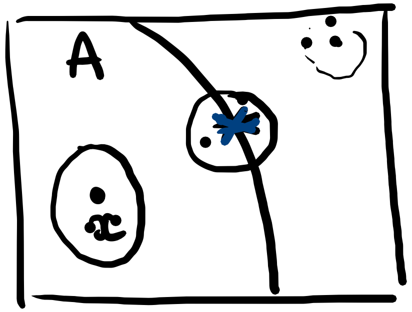
ЗАТВОРЕЊЕ

деф. $A \subset X$

$\forall G \in \mathcal{O}(x) \cap T$

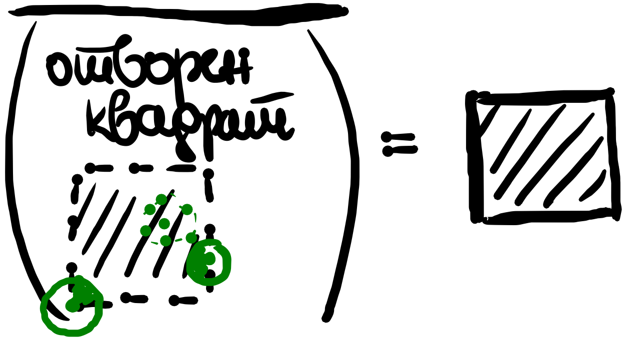
$$\overline{A} := \{x \in X \mid (\forall G \in \mathcal{O}(x))\ G \cap A \neq \emptyset\} \leftarrow \mathrm{cl}\,A$$

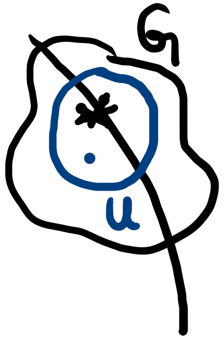


адхеренција скупа A
затворење скупа A

$a \in \overline{A} \leftarrow a$ је АДХЕРЕНТНА тачка скупа A.

пр. $\overline{(\text{отворен квадрат})}$ =





$\overline{A} = \{x \in X \mid$ ∀ отворену околину U од x сече скуп A $\}$

Став: $\overline{A} = \bigcap\limits_{\substack{F \in \mathcal{F} \\ A \subset F}} F$

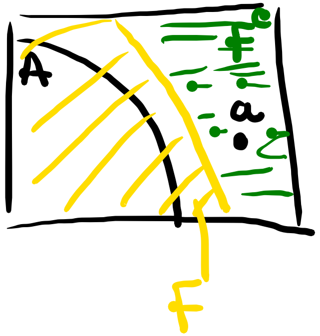
☺ $\overline{A}$ је најмањи затворен који садржи A

Д. $\boxed{\subset}$ $a \in \overline{A}$ ппс. $a \notin \bigcap\limits_{\substack{F \in \mathcal{F} \\ A \subset F}} F \to \exists F \in \mathcal{F}\ F \supset A \wedge a \notin F$

$F^c \in T$ $\quad F^c \cap A = \emptyset$ $\quad a \in F^c$

↯ са $a \in \overline{A}$ ↯

$\Rightarrow a \in$ десно ✓



$\boxed{\supset}$ $a \in \bigcap\limits_{\substack{F \in \mathcal{F} \\ A \subset F}} F$ ппс. $a \notin \overline{A}$

$(\exists U \in T)$

$a \in U \wedge U \cap A = \emptyset$

$a \notin U^c$ $\quad U^c \supset A$

$\to U^c \in \mathcal{F}$ ↯

$\Rightarrow a \in$ лево. □

Свойства:
- $\bar{A} \in \mathcal{F}$
- $A \subset \bar{A}$
- $A = \bar{A} \iff A \in \mathcal{F}$
- $A \subset F$, F затворен $\Rightarrow \bar{A} \subset F$

