- ОЧИГЛЕДНА ТОПОЛОГИЈА -

фундаменталне св. простора и геом. објеката

ИНВАРИЈАНТЕ ХОМЕОМОРФИЗАМА

$$X \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} Y$$

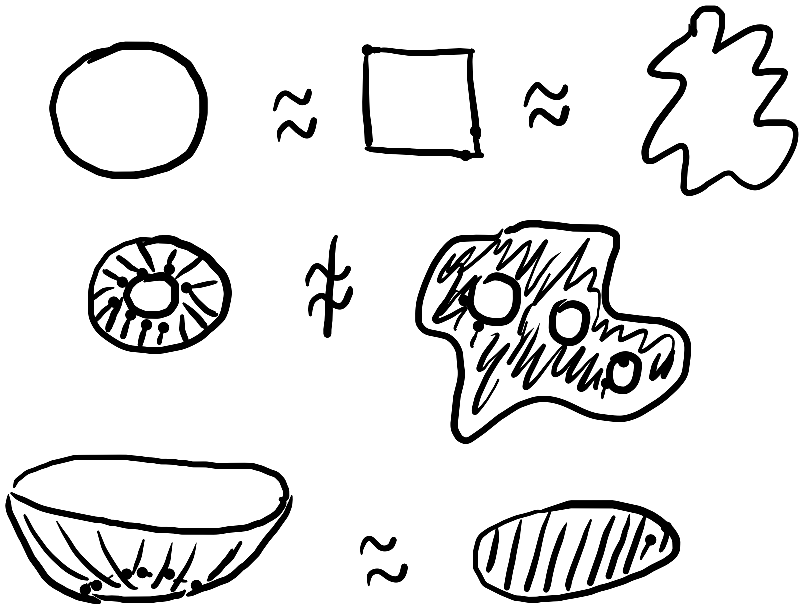
f бијекција

f непр., f^{-1} непр.

$\Rightarrow$ f је <u>ХОМЕОМОРФИЗАМ</u>

$X \simeq Y$

хомеоморфни



домаћи:

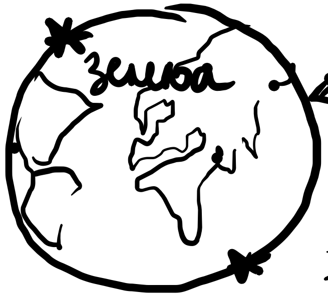
Која слова азбуке

су хомеоморфна ?

Неки резултати:

Борсук Уламова теорема:

$f: S^n \to \mathbb{R}^n$ непр. $\exists x_0 \; f(x_0)=f(-x_0)$



$f(x)=(T(x), p(x))$

$f: S^2 \to \mathbb{R}^2$

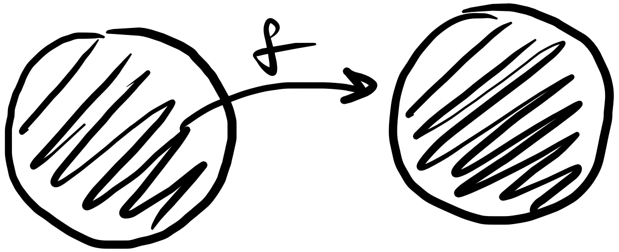
„непр"

$\exists x_0 \; (T(x_0), p(x_0))=(T(-x_0), p(-x_0))$

Брауерова теорема

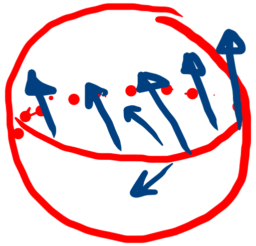
$f: D^n \to D^n$ непр.

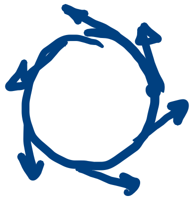
$\exists x_0 \; f(x_0)=x_0$



„Чупава лопта"

S^{2n} нема непр. ненулто тангентно в поље



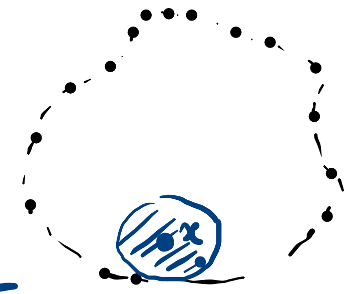


(M,d) - м.п. $\quad d: M\times M \to \mathbb{R}$ метрика

M1) $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$, $\forall x,y\in M$ $d(x,y)\geq 0$

M2) $d(x,y)=d(y,x)$

M3) $d(x,y)+d(y,z)\geq d(x,z)$



$K(x,r)=\{y\in M \mid d(x,y)<r\}$ отв. кугла

$K[x,r]=\{y\in M \mid d(x,y)\leq r\}$ зат. кугла

$U\subset M$ отворен скуп $\Leftrightarrow (\forall x\in U)(\exists \varepsilon>0)\ K(x,\varepsilon)\subset U$

Теорема (M,d) м.п.

