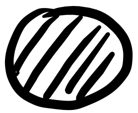
Пр. $[0,1) \not\cong S^1$

$[0,1)$ — није компактан; S^1 — компактан

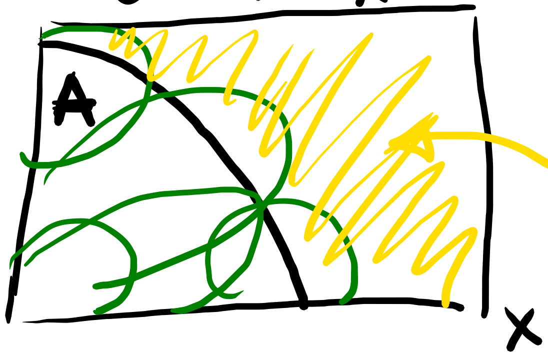

$\mathbb{R}^2_+ \not\cong D^2$


* НАСЛЕДНОСТ: $\overset{\text{комп.}}{[a,b]} \supset \overset{\text{није комп.}}{(a,b)}$

<u>**Став**</u> X-компактан, $A \in \mathcal{F}_X \Rightarrow A \in \mathcal{K}_X$

$(\mathcal{F}_X \subset \mathcal{K}_X)$

Доказ: $A \in \mathcal{F}_X$



$A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$, $U_\lambda \in \mathcal{T}_X, \forall \lambda$? $\rightsquigarrow$ коначни потпок.

$A^c \in \mathcal{T}_X$ јер $A \in \mathcal{F}_X$

$X = \underbrace{\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \cup A^c}_{\text{отв. пок. } X} \xrightarrow{X \text{ комп.}}$ коначни $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{\lambda_i} \cup A^c \xrightarrow{\text{па}} A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{\lambda_i}$

$\Rightarrow A \in \mathcal{K}_X$ $\square$

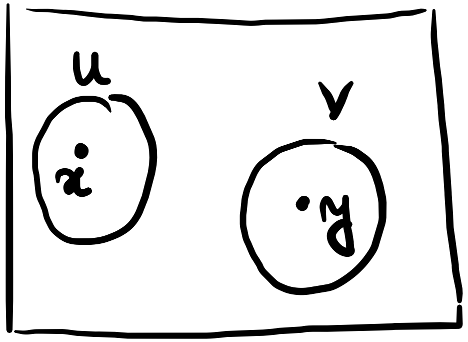
(!) у метричком простору: компактан $\Leftrightarrow$ затв. и ограничен

компактан $\Rightarrow$ затворен

у топ. пр. $\not\Rightarrow$

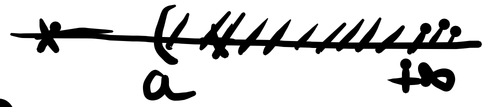
у Хаусдорфовом топ. пр. $\Rightarrow$

Деф. X - т.п. је Хаусдорфов (T_2) ако $(\forall x,y \in X)\ x \neq y \Rightarrow \left((\exists U,V \in \tau_X) \ x\in U,\ y \in V,\ U \cap V = \emptyset \right)$



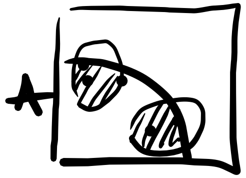
* X је метрички $\Rightarrow T_2$

* $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$ није T_2



Став: T_2 је тополошко својство.

Став:

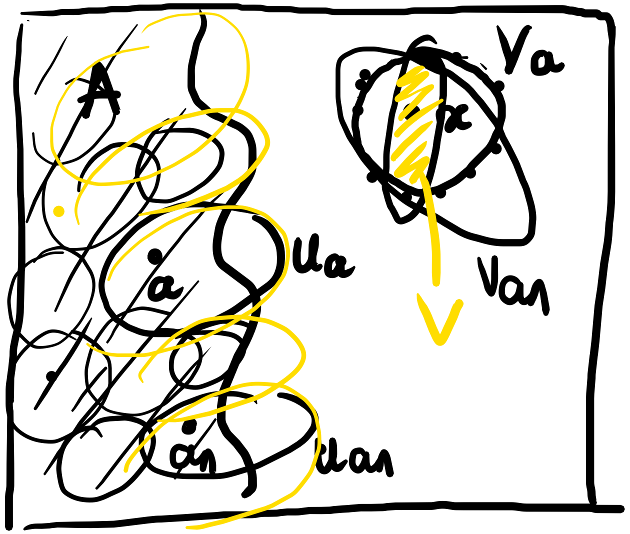


$X - T_2$, $A \subset X$

$\Rightarrow A$ је T_2

Теорема: X је T_2-простор $A \in \mathcal{K}_X \Rightarrow A \in \mathcal{F}_X$ $(\mathcal{K}_X \subset \mathcal{F}_X)$

