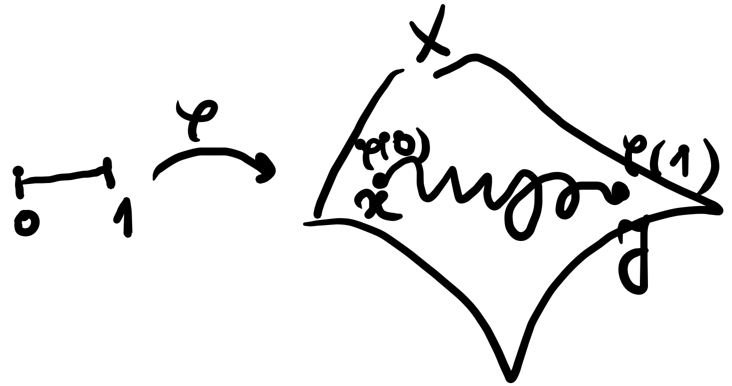
Путеви и путна повезаност

Деф (X,T) - т.п.

Пут у X је непр. пресл. $\varphi : [0,1] \to X$

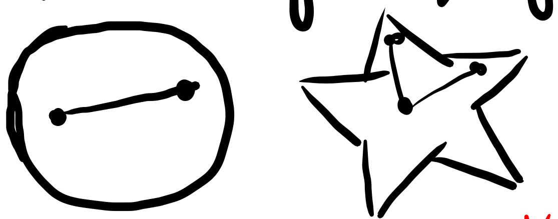


$I = [0,1]$

Ако $\varphi(0)=\varphi(1)$ φ је ПЕТЉА

X је путно повезан ако за $\forall x,y \in X$ $\exists$ пут $\varphi : I \to X$ $\varphi(0)=x$ $\varphi(1)=y$

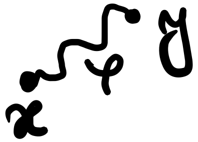
Пример: конвексан скуп $\Rightarrow$ путно повезан



звездасти скуп $\Rightarrow$ путно повезан

Став X је путно повезан $\Rightarrow$ X је повезан.

Доказ:

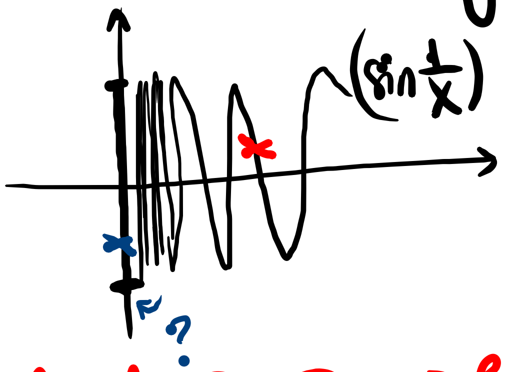


$x \in X$ фиксирано
$y \in X$ произв. $\to$ $\exists$ пут $\varphi : [0,1] \to X$ $\varphi(0)=x$, $\varphi(1)=y$

$x, y \in \varphi[0,1]$ - повезан (непр. повезан) $\Rightarrow$ $y \in C_x$ повезан

$\forall y \in X$ $X = C_x$ $\Rightarrow$ X повезан. ∎

Тополошка синусоида:



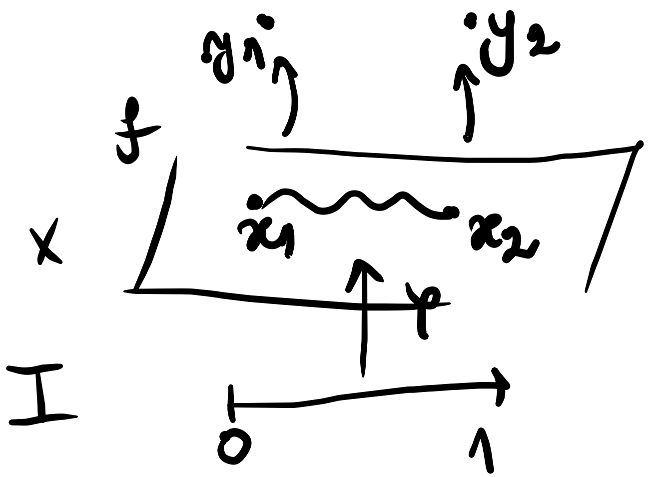
повезан

није путно повезан

Став: Путна повезаност је непр. инваријанта.

X - путно пов. $f: X \to Y$ непр. + НА $\Rightarrow$ Y путно повезан.

