

~ Хооморфизми ~

Def X, Y т.т. $f: X \rightarrow Y$ је хооморфизам ако је f биекција, f непереривна и f^{-1} непереривна апликација.

Ако $\exists$ хооме $f: X \rightarrow Y$: $X \approx Y$ X и Y су хооморфни (топ. екви.)

* $\approx$ је релација еквиваленције:

Ⓐ $X \approx X$ $1_X: X \rightarrow X$

Ⓑ $f: X \xrightarrow{\approx} Y$ $f^{-1}: Y \rightarrow X$ $(f^{-1})^{-1} = f$
 $X \approx Y$ $Y \approx X$

Ⓒ $X \approx Y, Y \approx Z \Rightarrow X \approx Z$

$h: X \xrightarrow{\approx} Y, f: Y \xrightarrow{\approx} Z$ композиција
 $f \circ h: X \rightarrow Z$ ✓ $X \approx Z$
 $(f \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ f^{-1}$ непр.

Def: $f: X \rightarrow Y$
 $\tau_X \quad \tau_Y$

(1) f је отворено ако $(\forall u \in \tau_X) f(u) \in \tau_Y$

(2) f је затворено ако $(\forall F \in \mathcal{F}_X) f(F) \in \mathcal{F}_Y$

Теорема: $f: X \rightarrow Y$ след. имп. су еквивалентн. ^{затв. $Y \times X$}

(1) f је хомеоморфизам

(2) f је бијекција, непрекидно и отворено

(3) f је инјекција, непрекидно и затворено

(4) f је бијекција и $(\forall A \subset X) f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$

Доказ: (1) $\Rightarrow$ (2) f је хомеоморфизам

дј. $\checkmark$ $\checkmark$ $\checkmark$ $\checkmark$

отв.?: $u \in \tau_X$

$$f(u) = (f^{-1})^{-1}(u)$$

$\in \tau_Y$

јер је f^{-1} непр. $\checkmark$

$\Rightarrow f$ је отворено



(2) $\Rightarrow$ (3): затворено?

$F \in \mathcal{F}_X$

$$f(F) = (f(F^c))^c$$

$\in \mathcal{F}_Y$

$\checkmark$

$\Rightarrow f$ је затворено

f је инјекција

отв. јер f отворено

Def: $f: X \rightarrow Y$
 $\tau_x \quad \tau_y$

(1) f је отворено ако $(\forall u \in \tau_x) f(u) \in \tau_y$

(2) f је затворено ако $(\forall F \in \mathcal{F}_x) f(F) \in \mathcal{F}_y$

Теорема: $f: X \rightarrow Y$ след. претп. су еквивалентни: ^{затв. $y \in X$}

(1) f је хомеоморфизам

(2) f је бијекција, неиремно и отворено

(3) f је бијекција, неиремно и затворено

(4) f је бијекција и $(\forall A \subset X) f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$

Доказ: (3) $\Rightarrow$ (4): f неиремно $\Rightarrow (\forall A \subset X) f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$

$\stackrel{?}{\sim} f(\overline{A})$
 $\underbrace{\text{затворен скуп}}_{\text{затворен јер } f \text{ затв. пр.}} \quad f(\overline{A})$

$f(A) \subset \underbrace{f(\overline{A})}_{\text{затворен}} \subset \overline{f(A)}$

$\downarrow$
 $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ ✓
^{Најмање затв. скуп који садржи $f(A)$}

Def: $f: X \rightarrow Y$
 $\tau_x \tau_y$

(1) f је отворено ако $(\forall u \in \tau_x) f(u) \in \tau_y$

(2) f је затворено ако $(\forall F \in \mathcal{F}_x) f(F) \in \mathcal{F}_y$

Теорема: $f: X \rightarrow Y$ след. претп. су еквивалентни: ^{затв. $y \in X$}

(1) f је хомеоморфизам

(2) f је бијекција, нејективна и отворена

(3) f је бијекција, нејективна и затворена

(4) f је бијекција и $(\forall A \subset X) f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$

Доказ: (4) $\Rightarrow$ (1) • f је бијекција

• нејективна $f: \mathcal{U}(4) \mathcal{U} \subset \Rightarrow f$ нејективна ✓

• нејективна f^{-1} :

$F \in \mathcal{F}_x$

$(f^{-1})^{-1}(F) = f(f^{-1}(F)) = f(\overline{f^{-1}(F)}) = \overline{f(f^{-1}(F))}$ ^{затв. $y \in X$}