доказ: X T_2
$A \in \mathcal{K}_X$



Доказујемо A^c-отворен

$\boxed{x \in A^c}$

$a \in A \to a \neq x \overset{X\, T_2}{\Rightarrow} (\exists U_a, V_a \in \mathcal{T}_X)\ a \in U_a, x \in V_a, U_a \cap V_a = \emptyset$

$A \subset \bigcup_{a \in A} U_a \overset{A \in \mathcal{K}_X}{\rightsquigarrow} A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{a_i}$

Изаберимо: $\boxed{V} := \bigcap_{i=1}^{n} V_{a_i}$

- $x \in V$ ✓
- $V \in \mathcal{T}_X$ ✓
- $V \overset{?}{\subset} A^c$

ппс. $\exists y \in V \cap A$

$\exists j \in \{1, \dots, n\}\ y \in U_{a_j}$, $y \in V_{a_j}$ $\Big\}$ $y \in U_{a_j} \cap V_{a_j}$ ↯

$\Rightarrow \boxed{V \subset A^c}$ $\Rightarrow A^c \in \mathcal{T}_X \Rightarrow A \in \mathcal{F}_X$ □

Последица: X T_2 и компактан $\Rightarrow$ $\mathcal{K}_X = \mathcal{F}_X$.

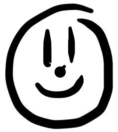
Став: $\underset{\text{непр.}}{f} : \underset{\text{компактан}}{X} \to \underset{T_2}{Y}$ $\Rightarrow$ f је затворено.

доказ: $\underbrace{A \in \mathcal{F}_X}$ $\xrightarrow{X \text{ комп.}}$ $A \in \mathcal{K}_X$ $\xrightarrow{f \text{ непр.}}$ $f(A) \in \mathcal{K}_Y$ $\xrightarrow{Y\ T_2}$ $\underbrace{f(A) \in \mathcal{F}_Y}$ ✓

$\Rightarrow$ f затворено пресл. $\square$

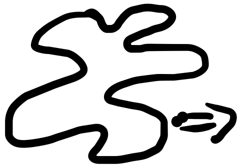
Став: $\underset{\text{непр. бијекција}}{f} : \underset{\text{комп.}}{X} \to \underset{T_2}{Y}$ $\Rightarrow$ f је хомеоморфизам

доказ: претх. $\Rightarrow$ f затворено, f непр., бij. $\Big\}$ f је хомеоморфизам $\square$



$\underset{\text{непр. бијекција}}{f : S^2 \to S^2}$ $\Rightarrow$ f је хомеоморфизам

Став: $\underset{\text{непр. 1-1}}{f} : \underset{\text{комп.}}{X} \to \underset{T_2}{Y}$ $\Rightarrow$ f је утапање.

$\underset{\text{непр.} + 1\text{-}1}{f : S^1 \to \mathbb{R}^2}$  $\Rightarrow$ f утапање

– Повезаност –

Деф. $(X,\mathcal{T})$ је <u>повезан</u> ако не постоје $U,V\in\mathcal{T}\setminus\{\emptyset\}$ тд. $U\cup V=X$, $U\cap V=\emptyset$

ако U,V постоје X није повезан

$\{U,V\}$ – дисконексија простора X.

