

спроти смер: знамо $f^{-1}(F) \in \mathcal{T}_X \Rightarrow (X \setminus f^{-1}(F)) \in \mathcal{T}_X \quad f^{-1}(F^c) \in \mathcal{T}_X$
 $\Leftarrow$ Аналогно

$F^c \in \mathcal{T}_Y \Rightarrow F \in \mathcal{T}_Y$ ✓

Слід $f: X \rightarrow Y$ важке ів'язна:

(1) f неів'язна, HA , $ошворення \Rightarrow f$ континіу

(2) f неів'язна, HA , $замкнутість \Rightarrow f$ континіу.

Доказ: (1) f неів'язна
 іще ів'язна? $\Rightarrow$
 $\forall y \in Y: f^{-1}(y) \in T_X \Rightarrow y \in Y$

нека $y \in Y$ $f^{-1}(y) \in T_X$
 f ів'язна $\Rightarrow f(f^{-1}(y)) \in Y \Rightarrow y \in Y$
 $= y$ f HA

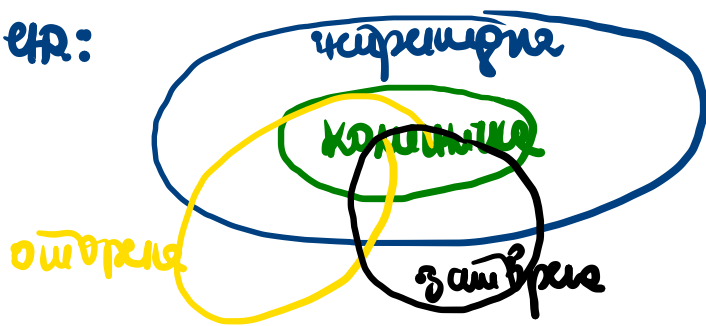
(2) аналогічно
 (ів'язна)
 $\forall y \in Y: f^{-1}(y) \in T_X \Rightarrow y \in Y$

□

Послідиа:

$f: X \rightarrow Y$ $\Rightarrow f$ континіу.
 неів'язна HA $континіу$

Наприклад:

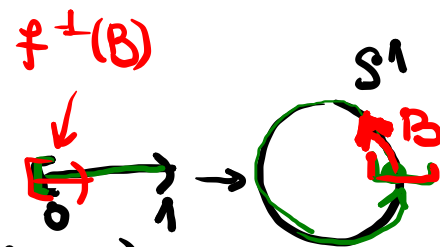


Пример:

$f: [0, 1) \rightarrow S^1$
 $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$

неів'язна HA ✓

іще континіу
 $\exists y \in S^1 f^{-1}(y) \in T_{[0,1)}$



Лема. Композиција компилних прелик. је компилно преликавање.

Доказ:

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

f, g компилна

$g \circ f$ комп. као $\circ$
 $\text{HA} \quad \text{---} \text{---}$

прети услов: $B \in Z$

$(g \circ f)^{-1}(B) \in T_X \quad \{ \cdot \} \Rightarrow B \in T_Z$

$f^{-1}(g^{-1}(B)) \in T_X \xRightarrow{f \text{ комп.}} g^{-1}(B) \in T_Y \xRightarrow{g \text{ комп.}} B \in T_Z$

$\Rightarrow g \circ f$ компилно $\square$

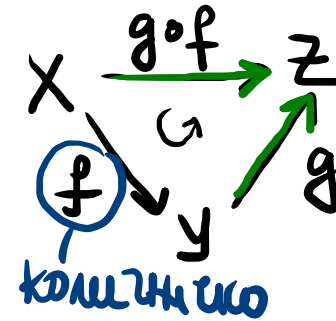
Лема $f: X \rightarrow Y$ компилно + 1-1

$\Rightarrow f$ је хомеоморфизам.

(за формале)

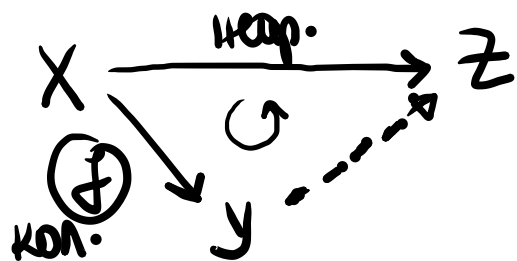
Лема 1 $f: X \rightarrow Y$ колонтиско
 $g: Y \rightarrow Z$ проузвонно

Тара вапи: g је неурекисно $\Leftrightarrow g \circ f$ неурекисно.