$\Rightarrow f^{-1}$ нејективна ✓



Примери:

(1) $[a, b] \xrightarrow{\sim} [0, 1]$



$\Rightarrow$ така гра відображення у канонічна

$$x \in [a, b] \quad f(x) := \frac{x-a}{b-a}$$

$$f^{-1}: [0, 1] \rightarrow [a, b] \quad f^{-1}(t) := (1-t)a + t \cdot b$$

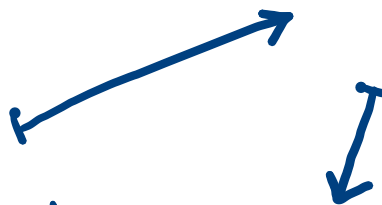
(2) $[a, b) \approx [0, 1)$

$$(a, b) \approx (0, 1)$$

$$a, b \in \mathbb{R}$$

$$[0, 1) \approx [0, 1]$$

$$t \longleftrightarrow 1-t$$



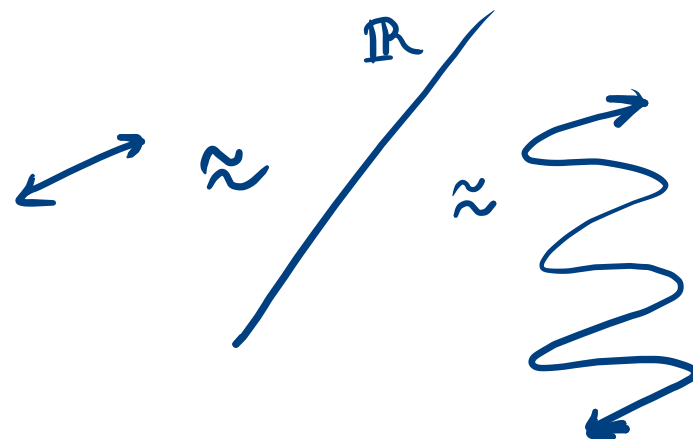
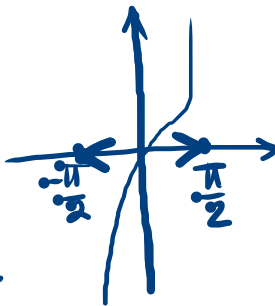
(3) $(a, b) \approx \mathbb{R}$

$$(a, b) \approx \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \approx \mathbb{R}$$

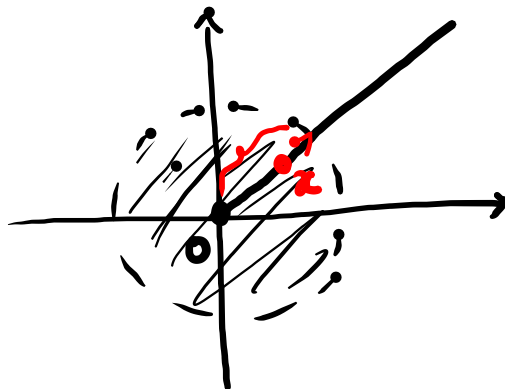
$$t \mapsto$$

$$f(t) := \tan t$$

$$f^{-1}(x) := \arctan x$$



(3)



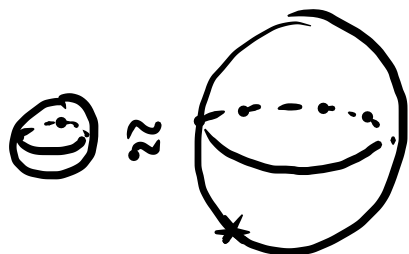
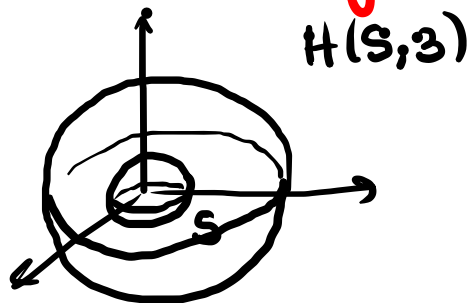
$$x \mapsto \frac{1}{1-\|x\|} \cdot x$$