Доказ: $y_1, y_2 \in Y$



f НА $\Rightarrow \exists x_1, x_2 \in X$

$f(x_1) = y_1,\ f(x_2) = y_2$

X путно пов.

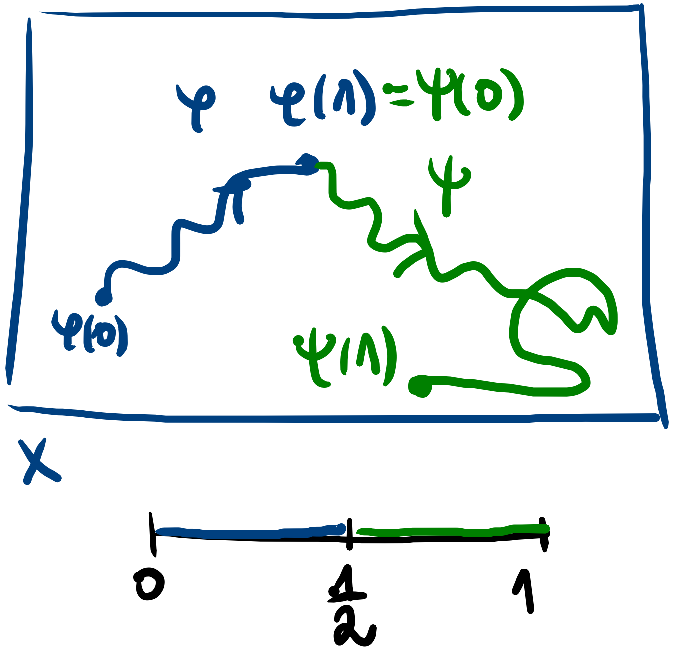
$\Rightarrow \exists$ пут $\varphi: I \to X$ $\quad \varphi(0) = x_1,\ \varphi(1) = x_2$

$\Rightarrow f \circ \varphi : I \to Y$ непр.

$\left.\begin{array}{l} f\circ\varphi(0) = f(x_1) = y_1 \\ f\circ\varphi(1) = f(x_2) = y_2 \end{array}\right\}$ $f \circ \varphi$ пут од y_1 до y_2

$\square$

НАДОВЕЗИВАЊЕ ПУТЕВА



$\varphi,\psi : I \to X$ путеви

$\varphi(1)=\psi(0)$

Над. путева φ и ψ је пут

$\varphi\cdot\psi : [0,1] \to X$!! „дупло брже идемо"

$$(\varphi\cdot\psi)(t) := \begin{cases} \varphi(2t), & t\in[0,\frac{1}{2}] \\ \psi(2t-1), & t\in[\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

КРИВА у простору X : је скуп $\varphi[0,1]$, где је $\varphi:[0,1]\to X$ пут.

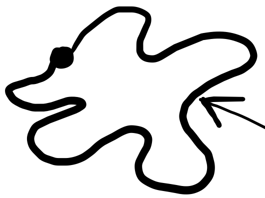
$\varphi([0,1])$

* φ „1-1" → крива је проста

* ако је $\varphi|_{[0,1)}$ „1-1"

и $\varphi(0)=\varphi(1)$

крива је ПРОСТА ЗАТВОРЕНА, односно ЖОРДАНОВА КРИВА



* $\varphi : \underbrace{[0,1]}_{\text{компактан}} \to X$

$X = \mathbb{R}^n$ Хаусдорфов

$\Rightarrow$ φ затворена

$\varphi[0,1]$ затворен скуп

Ако је φ проста крива у $\mathbb{R}^n$

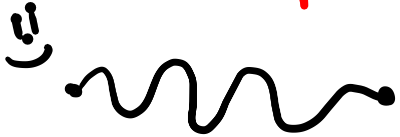
$\varphi : \underset{\text{комп.}}{[0,1]} \xrightarrow{1-1} \underset{\text{Хауд.}}{\mathbb{R}^n}$ $\Rightarrow$ φ је утапање

$\varphi[0,1] \approx [0,1]$

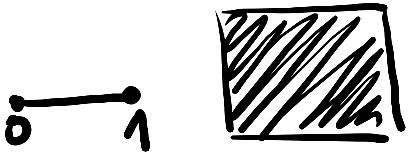
:) $\forall$ проста крива у $\mathbb{R}^n$ је $\approx [0,1]$

Важи и: $\forall$ проста затв. крива је хомеоморфна кружници.