Доказ: $(\Rightarrow)$ g неур.
 f кол. $\Rightarrow$ неур. $\Rightarrow g \circ f$ неурекисно $\checkmark$

$(\Leftarrow)$ $g \circ f$ неурекисно
 за $g: \underline{u \in T_Z}$ $\{?\} g^{-1}(u) \in T_Y$



$\Rightarrow g \circ f$ неур. $\Rightarrow (g \circ f)^{-1}(u) \in T_X$

$f^{-1}(g^{-1}(u)) \in T_X$

f кол. $\Rightarrow \underline{g^{-1}(u) \in T_Y}$

$\checkmark \Rightarrow g$ неурекисно $\square$

Κομικτικοί Προσώροι

Def. $f: (\underbrace{X, \tau_X}_{\text{top. sp.}}) \rightarrow \underbrace{Y}_{\text{sp.}} \quad f \text{ HA}$

$$\tau_Y := \{V \subset Y \mid f^{-1}(V) \in \tau_X \text{ and } V \leftarrow \subset \mathcal{P}(Y)\}$$

τ_Y je υποτοπολογία η Y koja se naziva **φινικατοπτολογία** προσκικτικη f .

Claim τ_Y je υποτοπολογία η Y .

Δοκάζ: (1) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau_X \Rightarrow \emptyset \in \tau_Y$
 $f^{-1}(Y) = X \in \tau_X \Rightarrow Y \in \tau_Y$

(2) $U, V \in \tau_Y \Rightarrow U \cup V \in \tau_Y$

$$\begin{aligned} &\uparrow \\ &f^{-1}(U), f^{-1}(V) \in \tau_X \Rightarrow \underbrace{f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)}_{= f^{-1}(U \cup V)} \in \tau_X \end{aligned}$$

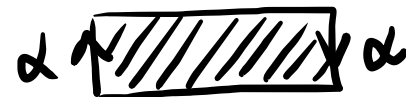
$$\Rightarrow U \cup V \in \tau_Y \quad \checkmark$$

(3) $U_\lambda \in \tau_Y, \forall \lambda \in \Lambda \stackrel{?}{\Rightarrow} \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \tau_Y \quad \checkmark$

$$\begin{aligned} &\uparrow \\ &f^{-1}(U_\lambda) \in \tau_X, \forall \lambda \in \Lambda \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(U_\lambda) \in \tau_X \leftarrow f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda\right) \in \tau_X \end{aligned}$$

τ_Y jestime
υποτοπολογία
η Y $\checkmark$

□



Колични прости

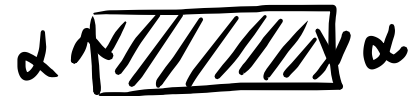
Def. $f: (\underbrace{X, \tau_X}_{\text{пр. пр.}}) \rightarrow \underbrace{Y}_{\text{скуп}} \quad f \text{ на}$

$$\tau_Y := \{V \subset Y \mid f^{-1}(V) \in \tau_X \text{ и } \emptyset \neq V \subsetneq Y\}$$

τ_Y је топологија на Y која се назива финална топологија прсликавања f .

$\leadsto f: (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y) \leftarrow$ видимо као прсликавање
тополошких прости

Значење: f је непрекинуто
 f је колично



колична
топологија

Важна континуирана:

(X, τ_X) — топ. простор.

$\sim$ — рел. еквиб. на X

$X/\sim$ — простор класа: $x \in X$ $[x] = \{y \in X \mid x \sim y\}$

$\pi: X \rightarrow X/\sim$ природна пројекција

$x \mapsto [x]$

→ функција топ. прел. π :

$$\tau_{X/\sim} = \{ V \subset X/\sim \mid \pi^{-1}(V) \in \tau_X \}$$

$\leadsto \pi: (X, \tau_X) \rightarrow (\underbrace{X/\sim, \tau_{X/\sim}}_{\substack{\text{количителен} \\ \text{простор (количина)} \\ \text{простора } X \text{ по рел. } \sim}})$ континуирана прелиминација

$f: X \rightarrow Y$ композиция ($\pi: X \rightarrow X/\sim$ композиция)

X коммутативна $\Rightarrow X/\sim$ коммутативна

X полезна $\Rightarrow X/\sim$ полезна

X притоковно $\Rightarrow X/\sim$ притоковно

$X \models T_2 \not\Rightarrow X/\sim \models T_2$

инв. композиция.