Деф. $(X, \mathcal{T})$ т.п. $A \subset X$

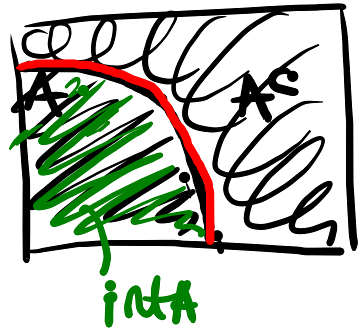
$$\partial A := \{x \in X \mid (\forall G \in \mathcal{O}(x))(G \cap A \neq \emptyset \wedge G \cap A^c \neq \emptyset)\}$$

граница (ръб) скупа

Из деф: $\partial A = \bar{A} \cap \overline{A^c}$

За вежбу:

$\bar{A} = \mathrm{int}A \sqcup \partial A$

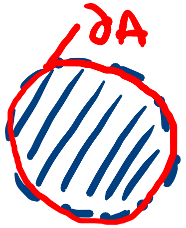


Пр. $A \subset \mathbb{R}^2$

$A =$ отворен диск $\mathring{D}^2$

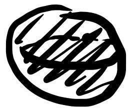
$\partial A = S^1$

$\bar{A} =$ затв. диск $= D^2$



$D^n \subset \mathbb{R}^n$

$\partial D^n = S^{n-1}$



Пр: $X=\mathbb{R}$, уобичајена топ.:

$A=\mathbb{Q}$

$\operatorname{int}\mathbb{Q}=?$

$\partial\mathbb{Q}=?$

$\overline{\mathbb{Q}}=?$

$x\in\operatorname{int}\mathbb{Q} \rightarrow \exists$ интервал (a,b)

$x\in(a,b)\subset\mathbb{Q}$ ↯

$\partial_{\mathcal{U}}(0,1)=\{0,1\}$

$= \mathcal{U}$

$\operatorname{int}\mathbb{Q}=\emptyset$

x $\quad \mathbb{Q} \quad \mathbb{Q}^c=\mathbb{I}$

$\boxed{\partial\mathbb{Q}=\mathbb{R}}$

$\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$

0 $\quad$ 1

Пр: $(\mathbb{R},\mathcal{T}_{cf})$

отворен:

$\mathcal{U}$: $\mathbb{R}\setminus\mathcal{U}$ коначан

$A=(0,1)$

$\partial(0,1)=?$

$\partial(0,1)=\mathbb{R}$

$\mathcal{T}_{cf}$

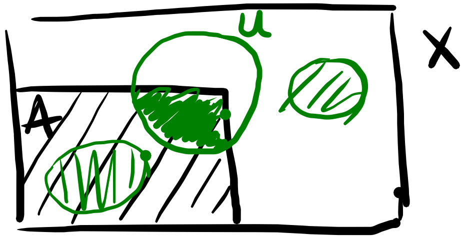
0 $\quad$ 1

Сваки отворен непразан сече $(0,1)$

$\boxed{\text{Потпростор}}$

(X, T_X) - топ. простор

$A \subset X$



$$T_A := \{U \cap A \mid U \in T_X\}$$

Став: T_A је топологија на скупу A.

Доказ: 1) $\underbrace{\emptyset}_{\in T_X} = \emptyset \cap A \in T_A$ $\qquad$ $A = \underbrace{X}_{\in T_X} \cap A \in T_A$

2) $U_1 \cap A$, $U_2 \cap A$ $\quad U_1, U_2 \in T_X \xrightarrow{?} (U_1 \cap A) \cap (U_2 \cap A) \in T_A$

$$\underbrace{(U_1 \cap A) \cap (U_2 \cap A)}_{=\ (U_1 \cap U_2) \cap A} \qquad \underbrace{(U_1 \cap U_2)}_{\in T_X} \cap A \in T_A \ ✓$$

деф T_X топ.

3) произвољно много $(U_i \cap A) \in T_A \quad i \in I$

$U_i \in T_X$

$$\xrightarrow{?} \underbrace{\bigcup_{i \in I} (U_i \cap A)}_{=\ \left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) \cap A} \overset{?}{\in} T_A$$

$$\underbrace{\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right)}_{\in T_X} \cap A \in T_A \ ✓ \quad \square$$

деф (A, T_A) је потпростор простора (X, T_X)

T_A - релативна топ., топологија наслеђена са простора X.