Пеанове криве



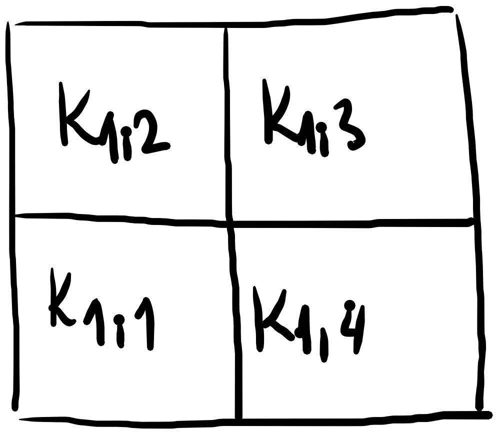
Деф $\varphi:[0,1]\to[0,1]^2$ непрекидна сурјекција се назива Пеанова крива.



Како?

Једна конструкција: низ кривих $\varphi_n:[0,1]\to[0,1]^2$

(φ_1) $\varphi_1:[0,1]\to[0,1]^2$



$K_{1,1}= [0,\frac{1}{2}]\times[0,\frac{1}{2}]$

$K_{1,2}:= [0,\frac{1}{2}]\times[\frac{1}{2},1]$

⋮

φ_1 – неко непр. пресликавање $I\to I^2$ које задовољава:

$\varphi_1([0,\frac{1}{4}])\subset K_{1,1}$

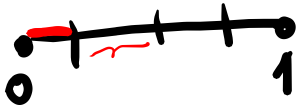
$\varphi_1([\frac{1}{4},\frac{1}{2}])\subset K_{1,2}$

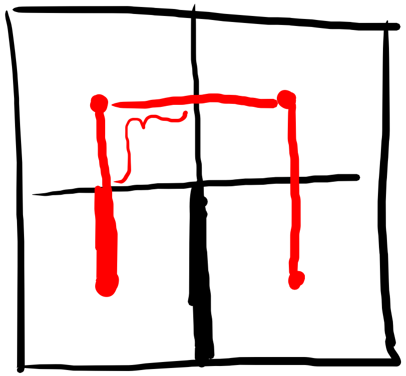
$\varphi_1([\frac{1}{2},\frac{3}{4}])\subset K_{1,3}$

$\varphi_1([\frac{3}{4},1])\subset K_{1,4}$

$\varphi_1[\frac{m-1}{4},\frac{m}{4}]\subset K_{1,m}$

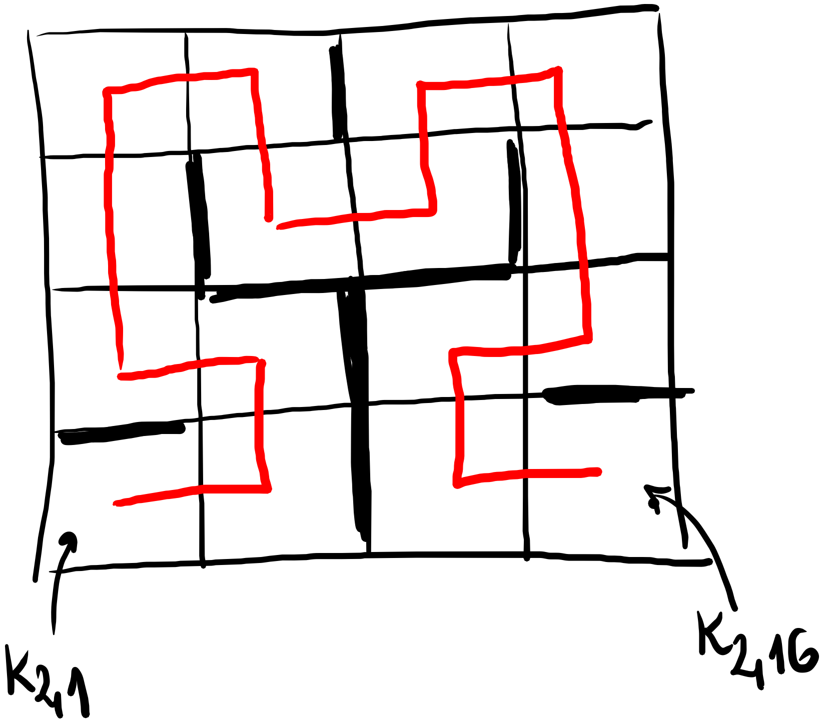
$m=1,4$





φ_2 сваки $K_{1,m}$ делимо на 4 подударна квадрата

↳ 16 квадрата $K_{2,j}$ $j=1,\dots,16$



* први $K_{2,1}$ → доњи леви
* последњи $K_{2,16}$ - доњи десни
* два узастопна имају зај. ивицу