Став. Еквивалентна су тврђења

(1) X је повезан

(2) $\mathcal{F}_X\cap\mathcal{T}_X=\{\emptyset,X\}$

(3) Не постоји непрекидно и НА пресликавање $f:X\to\underset{\mathcal{T}_d}{\{0,1\}}$

Доказ: (1)$\Rightarrow$(2) ппс. $\exists U\in\mathcal{F}_X\cap\mathcal{T}_X$ $U\neq\emptyset$, $U\neq X$

$X=\underset{\mathcal{T},\,\mathcal{F}}{U}\sqcup\underset{\mathcal{F},\,\mathcal{T}}{U^c}$ дисконексија X ↯

(2)$\Rightarrow$(1) (лако)

(1)$\Rightarrow$(3) X повезан

ппс. $f:X\to\{0,1\}$ непр + НА

$\overset{\circ}{0}$ $\overset{\circ}{1}$ $U=f^{-1}\{0\}\in\mathcal{T}_X$

$V=f^{-1}\{1\}\in\mathcal{T}_X$

$U,V\neq\emptyset$ јер f НА

$X=U\cup V$

дисконексија

↯

– Повезаност –

Деф. (X,T) је <u>повезан</u> ако не постоје $U,V \in T\setminus\{\emptyset\}$ т.д. $U\cup V = X$, $U \cap V = \emptyset$

ако U,V постоје X није повезан

$\{U,V\}$ – дисконексија простора X.

Став. Еквивалентна су тврђења

(1) X је повезан

(2) $\mathcal{F}_X \cap T_X = \{\emptyset, X\}$

(3) Не постоји непрекидно и НА пресликавање $f: X \to \underset{T_d}{\{0,1\}}$

Доказ: (3) $\Rightarrow$ (1) ппс. X није повезан

дисконексија $X = U \cup V$ $\quad U,V \in T\setminus\{\emptyset\}$, $U\cap V=\emptyset$

Дефинишемо $f: X \to \{0,1\}$ $\quad f(x) := \begin{cases} 0, & x\in U \\ 1, & x \in V\end{cases}$

НА јер $U,V \neq \emptyset$

непрекидно: $f^{-1}\{0\} = U$ — отв. ✓

$f^{-1}\{1\} = V$

$f^{-1}\{0,1\} = X$, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$

↯ $\square$

Став: $f: X \to Y$ непрекидно, НА, X повезан $\Rightarrow$ Y повезан

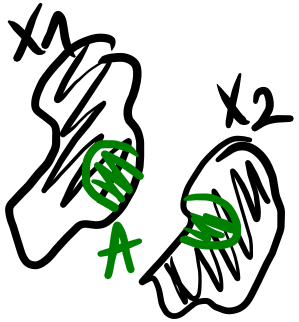
Доказ: ппс Y није повезан $\Rightarrow \exists$ непр. НА $g: Y \to \{0,1\}$

$$X \xrightarrow[\text{НА}]{f} Y \xrightarrow[\text{НА}]{g} \{0,1\}$$

$g \circ f: X \to \{0,1\}$ непр. и $g \circ f$ НА $\Rightarrow$ X није повезан $\lightning$ $\square$

Последица: Повезаност је тополошко својство.

Лема: $X = X_1 \cup X_2$ дисконексија X, $A \subset X$, A повезан $\Rightarrow A \subset X_1 \vee A \subset X_2$.



Доказ: $X_1, X_2 \in \mathcal{T}_X \setminus \{\emptyset\}$, $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, $X = X_1 \cup X_2$

ппс: $A \cap X_1 \neq \emptyset \neq A \cap X_2$

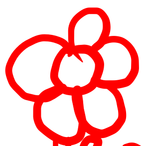
$A = \underbrace{(A \cap X_1)}_{\in \mathcal{T}_A \setminus \{\emptyset\}} \cup \underbrace{(A \cap X_2)}_{\in \mathcal{T}_A \setminus \{\emptyset\}}$ дисјунктни $\Leftarrow$ дисконексија A $\lightning$ $\square$

Теорема $(X,\mathcal{T})$ – т.п.

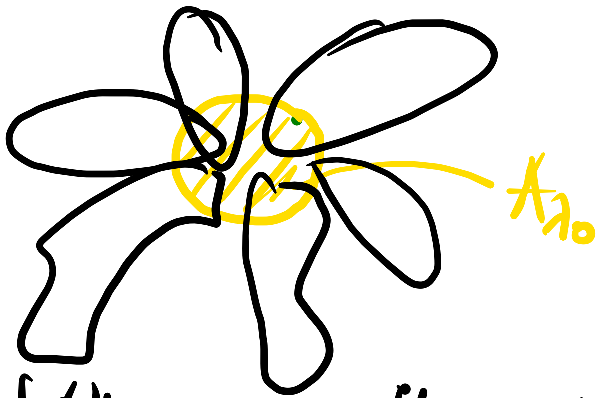
$\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ – фамилија повезаних подскупова X

$\exists \lambda_0\in\Lambda \quad \forall\lambda\in\Lambda \quad A_\lambda\cap A_{\lambda_0}\neq\emptyset$

Тада: $A=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ повезан скуп.



