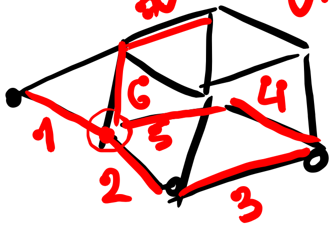
- Уникурсалност -



1-...-7 уникурсални ланац

<u>деф</u> $G=(V,E)$ G је УНИКУРСАЛАН ако $\exists$ уникурсалан ланац
који садржи све ивице графа G, и сва темена графа G.

„G се може нацртати у 1 потезу" $\rightarrow$ G повезан.

<u>Лема</u> $G=(V,E)$ повезан граф
$(\forall v \in V)\ 2 \mid \deg v \Rightarrow$ G је уникурсалан и за $\forall v \in V$ постоји уникурсалан л.
који покрива $G(E)$ и који почиње и завршава се у v. $v \cdots\cdots v$

<u>доказ</u>: довољно је наћи један уникурсалан л. који покрива G.

ако $\exists$ 1: $v_1 \rightarrow \cdots \cdots \cdots \rightarrow v_1$

$\exists i\ v_i = v$

$v \in V$ произв.

$$\underbrace{v_1 \rightarrow \cdots}_{L_1} \rightarrow \underbrace{v \rightarrow \cdots \rightarrow v_1}_{L_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underbrace{v \rightarrow \cdots \rightarrow v_1}_{L_2} \underbrace{\rightarrow \cdots \rightarrow v}_{L_1}}$$

почиње и завршава у v ✓

Индукција по $|E|$

• $|E|=1$: $\overset{1}{\bullet}\!\!-\!\!\overset{x}{}\!\!-\!\!\overset{1}{\bullet}$, O

$\boxed{\text{ИХ:}}$ тврђење да исказ важи за све повезане графове са свим степенима парним, који имају мање од $|E|$ грана

Доказујемо за $G=(V,E)$ $|E|\geq 2$.

☺ $(\forall v\in V)\ 2 \mid \deg v$

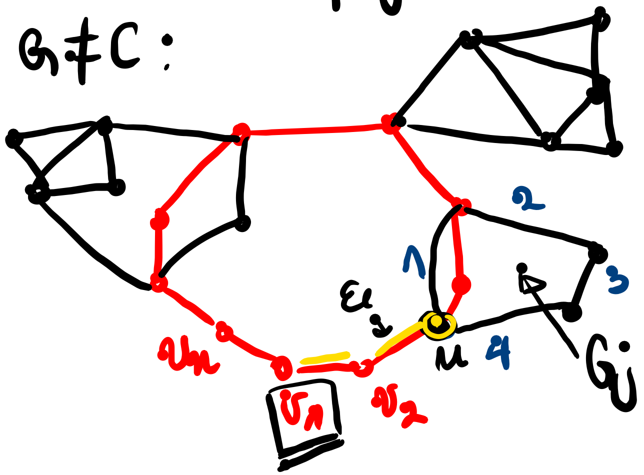
G повезан $\Rightarrow \deg v \neq 0$

$(\forall v\in V)\ \deg v\geq 2$

<u>Лема</u> $\exists$ контура C: $v_1 \xrightarrow{e_1} v_2 \xrightarrow{e_2} \dots \to v_n \xrightarrow{e_n} v_1$ у G

Ако $G=C \to$ крај ✓

$G\neq C$:



избришемо контуре C

$G'=(V',E')$: $V'=V\setminus\{v_i \mid i=\{1,\dots,n\},\ \deg_G v_i=2\}$

$E'=E\setminus\{e_1,\dots,e_n\}$

<u>G'</u> $\leftarrow$ компоненте повезаности $G_j=(V_j,E_j)$ $j\geq 1$ $j\leq k$

$\deg_{G'} v <$ $\deg_G v$ / $\deg_G v-2$ $\to$ степен сваког чвора паран

$\Rightarrow G_j \leftarrow$ може се применити инд. хипотеза. (*)

• G_j – докажимо да G_j садржи неко од темена $v_1,v_2,\dots,v_n$

<u>v_1</u> – посматрамо најкраћи пут од v_1 до G_j (произв. темене из G_j)

$v_1 \xrightarrow{a} u_1 \xrightarrow{e_1} \cdots \to u_l \xrightarrow{e_l} u\in V_j$