(!!) $\{ X \approx Y \mid X \models T_2 \Rightarrow Y \models T_2 \}$
небывает:

$\{ f: X \rightarrow Y \text{ инв. к } f \mid \nexists y \models T_2 \}$
 $X \models T_2$

инв. к T_2 не

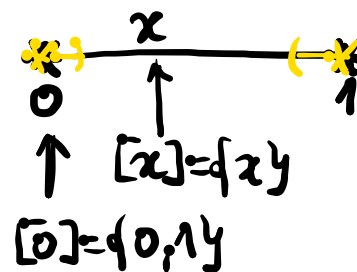
Пример:

$$X = [0, 1]$$

$$x_1, x_2 \in [0, 1] \quad x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \vee x_1, x_2 \in \{0, 1\}$$

$$\text{класс: } [x], x \in (0, 1)$$

$$\{0, 1\} \sim [0] = [1]$$



$$X/\sim:$$



$$[0, 1]/\sim \approx S^1$$

* За любую заданную функцию:

$$f: (X, \tau_X) \longrightarrow Y$$

определено $\sim$ на X

$$x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

per. emb. на X ✓

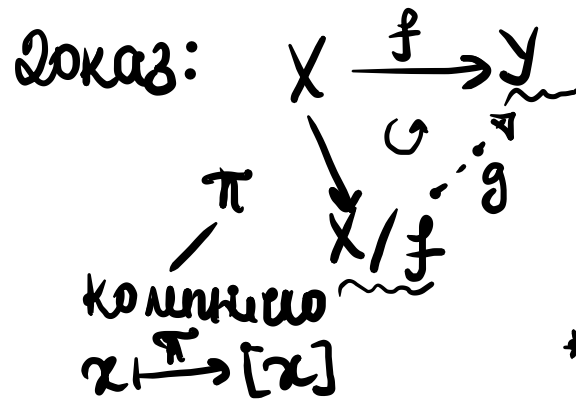
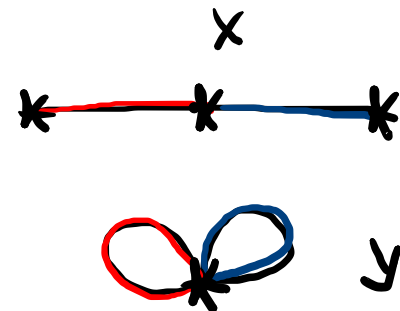
→ прообраз класса $X/\sim$

$$X/f$$

$$:= X/\sim$$

— количник прообразов X по f

Теорема X, Y - т.т. $f: X \rightarrow Y$ континуально $\Rightarrow X/f \approx Y$



определим:

$$g: X/f \rightarrow Y$$

$$g([x]) := f(x)$$

* хорошо определено $[x_1] = [x_2]$

$$\begin{array}{c} \updownarrow \\ f(x_1) = f(x_2) \end{array} \quad \checkmark$$

* непрерывен: $g([x]) = f(x)$

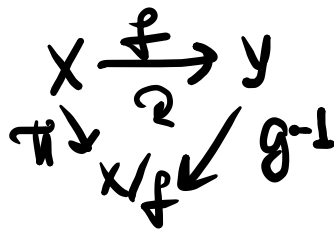
$$g \circ \pi(x) = f(x) \quad \xRightarrow{\text{лемма 1}} \underline{g \text{ непрер.}} \quad \checkmark$$

континуально непрер.

* g не н.т. f н.т.