Шта су затворени скупови?

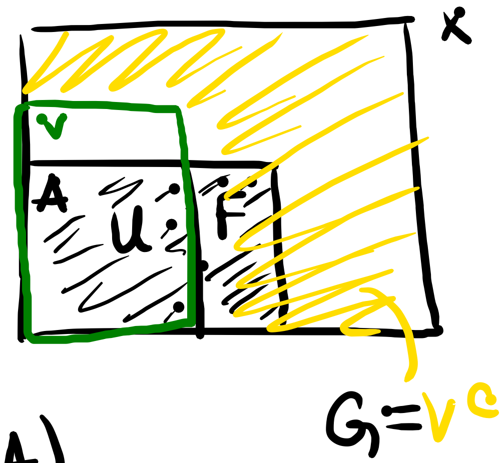
$F \subset A$ F затворен у A $\iff (\exists U \in \mathcal{T}_A)\ F = A \setminus U$

$\iff (\exists V \in \mathcal{T}_X)\ U = V \cap A$ и $F = A \setminus U$

$\iff (\exists V \in \mathcal{T}_X)\ F = \underbrace{A \setminus (V \cap A)}_{A \cap V^c}$

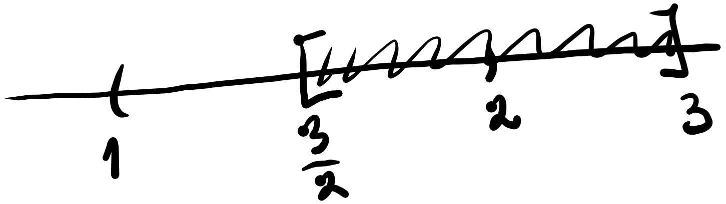
$\iff (\exists V \in \mathcal{T}_X)\ F = A \cap V^c \iff (\exists G \in \mathcal{F}_X)\ F = A \cap G$

G затв. у X

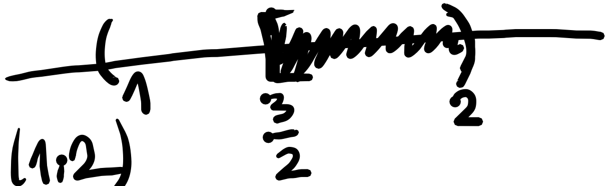


Дакле: $\boxed{\mathcal{F}_A} = \{ H \cap A \mid H \in \mathcal{F}_X \}$

Пр. $A = (1,2) \subset \mathbb{R}$ $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ $[\frac{3}{2}, 3]$ - затв. у $\mathbb{R}$



$\Rightarrow \underbrace{(1,2) \cap [\frac{3}{2}, 3]}_{[\frac{3}{2}, 2)}$ затв. у $(1,2)$