$$\|x\| \rightarrow 1_- \quad \frac{1}{1-\|x\|} \rightarrow +\infty$$

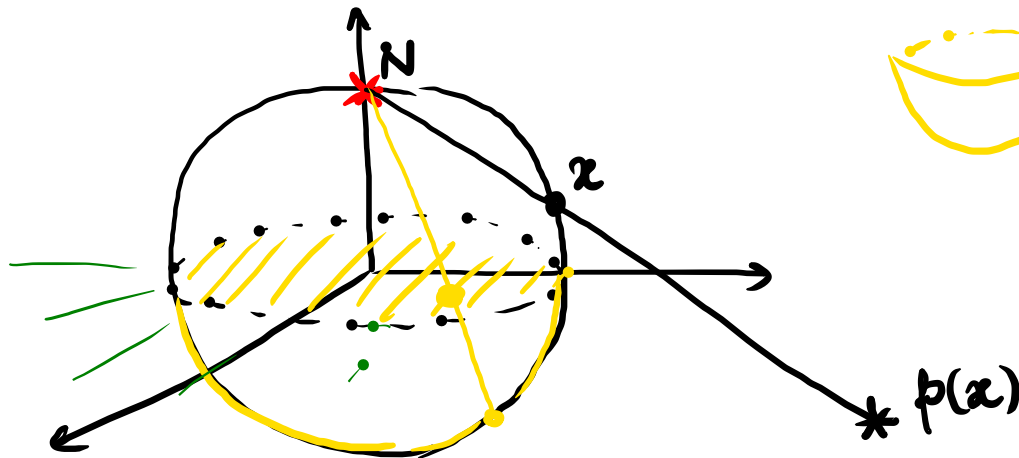
«неравномерно
мощность»

$$x \in \text{int} D^2 \quad h(x) := \frac{x}{1-\|x\|} \approx$$

(4) конформная (у $\mathbb{R}^n, h$)



(5) сферическая
проекция
 $S^n \setminus * \approx \mathbb{R}^n$



$$(6) D^n \approx S_+^n$$

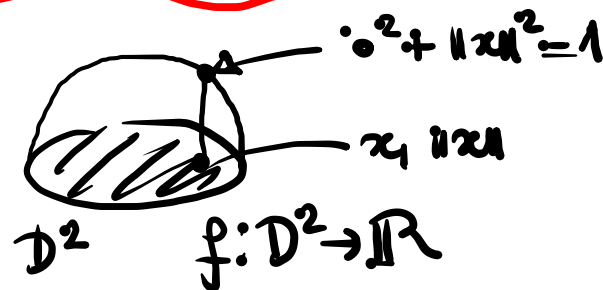
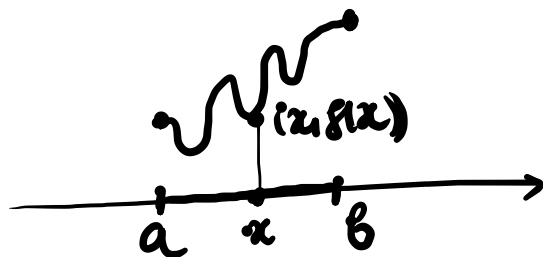
$$S_+^n = \{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} \geq 0 \}$$



(7) Свойство: $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна $X \subset \mathbb{R}^n$

$$\Gamma_f = \{ (x, f(x)) \mid x \in X \} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