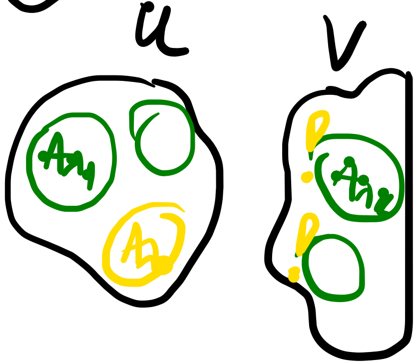
„цвет теорема"



Доказ: ППС. дисконексија $A=U\cup V$ $U\cap V=\emptyset$, $U,V\in\mathcal{T}_A\setminus\{\emptyset\}$

све радимо у A:

A_{λ_0} – повезан $\overset{\text{лема}}{\Longrightarrow}$ $A_{\lambda_0}\subset U \vee A_{\lambda_0}\subset V$



Нпр. $A_{\lambda_0}\subset U$ $(\rightarrow A_{\lambda_0}\cap V=\emptyset)$

$\lambda\in\Lambda$ A_λ повезан $\overset{\text{лема}}{\Longrightarrow}$ $A_\lambda\subset U \vee A_\lambda\subset V$

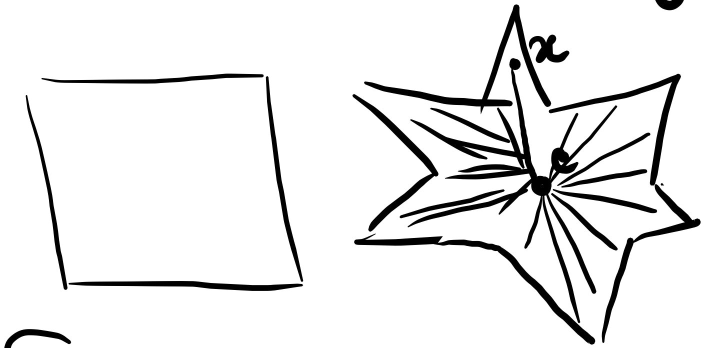
знамо $A_\lambda\cap A_{\lambda_0}\neq\emptyset$ $\rightarrow$ $A_\lambda\subset U$

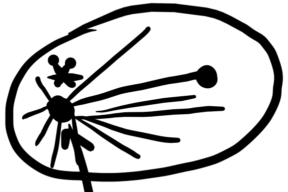
$\Rightarrow (\forall\lambda\in\Lambda)\ A_\lambda\subset U$

$\Rightarrow V=\emptyset$ ↯ $\Rightarrow$ A је повезан. □

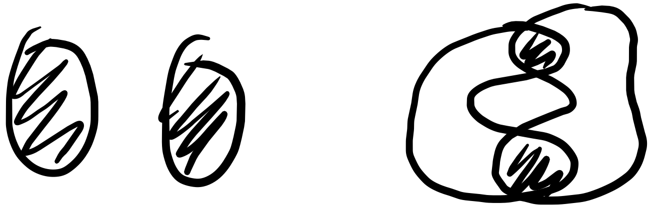
Пример: K-конвексан у $\mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$ повезан

K-звездаст у $\mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$ повезан



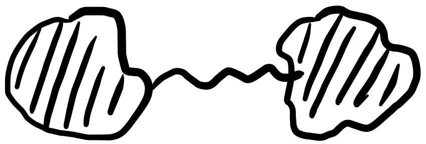


$A_{\lambda_0} = \{*\}$



? Повезаност & int, cl, ∂ ?

A повезан $\not\Rightarrow$ int A повезан



A повезан $\not\Rightarrow$ ∂A повезан

$A = [0,1]$ $\qquad$ $\partial A = \{0,1\}$

Став A повезан $\Rightarrow$ $\bar{A}$ повезан скуп.