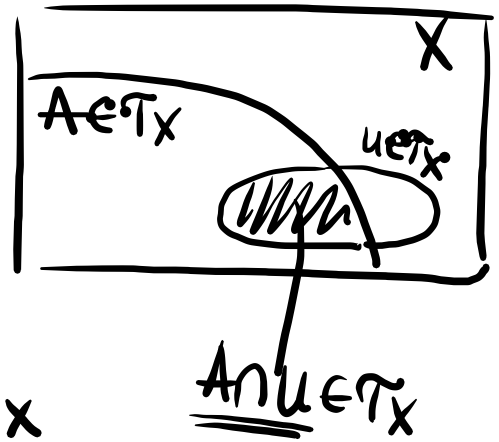


Став: $A \subset X$, $(X, \mathcal{T}_X)$, $B \subset X$

а) ако је A отворен у X $\Rightarrow$ $\mathcal{T}_A \subset \mathcal{T}_X$

б) ако је B затворен у X $\Rightarrow$ $\mathcal{F}_B \subset \mathcal{F}_X$

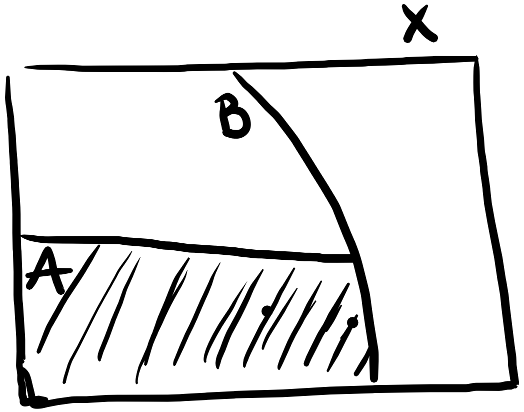
(за домаћи)

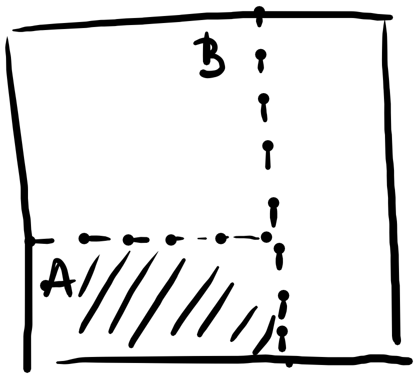


Став: $A \subset B \subset X$

$\bar{A}$ - затворење A у X

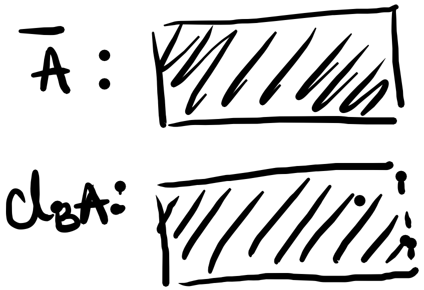
$cl_B A$ - затворење A у B





Тврђење: $cl_B A = \bar{A} \cap B$.

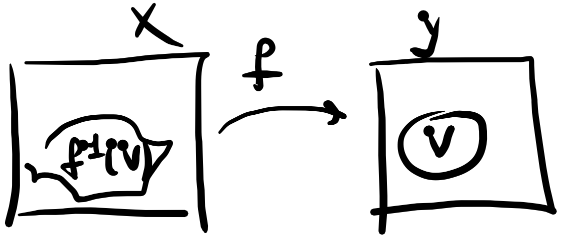
(за вежбу)



- Непрекидна пресликавања -

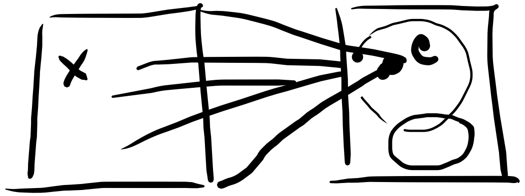
ДЕФ. $(X,\mathcal{T}_X),(Y,\mathcal{T}_Y)$ $f: X\to Y$ је НЕПРЕКИДНА ф-ја ако:

$$(\forall V\in\mathcal{T}_Y)\ f^{-1}(V)\in\mathcal{T}_X$$



Примери: (1) $f: X\to Y$ $f(x)=c=\text{конст}$

константна ф-ја непрекидна



(2) $\mathbb{1}_X:(X,\mathcal{T}_X)\to(X,\mathcal{T}_X)$ $x\mapsto x$

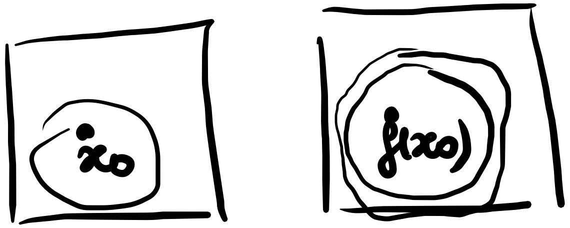
(3) $f:(X,\mathcal{T}_d)\to Y$ непр. ✓

дискретна топ.