$$K_{1,m} = \bigcup_{j=4m-3}^{4m} K_{2,j} \qquad m=1,2,3,4$$

крива $\varphi_2 : I \to I^2$ по $\frac{1}{16}$ времена проведе у сваком од квадрата редом

$$\varphi_2\left[\frac{j-1}{16}, \frac{j}{16}\right] \subset K_{2,j}$$

$$j=1,\dots,16$$

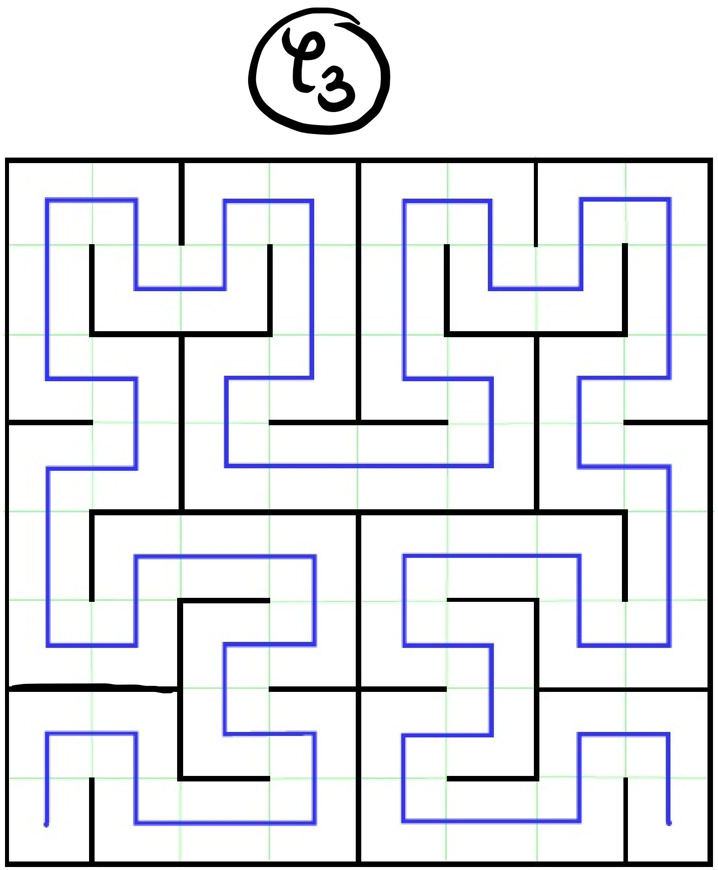
за претх. поделу: $\varphi_2\left[\frac{m-1}{4}, \frac{m}{4}\right] \subset K_{1,m}$

Настављамо: $\varphi_n : I \to I^2$ непрекидно

низ квадрата $\{K_{n,m}\}_{m=1,\dots,4^n}$

* подела на 4^n подквадрата
* веза $K_{n,m} = \bigcup_{j=4m-3}^{4m} K_{n+1,j}$
* $K_{n,1}$ доњи леви
  $K_{n,4^n}$ доњи десни
* $K_{n,m}$ и $K_{n,m+1}$ имају зај страницу
* "по $\frac{1}{4^n}$ времена у сваком квадратићу"

$$\varphi_n\left[\frac{m-1}{4^n}, \frac{m}{4^n}\right] \subset K_{n,m}, \quad \forall m \in \{1,\dots,4^n\}$$