Пр. Тополошка синусоида:

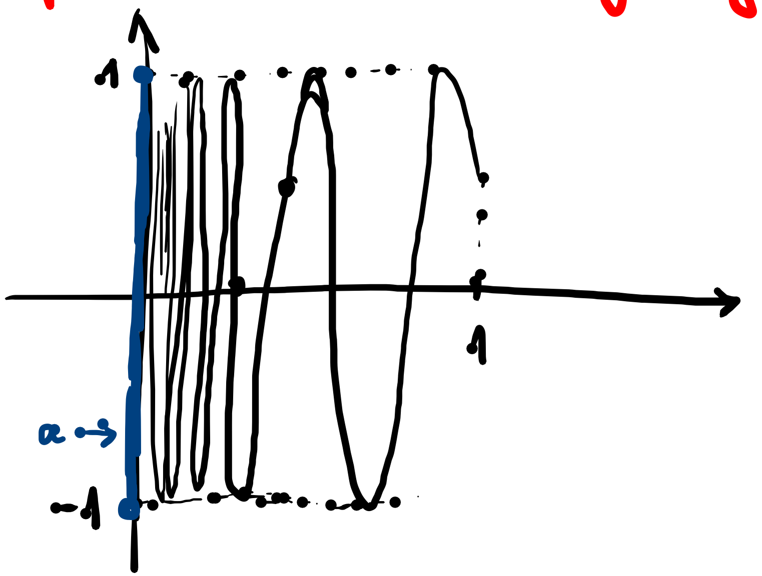


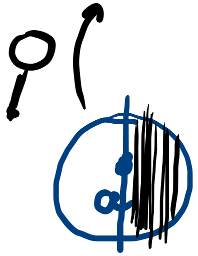
график $\sin\frac{1}{x}$ на $(0,1]$

$$A = \{(x, \sin\tfrac{1}{x}) \mid x \in (0,1]\} \approx (0,1]$$

тополошка синусоида $S := \bar{A} = A \cup \{0\} \times [-1,1]$

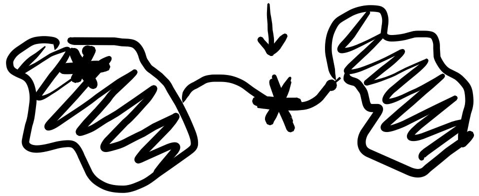
претх. став

A повезан $\Rightarrow$ $S = \bar{A}$ повезан



$\Rightarrow a \in \bar{A}$

„Тачке које прекидају скуп"



Деф: (X, τ_X) - повезан т.п.
$x_0 \in X$ је тачка дисконексије (раздвојна тачка) простора X ако $X \setminus \{x_0\}$ није повезан.

$\boxed{h}: X \to Y$

X повезан

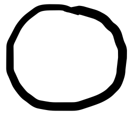
x_0 - раздвојна тачка X

$$\underbrace{X \setminus \{x_0\}}_{\text{неповезан}} \overset{\text{рестр. } h}{\approx} h(X \setminus \{x_0\}) = \underbrace{Y \setminus \{h(x_0)\}}_{\text{неповезан}}$$

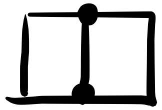
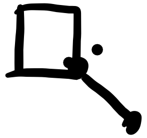
неповезан $\longrightarrow$ неповезан

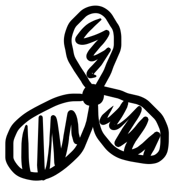
$h(x_0)$ - тачка дисконексије Y

Теорема Број тачака дисконексије је тополошка инваријанта.
Број тачака које нису тачке дисконексије је топ. инв.

Пр.:  $\not\approx$ 

нема т.д.

 $\not\approx$ 

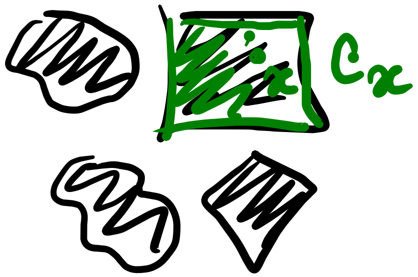
 $\not\approx$ 

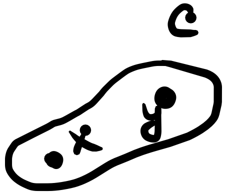
1 т.д. $\qquad$ ∞ т.д.

$\mathbb{R}^n \not\approx \mathbb{R}$

$n \geq 2$

Компоненте повезаности





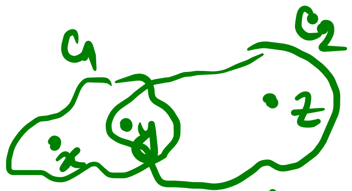
$(X, \mathcal{T})$ – т.п.