* 1-1? $g([x_1]) = g([x_2]) \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow [x_1] = [x_2]$ $\checkmark$ $\left. \begin{array}{l} g \text{ не н.т.} \\ g \text{ сюръект.} \end{array} \right\} \underline{g \text{ биектив.}}$

* g сюръективна
 $\Rightarrow \exists g^{-1}$



$$g^{-1} \circ g = \text{id}_{X/f} \quad \xRightarrow{\text{лемма 1}} \underline{g^{-1} \text{ непрер.}}$$

кон. непрер.

$$\Rightarrow X/f \approx Y \quad \square$$

Пример:

$$f: I \rightarrow S^1$$

$$f(t) := (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$

непр. на

$$I \xrightarrow{f} S^1$$

конц.

$$\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ замкнут



$\Rightarrow f$ је континуу

$$\text{морема} \Rightarrow I/f \approx S^1$$

или ма је I/f : $t_1, t_2 \in I$ $[t_1] = [t_2] \Leftrightarrow f(t_1) = f(t_2)$

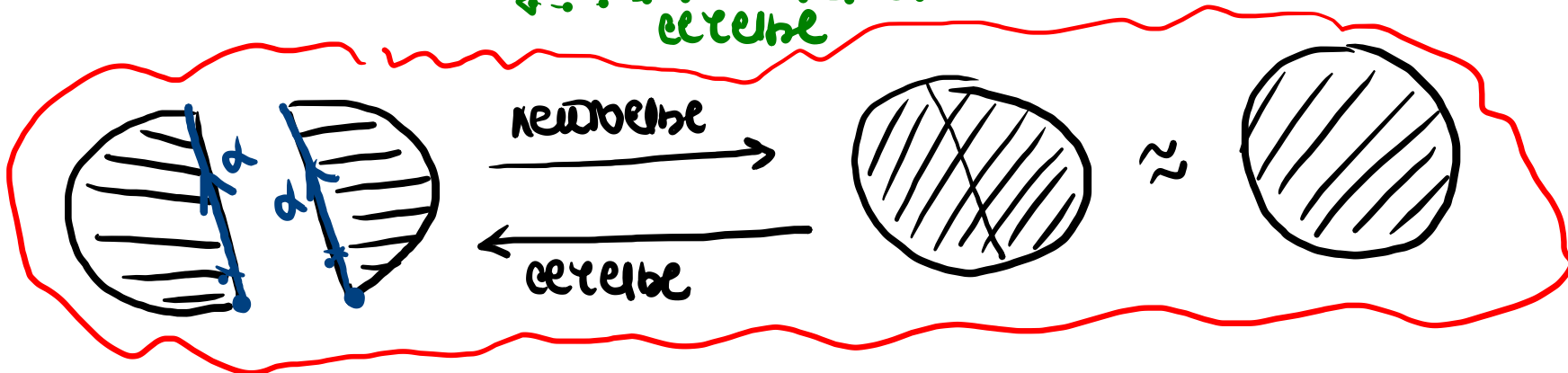
$$\Leftrightarrow t_1 = t_2$$

$$\vee \{t_1, t_2\} = \{0, 1\}$$

$$I/f \quad \begin{matrix} a \\ * \\ 0 \end{matrix} \xrightarrow{\quad} \begin{matrix} a \\ * \\ 1 \end{matrix}$$

$$\approx \text{loop } a \approx \text{circle } a = \text{circle } S^1$$

.....
 лево
 десно

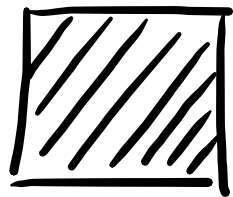


$$X \xrightarrow{f} Y$$

континуу

$$X/f \xrightleftharpoons[\text{сер.}]{\text{непр.}} Y$$

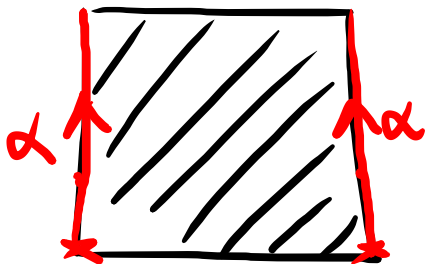
Пр. Цилиндар: кон. простор $(\mathbb{D}^1)^2 = I^2$