ДЕФ. $f:(X,\mathcal{T}_X)\to(Y,\mathcal{T}_Y)$ $x_0\in X$

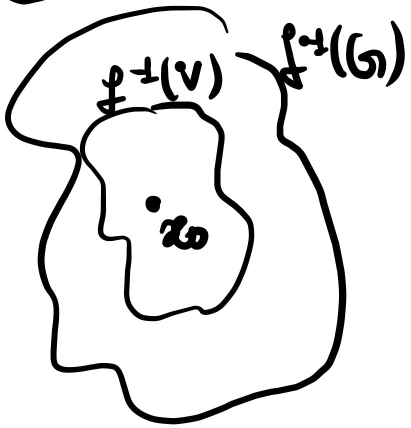
f је НЕПРЕКИДНА у тачки x_0

ако $(\forall G\in\mathcal{O}(f(x_0)))\ f^{-1}(G)\in\mathcal{O}(x_0)$



Став. $f:(X,\tau_X)\to(Y,\tau_Y)$ f је непрекидна $\iff$ $(\forall x\in X)$ f непрекидна у x.

Доказ: $(\Rightarrow)$ $x_0\in X \to G\in\mathcal{O}(f(x_0)) \to (\exists V\in\tau_Y)\ f(x_0)\subset V\subset G$



f непр. $\Rightarrow f^{-1}(V)\in\tau_X$

$x_0\in f^{-1}(V)\subset f^{-1}(G)$

$\Rightarrow f^{-1}(G)\in\mathcal{O}(x_0)$ ✓

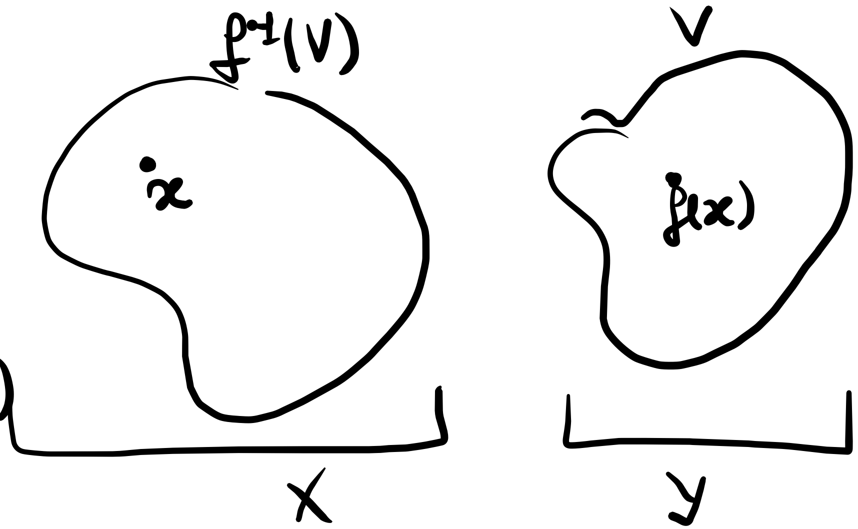
$(\Leftarrow)$ f непр. у $\forall$ тачки $x\in X$

$V\in\tau_Y$? $f^{-1}(V)\in\tau_X$

$x\in f^{-1}(V)$ произв.

$\Rightarrow f(x)\in V$ (V је околина $f(x)$)

$\xRightarrow{\text{непр. у } x} f^{-1}(V)\in\mathcal{O}(x)$



$f^{-1}(V)$ је околина сваке своје тачке $\Rightarrow f^{-1}(V)\in\tau_X$ ✓ □

Став $f:(X,\tau_X)\to(Y,\tau_Y)$ еквивалентна су тврђења:

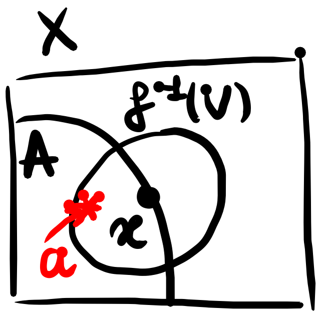
(1) f је непрекидна

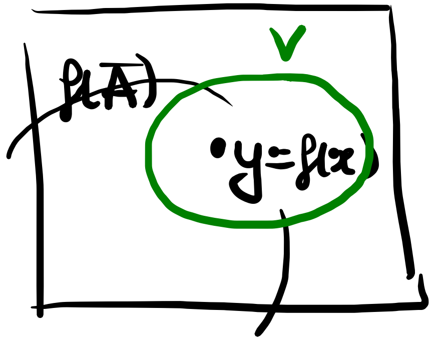
(2) $(\forall A\subset X)\ f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$