$x, y \in X \qquad x \sim y \overset{\text{деф.}}{\iff} (\exists C \subset X)$ C повезан, $x, y \in C$

„x и y повезани у X"

$\sim$ – релација еквив. у X

(Пр.

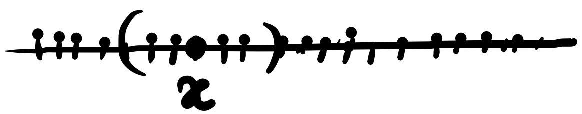


$C_1 \cup C_2$ повезан)

$x \mapsto [x] = C_x$ класа елемента

компонента повезаности

Пр. $(\mathbb{Q}, \mathcal{U}_{\mathbb{Q}})$



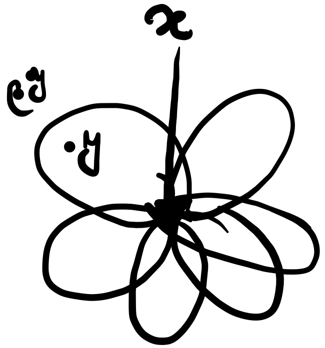
комп. пов. $\{x\}$

Став C_x је повезан скуп.

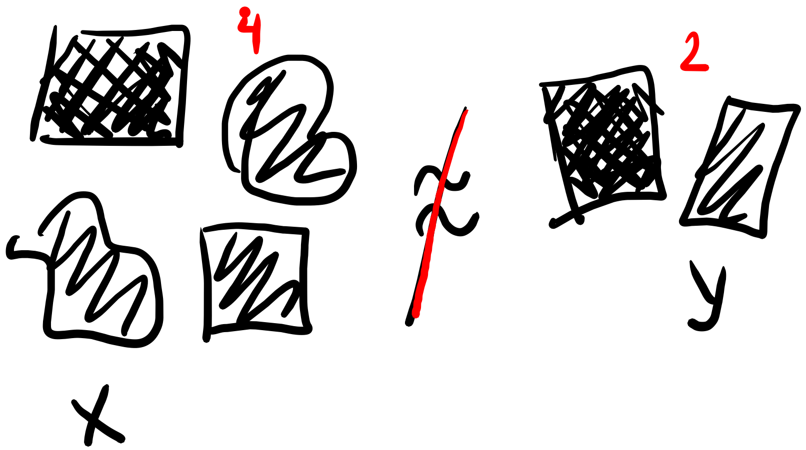
$$C_x = \{y \in X \mid x \sim y\} = \{y \in X \mid (\exists C^y \subset X)\ C^y \text{ повезан}, x, y \in C^y\} \underset{\text{Тв.}}{\Longrightarrow} C_x = \bigcup_{y \sim x} C^y$$

$C^y \subset C_x$

$\Rightarrow C_x$ повезан



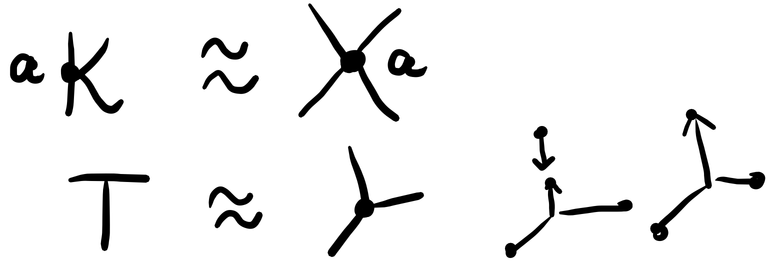
* C_x је највећи повезан скуп који садржи x



Теорема

Број компоненти повезаности је тополошко својство.

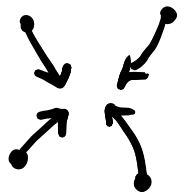
Пр. Да ли су T и K хомеоморфни?



Рј. $h: K \to T$ хомеоморфизам

$\Rightarrow$ h' : $\underbrace{K\setminus\{a\}}_{\text{4 комп. пов.}} \to \underbrace{T\setminus\{h(a)\}}_{\text{1/2 } \vee \text{ 3 комп. пов.}}$ хомеоморфизам

рестр.



4 комп. пов.

1/2 $\vee$ 3 комп. пов.
Не може 4

↯ $\Rightarrow$ $K \not\approx T$ $\square$