Дефинишемо: $\varphi : I \to I^2$

$$\varphi(t) := \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t)$$

добро дефинисано

... $d_2(\varphi_k(t), \varphi_l(t)) \leq \frac{\sqrt{2}}{2^n}$

за $k, l > n$

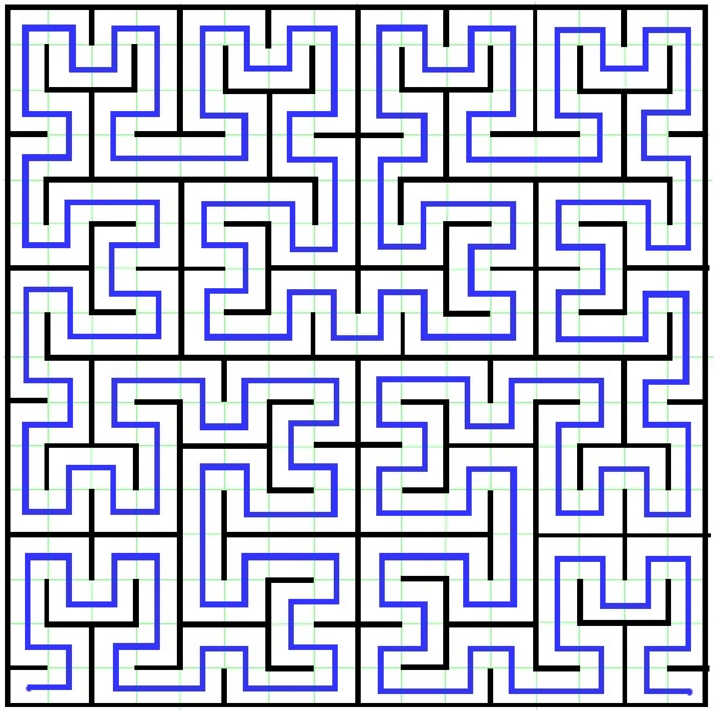
$(\varphi_k(t))_{k\in\mathbb{N}}$ Кошијев низ

$\Rightarrow$ конвергира ...

непрекидност ... ✓

φ је непрекидна фја

φ_4



φ је НА $\quad x_0 \in I^2 \quad \varphi : I \to I^2$

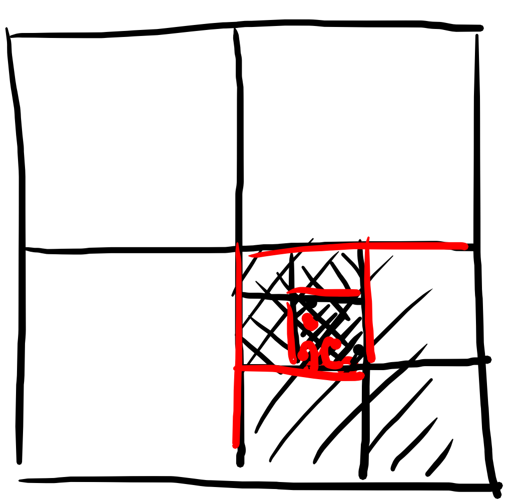
$\forall n \in \mathbb{N}$ $K_{n,m}$ покривају I^2

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists m_n \in \{1, \dots, 4^n\}$ тд. $x_0 \in K_{n,m_n}$

можемо изабрати:

$$K_{n+1,m_{n+1}} \subset K_{n,m_n}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

„низ уметнутих квадрата"



Посматрамо сегменте: $\left[\frac{m_n - 1}{4^n}, \frac{m_n}{4^n}\right]$

$$m_{n+1} \in \{4m_n - 3, 4m_n - 2, 4m_n - 1, 4m_n\}$$

$$\frac{m_{n+1} - 1}{4^{n+1}} \geq \frac{4m_n - 3 - 1}{4^{n+1}} = \frac{m_n - 1}{4^n}$$

$$\frac{m_{n+1}}{4^{n+1}} \leq \frac{4m_n}{4^{n+1}} = \frac{m_n}{4^n}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{m_{n+1} - 1}{4^{n+1}}, \frac{m_{n+1}}{4^{n+1}}\right] \subset \left[\frac{m_n - 1}{4^n}, \frac{m_n}{4^n}\right]$$

$$\Rightarrow \Big\{ \underbrace{\left[\frac{m_n - 1}{4^n}, \frac{m_n}{4^n}\right]}_{\text{дужине } \frac{1}{4^n} \to 0,\ n \to \infty} \Big\}_{n \in \mathbb{N}}$$ низ уметнутих сегмената

$$\Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left[\frac{m_n - 1}{4^n}, \frac{m_n}{4^n}\right] = \{t_0\}$$

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left[\frac{m_n-1}{4^n}, \frac{m_n}{4^n}\right] = \{t_0\}$$

Аналогно, за квадрате $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{K_{n,m_n}}_{\operatorname{diam}\to 0} \ni x_0 \rightsquigarrow \bigcap_{n\to\infty} K_{n,m_n} = \{x_0\}$

фиксирамо $n\in\mathbb{N}$: $k\geq n$

$\varphi_k(t_0)\in K_{k,m_k}$ $\leftarrow$ $\varphi_k\left[\frac{m_k-1}{4^k},\frac{m_k}{4^k}\right]\subset K_{k,m_k}$