(3) $(\forall F\in\mathcal{F}_Y)\ f^{-1}(F)\in\mathcal{F}_X$

$f^{-1}(f(A))\supset A$

$f(f^{-1}(A))\subset A$





Д. (1) ⇒ (2): $y\in f(\overline{A})$ $\quad ?\ y\in\overline{f(A)}$

$\exists x\in\overline{A}\ \ y=f(x)$

произвољан $V\in\tau_Y,\ y\in V$ $\quad$ желимо да V сече $f(A)$?

f непр. $\Rightarrow f^{-1}(V)\in\tau_X$

$x\in f^{-1}(V)$

$x\in\overline{A}$

$\Rightarrow \exists a\in A\cap f^{-1}(V)$

$\Rightarrow f(a)\in f(A)\cap \underbrace{f(f^{-1}(V))}_{\subset V}$

$f(a)\in f(A)\cap V$ ✓ $\Rightarrow y\in\overline{f(A)}$

(2) ⇒ (3): важи (2)

$F\in\mathcal{F}_Y,\ A=f^{-1}(F)\subset X$

из (2): $f(\overline{f^{-1}(F)})\subset\overline{\underbrace{f(f^{-1}(F))}_{\subset F}}\subset\overline{F}=F$

имамо: $f(\overline{f^{-1}(F)})\subset F$

$\underbrace{f^{-1}(f(\overline{f^{-1}(F)}))}_{\supset\ \overline{f^{-1}(F)}}\subset f^{-1}(F)$

$\overline{f^{-1}(F)}=f^{-1}(F)$ $\Rightarrow$ $f^{-1}(F)$ затворен

важи (3) ✓

Став $f:(X,\mathcal{T}_X)\to(Y,\mathcal{T}_Y)$ Еквивалентна су тврђења:

(1) f је непрекидна

(2) $(\forall A\subset X)\ f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$

(3) $(\forall F\in\mathcal{F}_Y)\ f^{-1}(F)\in\mathcal{F}_X$

☺ $f^{-1}(V^c)=(f^{-1}(V))^c$

Д. (3) $\Rightarrow$ (1) важи (3)

$V\in\mathcal{T}_Y$ $f^{-1}(V)$ - желимо да $\in\mathcal{T}_X$

$\Downarrow$

$V^c\in\mathcal{F}_Y \overset{(3)}{\Rightarrow} f^{-1}(V^c)\in\mathcal{F}_X$

$\Rightarrow (f^{-1}(V))^c\in\mathcal{F}_X \Rightarrow f^{-1}(V)\in\mathcal{T}_X \Rightarrow f$ непрекидна □

Став: $(X,\mathcal{T}_X)\xrightarrow{f}(Y,\mathcal{T}_Y)\xrightarrow{g}(Z,\mathcal{T}_Z)$

f,g непр. $\Rightarrow g\circ f$ непр.

Д. $V\in\mathcal{T}_Z$ $(g\circ f)^{-1}(V)=f^{-1}\circ\underbrace{\overset{\in\mathcal{T}_Y}{g^{-1}(V)}}_{g\text{ непр.}}=f^{-1}(\text{отв. у } Y)\overset{f\text{ непр.}}{\in}\mathcal{T}_X$ ✓ □

Став: $f:(X,\mathcal{T}_X)\to(Y,\mathcal{T}_Y)$ непр. $\quad A\subset X \quad f|_A: A\to Y \quad a\in A \quad f|_A(a):=f(a)$

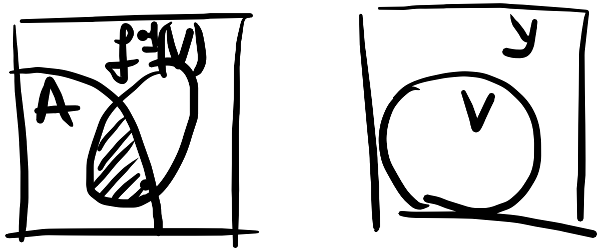
$\Rightarrow f|_A$ непрекидна.