1) $\emptyset$, M отворени
2) U_1,U_2 отворени $\Rightarrow U_1\cap U_2$ отворен
3) $\{U_i \mid i\in I\}$ отворени $\Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_i$ отворен

НЕПРЕКИДНОСТ: $(M_1,d_1)\xrightarrow{f}(M_2,d_2)$ непр. $\Leftrightarrow$ ($\forall U\subset M_2$ отворен) $f^{-1}(U)$ отворен у M_1

ПОВЕЗАНОСТ:

M повезан $\Leftrightarrow$ не постоје U,V отворени у M тд. $M=U\cup V$, $U\cap V=\emptyset$, $U,V\neq\emptyset$

КОМПАКТНОСТ: M компактан $\Leftrightarrow$ $\forall$ отв. пок. $M=\bigcup_{i\in I} U_i$ (отв.) $\Rightarrow$ $\exists$ коначан потпокривач

~Тополошки простори~

<u>Деф</u>: $X \neq \emptyset$ $P(X)$ - парт. скуп. $\tau \subset P(X)$ је топологија на X ако задовољава

T1) $\emptyset, X \in \tau$

T2) $\forall U_1, U_2 \in \tau \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \tau$

T3) $\{U_i\}_{i \in I} \subset \tau \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$

$U \in \tau$ - отворен скуп ; (X, τ) - тополошки простор (т.п.)

T2) $U_1 \cap U_2 \cap U_3 = \underbrace{(U_1 \cap U_2)}_{\in \tau} \cap U_3 \in \tau \cdots \Rightarrow$ индуктивно $U_1 \cap \dots \cap U_n \in \tau, \ \forall n \in \mathbb{N}$

сваки <u>коначан</u> пресек

Примери: (1) (X, d) - м.п.

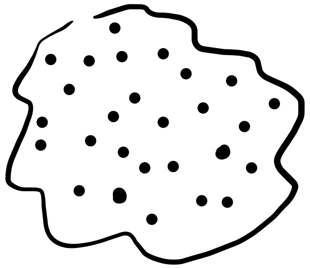
$\tau(d) :=$ фам. отворених скупова по метрици јесте топологија на X - топологија индукована метриком d

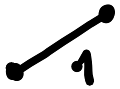
$\mathbb{R}^n$, d_2 - Еуклидска метрика $\mathcal{U} = \tau(d_2)$

уобичајена топологија

(2) Дискретна топологија τ_d $\quad (X, \tau_d)$

$\tau_d = \mathcal{P}(X)$ „Сви скупови су отворени"





$(\{x\} \in \tau_d$

индукована метриком $\mu(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$ дискретна метрика

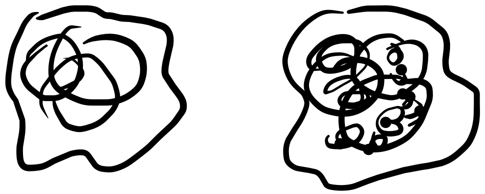
$\{x\} = K(x, \frac{1}{2})$

$\tau_d = \tau(\mu)$

(3) X, антидискретна топологија $\tau_a = \{\emptyset, X\}$

Упоређивање топологија на X: $\quad \tau_1$ на X, τ_2 на X

- $\tau_1 \subset \tau_2$ $\qquad \tau_1$ – ужа, грубља; τ_2 – шира, финија

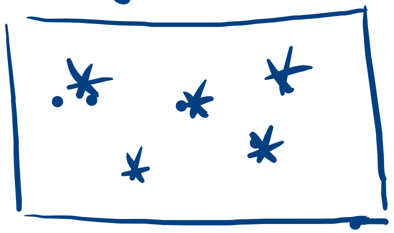


- $\tau_2 \subset \tau_1$ ......
- $\tau_1 \not\subset \tau_2$, $\tau_2 \not\subset \tau_1$ неупоредиве

$\tau_a \subset \tau \subset \tau_d$

14) Кофинитна топологија: $X \neq \emptyset$ $\tau_{cf} := \{U \subset X \mid U^c \text{ коначан скуп}\} \cup \{\emptyset\}$

cofinite



топологија на X јер:

T1) $X^c = \emptyset$ коначан $X \in \tau_{cf}$ ✓ $\emptyset \in \tau_{cf}$ ✓

T2) $U_1, U_2 \in \tau_{cf}$ U_1^c, U_2^c коначан

$U_1 \cap U_2 \overset{?}{\in} \tau_{cf}$ $(U_1 \cap U_2)^c = U_1^c \cup U_2^c$ коначан ✓

$\Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \tau_{cf}$

T3) $U_i, i \in I$ из τ_{cf}

$\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} \underbrace{U_i^c}_{\text{коначан}}$ - коначан $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau_{cf}$ ✓ □

Деф: $(X,\mathcal{T})$ - т.п.