$\varphi_k(t_0)\in K_{k,m_k}\subset\cdots\subset K_{n,m_n}$

$\varphi(t_0)=\lim\limits_{k\to\infty}\underbrace{\varphi_k(t_0)}_{\in K_{n,m_n},\ k\geq n} \in K_{n,m_n}$ $\leftarrow$ K_{n,m_n} затворен скуп

$\varphi(t_0)\in K_{n,m_n}$

$\Rightarrow \varphi(t_0)\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_{n,m_n}=\{x_0\} \Rightarrow \boxed{\varphi(t_0)=x_0} \Rightarrow \varphi$ је НА ✓

Заључак: $\varphi: I\to I^2$ непр НА $\Rightarrow$ φ је Пеанова крива □

! Пеанова крива није проста, није 1-1

важи ✓

↪ ~~ако би била~~:

$\varphi : \underset{\text{комп}}{[0,1]} \to \underset{T_2}{[0,1]^2}$ непр. НА 1-1 $\Big\}$ $\approx$!

$[0,1] \approx [0,1]^2$

има разб. тачке — нема

Жорданова теорема

Теорема: γ – Жорданова крива у $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ има тачно 2 компоненте путне пов.

Једна од њих је ограничена,

друга је неограничена,

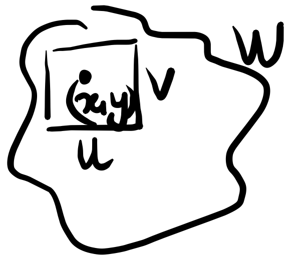
а граница сваке од њих је крива γ.

Тополошки производ

$(X,\tau_X),\ (Y,\tau_Y) \rightsquigarrow X\times Y,\ \tau_{X\times Y}$

$\tau_{X\times Y}$? $\quad \{U\times V \mid U\in\tau_X,\ V\in\tau_Y\}$ – није топологија!

$$\tau_{X\times Y} = \{W\subset X\times Y \mid (\forall (x,y)\in W)(\exists U\in\tau_X)(\exists V\in\tau_Y)\ (x,y)\in U\times V\subset W\}$$

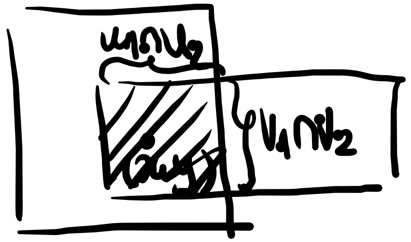


Став $\tau_{X\times Y}$ је топологија на $X\times Y$.

доказ: (1) $\emptyset\in\tau_{X\times Y}$

$X\times Y \quad (x,y)\in \underbrace{X}_{\in\tau_X}\times \underbrace{Y}_{\in\tau_Y}$

(2) $W_1, W_2\in\tau_{X\times Y} \rightsquigarrow\ ?\ W_1\cap W_2\in\tau_{X\times Y}$



$(x,y)\in W_1\cap W_2$

$i=1,2$: $\quad (x,y)\in W_i\in\tau_{X\times Y} \to (\exists U_i\in\tau_X)(\exists V_i\in\tau_Y)\ (x,y)\in U_i\times V_i\subset W_i$

$$\Rightarrow (x,y)\in (U_1\times V_1)\cap(U_2\times V_2) \overset{?}{=} \underbrace{(U_1\cap U_2)}_{\in\tau_X}\times\underbrace{(V_1\cap V_2)}_{\in\tau_Y}\subset W_1\cap W_2 .$$

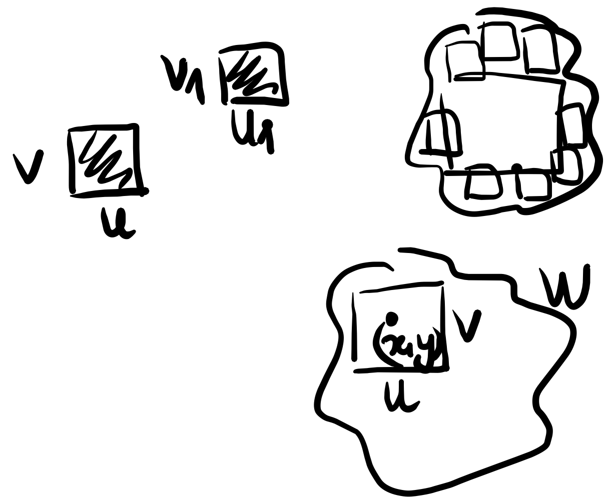
✓

Тополошки производ

$(X,\mathcal{T}_X),\ (Y,\mathcal{T}_Y) \rightsquigarrow X\times Y,\ \mathcal{T}_{X\times Y}$