$$\Rightarrow X \approx \Gamma_f$$

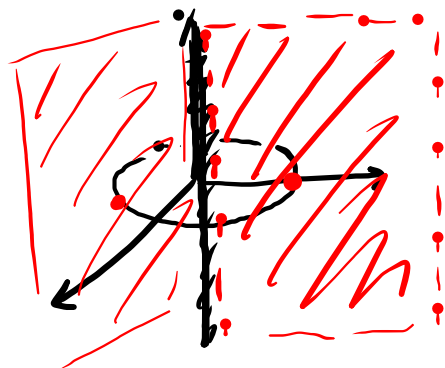


$$f(x) = \sqrt{1 - ||x||^2}$$

$$\Gamma_f = S_+^2$$

$$\Rightarrow D^2 \approx \Gamma_f \approx S_+^2$$

$$(8) \mathbb{R}^3 \setminus \{z=0\} \approx S^1 \times \mathbb{R}^2$$

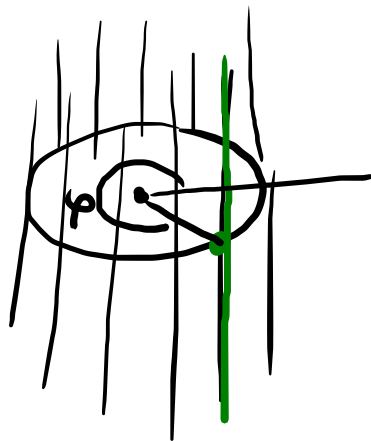
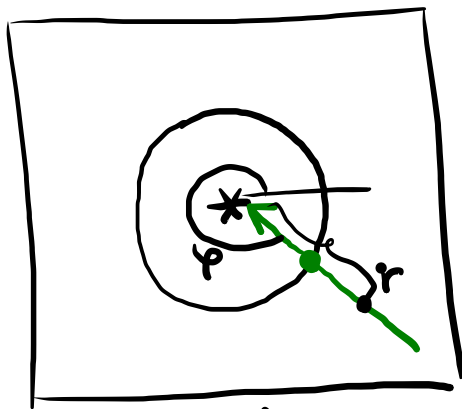


$$\mathbb{R}^3 \setminus \{z=0\} \approx (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \times \mathbb{R}$$

$$S^1 \times \mathbb{R}^2 \approx (S^1 \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$$

$$\text{Здесь же доказать: } (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \approx S^1 \times \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \stackrel{?}{\approx} S^1 \times \mathbb{R}$$



φ -глас

r -расстояние до $(0,0)$

(φ, r)

$S^1 \times \mathbb{R}$

$(\varphi, \ln r)$

Зед $\mathcal{P}$ -својство

$\mathcal{P}$ је тополошко својство (ИНВАРИЈАНТА ХОМЕОМОРФИЗМА)

ако за $(\forall) u \in \cdot$ X, Y важи:

$$X \approx Y \text{ и важи } \mathcal{P}(X) \Rightarrow \text{важи } \mathcal{P}(Y)$$

(X има својство $\mathcal{P}$)

Утапања

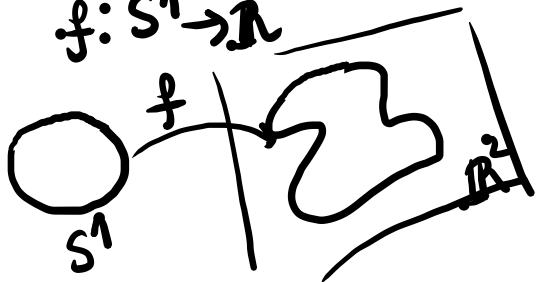
Зед: $f: X \rightarrow Y$ је УТАПАЊЕ ако је хомеоморфизам на слику

$$X \approx f(X)$$

$$h: X \rightarrow f(X)$$

$$h(x) := f(x)$$

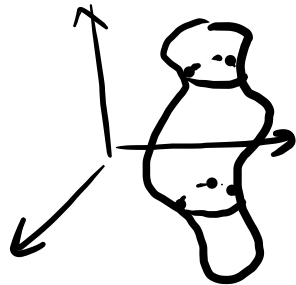
Пример: $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$



Пр.



$f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$
гипотеза



$f: X \rightarrow Y$

$f: X \xrightarrow{\cong} f(X)$
на ✓

+ f^{-1} не лп.

f 1-1 ✓
 f не лп. ✓

! не дока 1-1 и не лп. для гипотезы

$[0, 1) \xrightarrow{f} S^1$
...?

$f(t) := (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$

1-1 ✓
не лп. ✓

$S^1 = f([0, 1))$

не гипотеза!

$[0, 1) \not\subset S^1$

Указано:

$f: X \rightarrow Y$

не лп. + 1-1

X компактен

Y хаусдорфов

$\Rightarrow f$ гипотеза



важные проблемы

* гипотеза множественности

* теория узлов
(knot theory)

$S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$



Компактность

(X, τ) м.т. отворяет покрываю : $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ - отворяет покрытие $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$
 $\nwarrow U = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subset \tau$

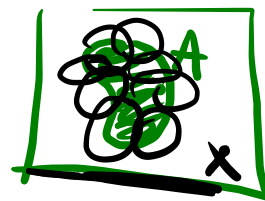
Def: (X, τ) је компактна ако свако отв. покриваје има кохерентно подпокриваје.
 $\forall X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \rightsquigarrow \exists n \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \quad X = \bigcup_{i=1}^n U_{\lambda_i}$