$F \subset X$ је затворен у X ако $F^c \in \mathcal{T}$

$\mathcal{F} = \{F \subset X \mid F^c \in \mathcal{T}\}$ фамилија свих затворених у X

Став. $(X,\mathcal{T})$ т.п. $\mathcal{F}$ Важи:

(1) $\emptyset, X \in \mathcal{F}$

(2) $F_1, F_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$ $\xrightarrow{\text{индукција}}$ сви коначни пресеци тј. $n \in \mathbb{N}$ $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}$ $F_1 \cup \dots \cup F_n \in \mathcal{F}$

(3) $\{F_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{i \in I} F_i \in \mathcal{F}$

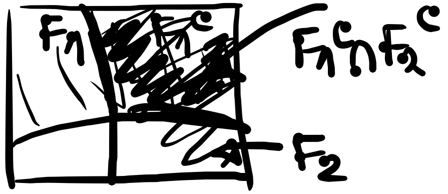
Доказ: (1) $\emptyset^c = X \in \mathcal{T} \to \emptyset \in \mathcal{F}$

$X^c = \emptyset \in \mathcal{T} \to X \in \mathcal{F}$

(2) $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ $\quad F_1^c, F_2^c \in \mathcal{T}$

$(F_1 \cup F_2)^c = F_1^c \cap F_2^c \in \mathcal{T}$

$F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$



(3) $F_i \in \mathcal{F}$ $i \in I$

$\left(\bigcap_{i \in I} F_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} \underbrace{F_i^c}_{\text{отв.}} \in \mathcal{T}$

$\Downarrow$

$\bigcap_{i \in I} F_i \in \mathcal{F}$

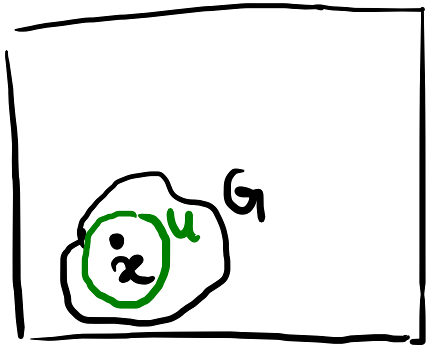
– Основни појмови у тополошком простору –

(X, τ) – т.п.

$\boxed{\text{ОКОЛИНА}}$ деф. $x \in X$, $G \subset X$ је околина тачке x ако $(\exists U \in \tau)\ x \in U \subset G$

$\mathcal{O}(x)$ - скуп свих околина тачке x

$G \in \mathcal{O}(x) \cap \tau$ ← G је отворена околина x

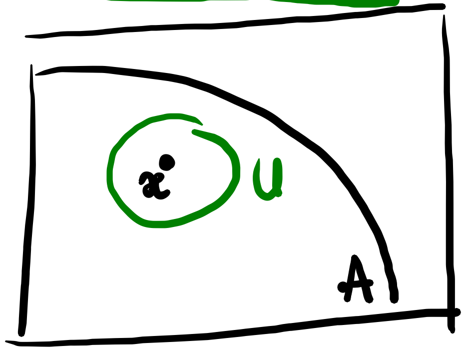


околина од x $\ni x$

$\boxed{\text{УНУТРАШЊОСТ}}$ деф. $A \subset X$, x је унутрашња тачка скупа A

$\iff (\exists U \in \tau)\ x \in U \subset A$

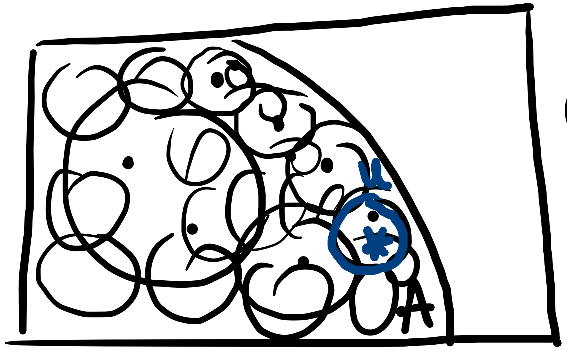
$\iff A \in \mathcal{O}(x)$



$\mathrm{int} A := \{x \in A \mid x \text{ унутрашња тачка скупа } A\}$

$= \{x \in A \mid (\exists U \in \tau)\ x \in U \subset A\}$

Унутрашњост скупа A (интериор)