$\mathcal{T}_{X\times Y}$? $\{U\times V \mid U\in\mathcal{T}_X,\ V\in\mathcal{T}_Y\}$ – није топологија!

$$\mathcal{T}_{X\times Y} = \{W\subset X\times Y \mid (\forall (x,y)\in W)(\exists U\in\mathcal{T}_X)(\exists V\in\mathcal{T}_Y)\ (x,y)\in U\times V\subset W\}$$



Став $\mathcal{T}_{X\times Y}$ је топологија на $X\times Y$.

Доказ: (3) фамилија W_λ, $\lambda\in\Lambda$ $\quad W_\lambda\in\mathcal{T}_{X\times Y}$

? $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} W_\lambda \in \mathcal{T}_{X\times Y}$

$(x,y)\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda} W_\lambda \Rightarrow \exists\lambda_0\in\Lambda\ \ (x,y)\in W_{\lambda_0}$

$\Rightarrow \exists U\in\mathcal{T}_X,\ \exists V\in\mathcal{T}_Y\ \ (x,y)\in U\times V\subset W_{\lambda_0}\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda} W_\lambda$ ✓

$\Rightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} W_\lambda\in\mathcal{T}_{X\times Y}$ $\square$

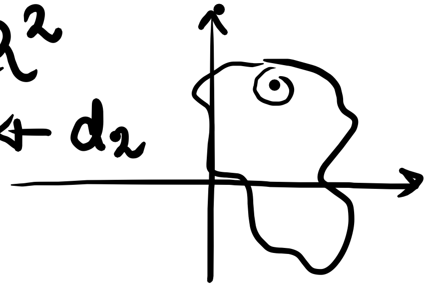
$(X\times Y, \mathcal{T}_{X\times Y})$ – тополошки производ простора X и Y.

!! уопштење за $\forall$ коначни производ

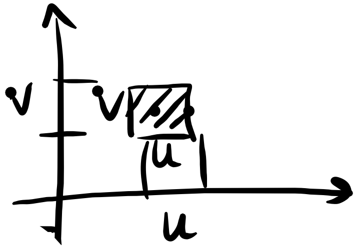
$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \approx (\cdots((X_1 \times X_2) \times X_3) \cdots \times X_n$$

$n \in \mathbb{N}$

Пример: $\mathbb{R}^2$, $\tau \leftarrow d_2$



$\approx$ $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\tau_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$



Неке особине:

Пројекције: $X \times Y \xrightarrow{p_X} X$ $\quad p_X(x,y) = x$

$X \times Y \xrightarrow{p_Y} Y$ $\quad p_Y(x,y) = y$

* за домаћи: пројекције су отворене пресл.

p_X - да ли је непрекидна?

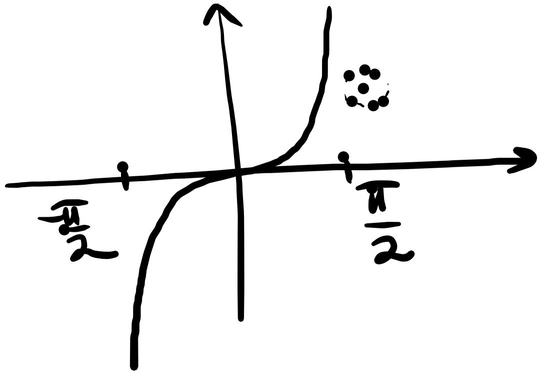
$U \in \tau_X \quad p_X^{-1}(U) = U \times Y \in \tau_{X \times Y}$ ✓

Став. Пројекције су непрекидна пресликавања.