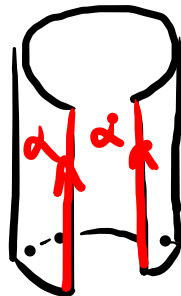
$$f: I^2 \rightarrow S^1 \times I$$

$$(u, v) \mapsto (\cos 2\pi u, \sin 2\pi u, v)$$

I^2/f



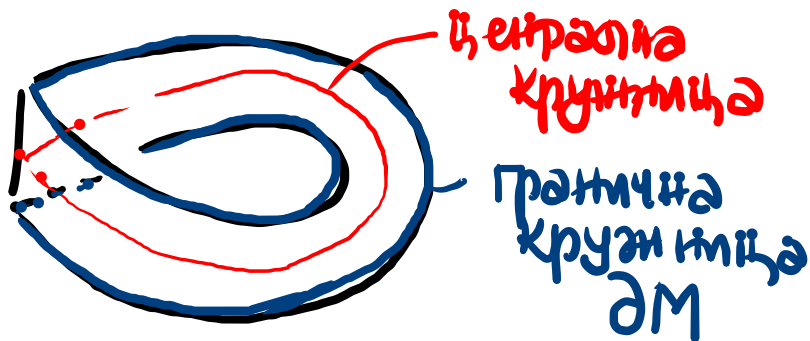
$\approx$



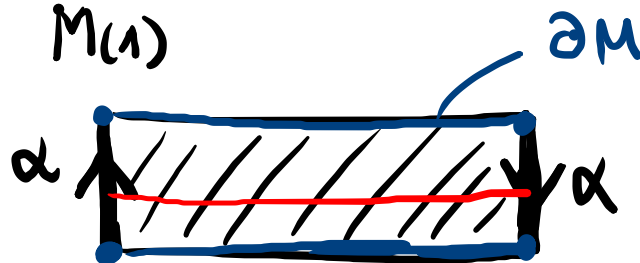
$\approx$



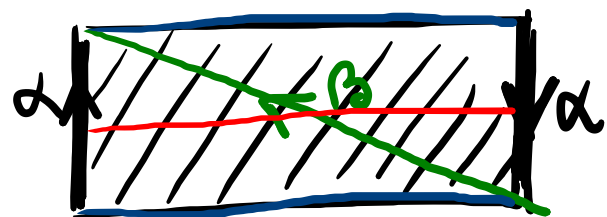
Пр. Медусова шрака M



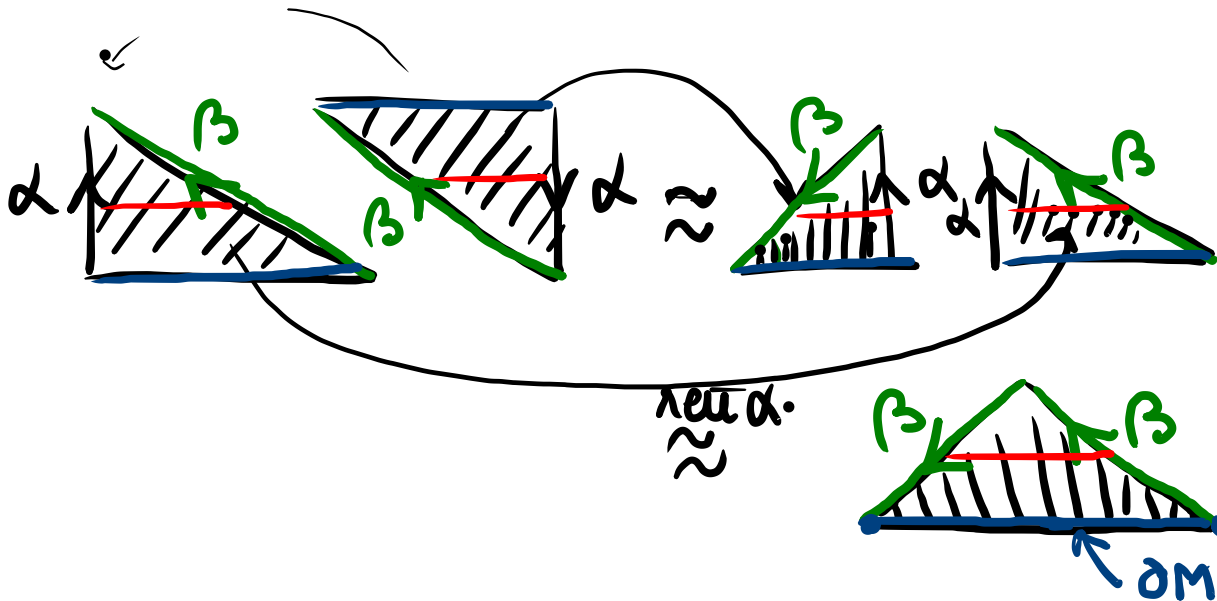
$M(1)$