$$\mathrm{int} A = \bigcup_{\substack{U \in \tau \\ U \subset A}} U$$

$\subset$: $x \in \mathrm{int} A \Rightarrow x \in$ десно ✓

$\supset$: $x \in \bigcup U \Rightarrow \exists U \in \tau$, $U \subset A$, $U \ni x$

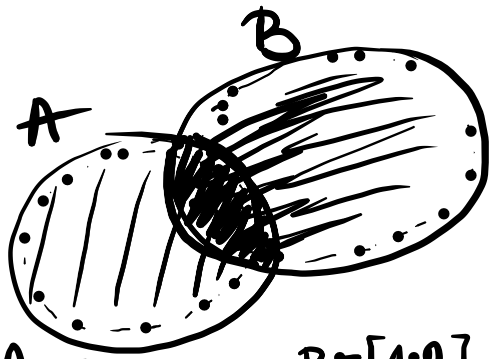
$\Rightarrow x \in$ лево

$\mathrm{int}A = \bigcup\limits_{\substack{u\in\mathcal{T}\\ u\subset A}} u$ „int A највећи отворен скуп садржан у A"

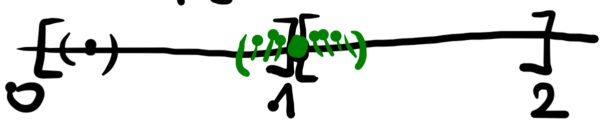
* $\mathrm{int}A \subset A$
* $\mathrm{int}A \in \mathcal{T}$
* $A \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \mathrm{int}A = A$
* $B \in \mathcal{T},\ B \subset A \Rightarrow B \subset \mathrm{int}A$

За вежбу:

* $A \subset B \Rightarrow \mathrm{int}A \subset \mathrm{int}B$
* $\mathrm{int}(A\cap B) = \mathrm{int}A \cap \mathrm{int}B$
* $\mathrm{int}(A\cup B) \supset \mathrm{int}A \cup \mathrm{int}B$

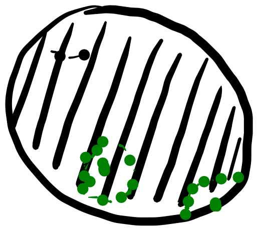
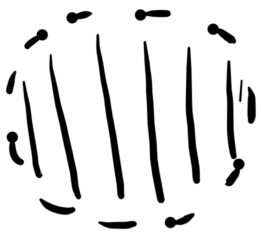


$A=[0,1]$ $B=[1,2]$



$\mathrm{int}A=(0,1)$ $\mathrm{int}B=(1,2)$ ← нема 1

$\mathrm{int}(A\cup B) = \mathrm{int}[0,2] = (0,2) \leftarrow 1$ ✓

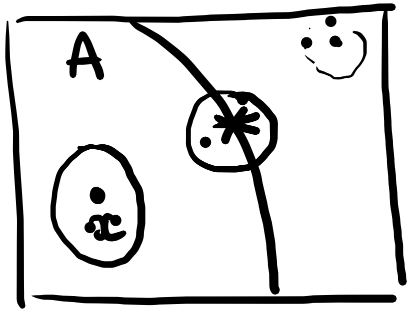
Пр. D^2  $\mathrm{int}D^2$: $\mathring{D}^2$ 

Пр. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cf})$ за домаће $\mathrm{int}[3,+\infty) = ?$!

$(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ ← уобичајена: $\mathrm{int}[3,+\infty) = (3,+\infty)$

ЗАТВОРЕЊЕ деф. $A \subset X$

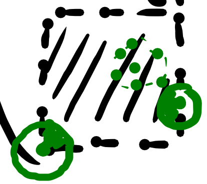
$$\overline{A} := \{x \in X \mid (\forall G \in \mathcal{O}(x))\ G \cap A \neq \emptyset\} \leftarrow \mathrm{cl}\,A$$



адхеренција скупа A
затворење скупа A

$a \in \overline{A} \leftarrow a$ је АДХЕРЕНТНА тачка скупа A.

пр. $\overline{\left(\text{отворен квадрат}\right)}$



=