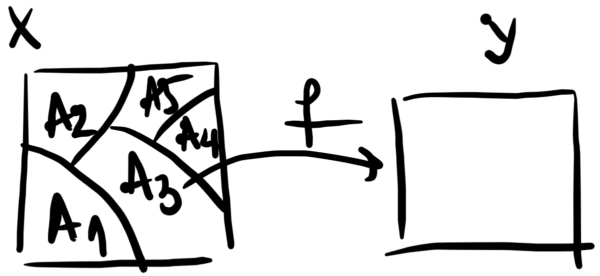
Доказ: $f|_A: A\to Y$

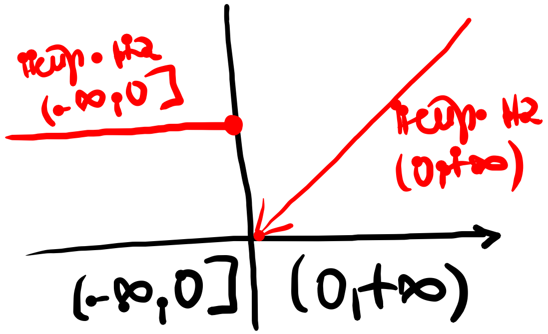
$V\in\mathcal{T}_Y \quad (f|_A)^{-1}(V) = \underbrace{f^{-1}(V)}_{\in\mathcal{T}_X}\cap A \in \mathcal{T}_A$

јер f непр.

✓ $f|_A$ непр. $\square$







← на $\mathbb{R}$ није непр. :(

Теорема о лепљењу: (лема)

$f: X \to Y$

$\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ - колекција непразних потпростора од X, $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = X$

тд. је свака рестрикција $(\forall\lambda\in\Lambda)$ $f_\lambda = f|_{A_\lambda}: A_\lambda \to Y$ непрекидна

Тада важи:

(1) Ако за $(\forall\lambda\in\Lambda)$ $A_\lambda \in \mathcal{T}_X$ $\Rightarrow$ f непрекидна на X.

(2) Ако за $(\forall\lambda\in\Lambda)$ $A_\lambda \in \mathcal{F}_X$ и Λ коначан скуп $\Rightarrow$ f непр. на X

Доказ: (1) $V \in \mathcal{T}_Y$ $\quad f^{-1}(V) \overset{?}{\in} \mathcal{T}_X$

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap \Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Big) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \underbrace{\big(f^{-1}(V)\cap A_\lambda\big)}_{f_\lambda^{-1}(V)} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \underbrace{f_\lambda^{-1}(\overset{\in \mathcal{T}_Y}{V})}_{\substack{f_\lambda \text{ непр.} \\ \in \mathcal{T}_{A_\lambda} \\ A_\lambda \text{ отв. у } X \\ \in \mathcal{T}_X}} \in \mathcal{T}_X$$

$\Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$ $\quad\Rightarrow f$ непр.

(2) користимо карактеризацију: $F \in \mathcal{F}_Y \to f^{-1}(F) \in \mathcal{F}_X$

$$F\in\mathcal{F}_Y: \quad f^{-1}(F) \overset{\text{ан.}}{=} \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \underbrace{f_\lambda^{-1}(F)}_{\substack{\in \mathcal{F}_{A_\lambda} \subset \mathcal{F}_X \text{ јер } A_\lambda \in \mathcal{F}_X \\ f_\lambda \text{ непр}}} \xrightarrow{\text{коначна } \cup \text{ затв.}} \in \mathcal{F}_X \Rightarrow f \text{ непр.} \checkmark \ \square$$