* Пројекције не морају бити затворена пресликавања

$p_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}),\ y = \operatorname{tg} x\}$



$A \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}$ јер $\mathbb{R}^2 \setminus A$ - отворен

$p_1(A) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ - није затворен у $\mathbb{R}$

„НЕПРЕКИДНОСТ ПО КООРДИНАТАМА"

Став $f : A \to X \times Y$

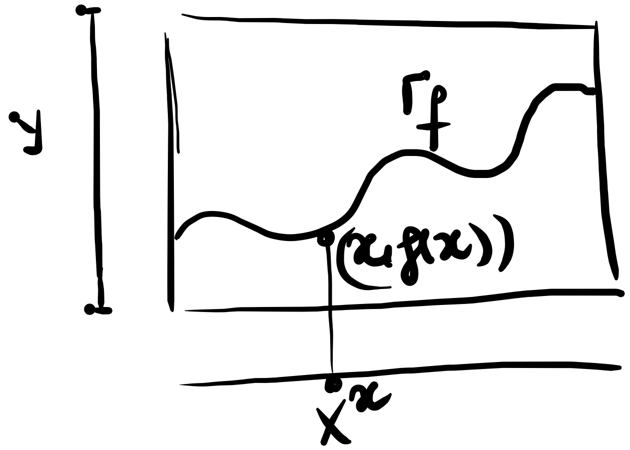
f је непрекидно $\iff$ $\left.\begin{array}{l} p_X \circ f : A \to X \\ p_Y \circ f : A \to Y \end{array}\right\}$ непрекидне пресл.

Став. $f: X \to Y$ непрекидно

$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$

Тада $\Gamma_f \approx X$.

Доказ:



$h: X \to \Gamma_f$

$h(x) := (x, f(x))$

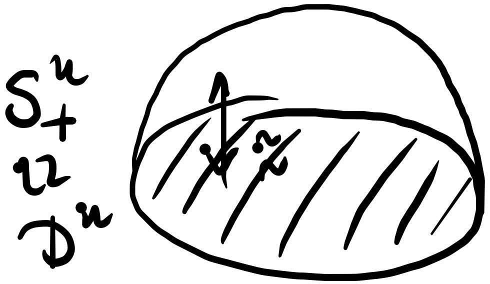
* бијекција ✓
* непрекидно – јер непр. по координатама
* инверз: $h^{-1}: \Gamma_f \to X$

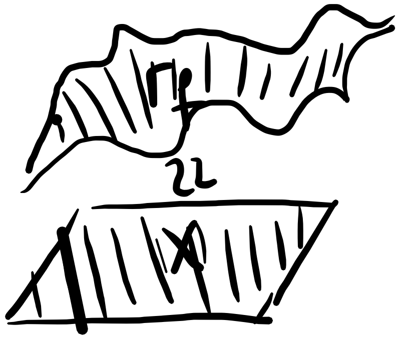
$(x, f(x)) \to x$

рестрикција прве пројекције $p_1: X \times Y \to X$

$\Rightarrow h^{-1}$ непрекидно ✓

$\Rightarrow \boxed{X \approx \Gamma_f}$ □





Продуктивност топ. својства

P - продуктивно

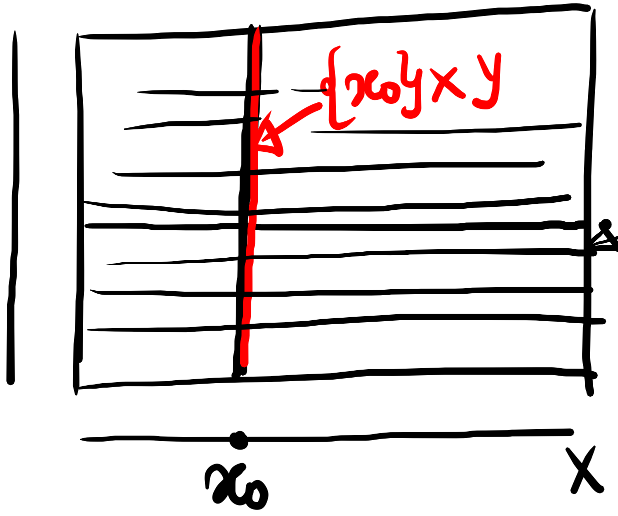
$\forall X, Y$: X и Y имају P $\Rightarrow$ $X \times Y$ има P

Продуктивна топ. својства:

* компактност
* T_2
* повезаност
* путна повезаност

Теорема X, Y - повезани простори $\Rightarrow$ $X \times Y$ повезан простор.

Доказ:



$\{x_0\} \times Y \approx Y \Rightarrow \{x_0\} \times Y$ повезан

$X \times \{y\} \approx X \Rightarrow X \times \{y\}$ повезан

$(X \times \{y\}) \cap (\{x_0\} \times Y) = \{(x_0, y)\} \neq \emptyset$

$X \times Y = (\{x_0\} \times Y) \cup \left(\bigcup_{y \in Y} X \times \{y\}\right) \Leftarrow$ т. повезан ✓/∎