Пр 1: $(\mathbb{R}, \tau)$ није компактна $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n, n)$

Пр 2: (X, τ_{cf}) компактна
 $\uparrow$
 $\phi: X$
 $U, X \setminus U$ кохерент

$X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \rightsquigarrow X = U_1 \cup U_{\lambda_1} \cup \dots \cup U_{\lambda_k}$
 $\underline{U_1} : X \setminus U_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$
 $\uparrow \quad \quad \quad \uparrow$
 $\exists U_{\lambda_1} \quad \dots \quad \exists U_{\lambda_k}$
 кох. покрива x_1 покрива x_k

☺ компактност не зависи од амбијента



Def: (X, τ) -т.т. $A \subset X$

A је компактан у X ако $(\forall \mathcal{U} \subset \tau_X) (\bigcup \mathcal{U} \supset A \Rightarrow \exists \text{ коначно мноштво } U_1, \dots, U_k \in \mathcal{U} \text{ т.т. } A \subset \bigcup_{i=1}^k U_i)$

$\mathcal{K}_X := \{A \subset X \mid A \text{ компактан у } X\}$

Ситаб (X, τ_X) -т.т. $A \subset X$

$A \in \mathcal{K}_X \Leftrightarrow (A, \tau_A)$ је компактан.

Доказ:

$(\Rightarrow) A \in \mathcal{K}_X$ зашто (A, τ_A) компактан?

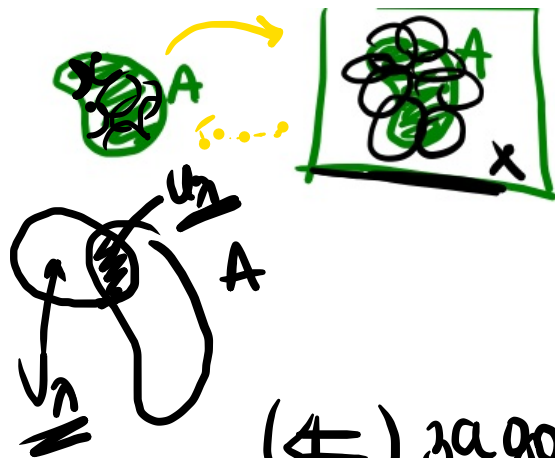
покривањ у τ_A : $A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ $U_\lambda \in \tau_A$

$U_\lambda \in \tau_A \rightarrow \exists V_\lambda \in \tau_X \quad U_\lambda = V_\lambda \cap A$

$\Rightarrow A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda \rightsquigarrow \exists \text{ коначно мноштво } V_1, \dots, V_k$
 $A \subset \bigcup_{i=1}^k V_i$

$\Rightarrow A = \left(\bigcup_{i=1}^k V_i \right) \cap A = \bigcup_{i=1}^k (V_i \cap A) = \bigcup_{i=1}^k U_i$

$\Rightarrow (A, \tau_A)$ компактан



$(\Leftarrow)$ за доказ



Теорема: (X, τ_X) компакт
 $f: (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ непрерывно + HA
 $\Rightarrow (Y, \tau_Y)$ компакт.

Доказ:

$$Y = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha \quad \forall \alpha \in A$$

$$f \text{ непрерывно} \Rightarrow f^{-1}(V_\alpha) \in \tau_X, \forall \alpha \in A$$

$$X = f^{-1}(Y) = f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in A} f^{-1}(V_\alpha)$$

X компакт

кон. подпокр. за X $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

$$X = \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(V_{\alpha_i})$$

$$Y \stackrel{f \text{ HA}}{=} f(X) = f\left(\bigcup_{i=1}^n f^{-1}(V_{\alpha_i})\right) = \bigcup_{i=1}^n \underbrace{f(f^{-1}(V_{\alpha_i}))}_{= V_{\alpha_i} \text{ јер } f \text{ HA}} = \bigcup_{i=1}^n V_{\alpha_i}$$

$\Rightarrow Y$ компактан ✓

Послемица 1: X - топ. + компакт
 $f: X \rightarrow Y$ непрерывно

$(f(X))$

$\Rightarrow f(X)$ компакт.

Послемица 2: Компактност је тополошко својство.

Пр. $[0,1)$ $\not\sim$ S^1
не
компактан

 $\not\sim$ D^2 
 $\mathbb{R}^2_+$