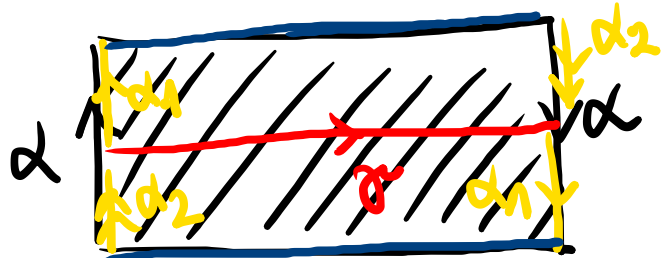
Справа улога $M(2)$



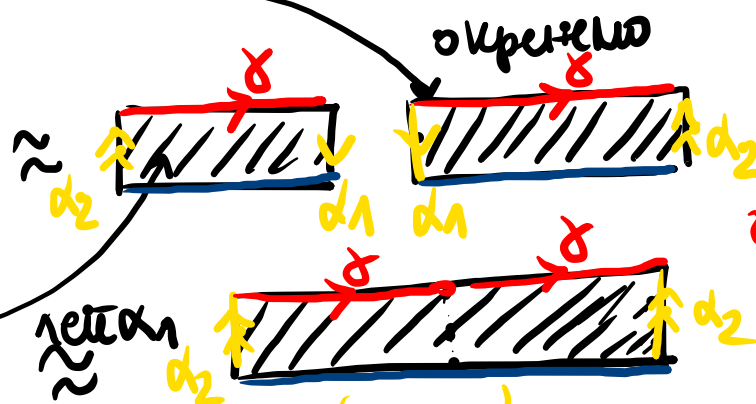
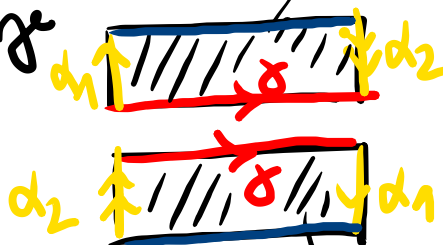
cer;



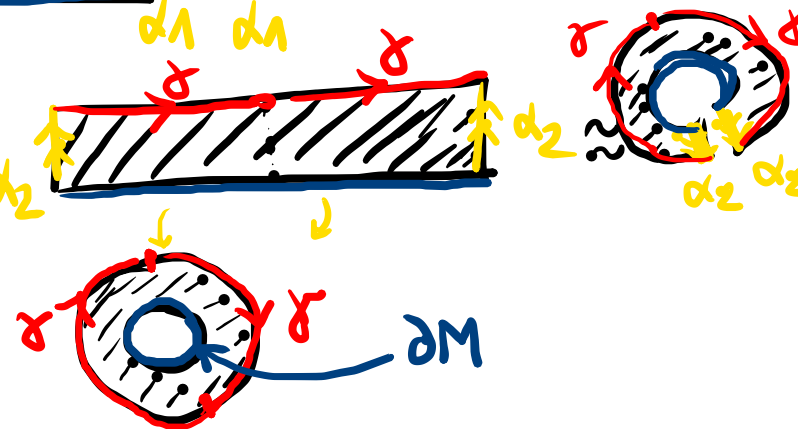
Шпета улога $M(3)$



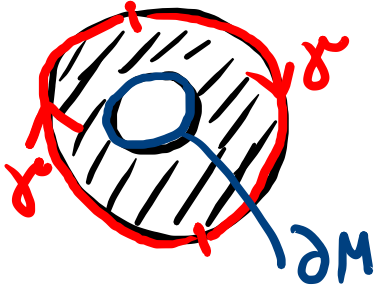
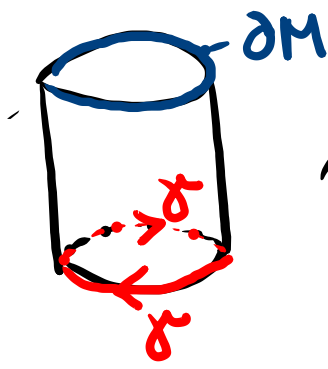
cer. δ



cer. δ_2



$$M \underset{\approx}{=} M(3)$$


 $\approx$

 $\approx$