довољно доказати e_l у C

$u\in C$ ⇐

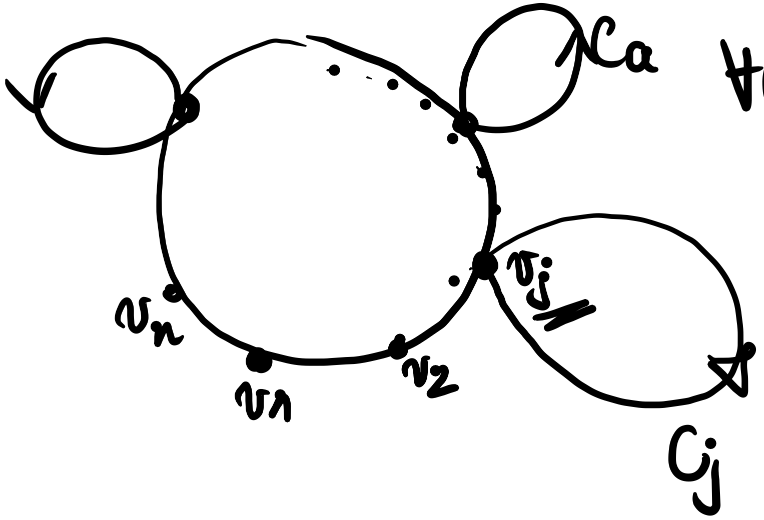
• ако e_l у $G_j \to \exists$ краћи пут ↯

• e_l није у неком другом G_i, $i\neq j$

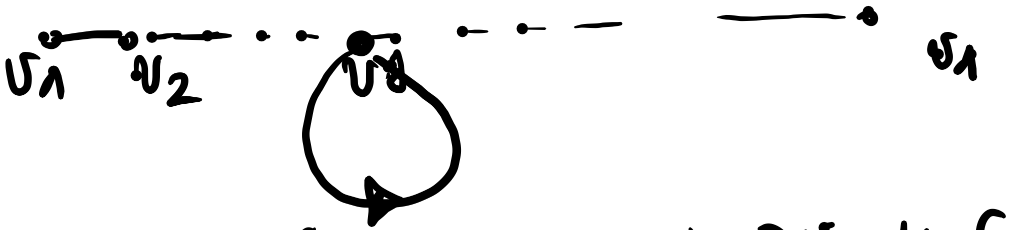
$\Rightarrow \boxed{e_l\in C}$

$\Rightarrow \boxed{u\in C}$

Правимо уникурсални пут за цео G:



$\forall G_j \; \exists v^j$ које припада G_j и припада C



C_j - уникурсални пут у G_j ⊛
који $\exists$ по И.Х.

За $\forall j \to$ уникурсални пут C_j за G_j
„уметни" у C код темена v^j

$\rightsquigarrow$ уникурсални пут за G. ✓ $\square$

Теорема G - повезан. G је уникурсалан $\Leftrightarrow$ највише 2 темена непарног степена.

Доказ: ($\Rightarrow$) L - уникурсални ланац

$v_1 \to v_2 \to \dots \to v_{n-1} \to v_n$ (не морају бити разл.)

$v \neq v_1, v_n$ $\quad \to v \to$ $\forall$ појављивање +2 у deg v

$\Rightarrow 2 \mid \deg v$

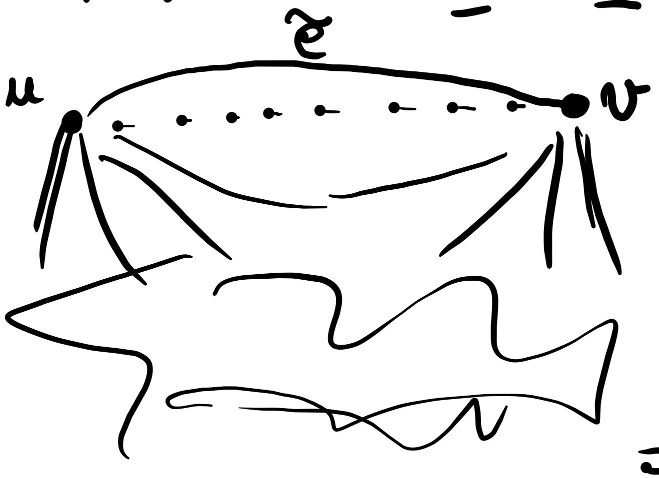
k пут $\downarrow$ 2k ивице

$\Rightarrow$ max 2 темена непарног степена.

($\Leftarrow$) * 0 темена неп. степена $\to (\forall v \in V)\ 2 \mid \deg v \xRightarrow{\text{лема}}$ G уникурсалан

* 1 теме неп. степена ↯ $2 \mid \#$ тем. неп. степена

* 2 темена u и v непарног степена



$\boxed{G'}$: G са додатном ивицом e од u до v.

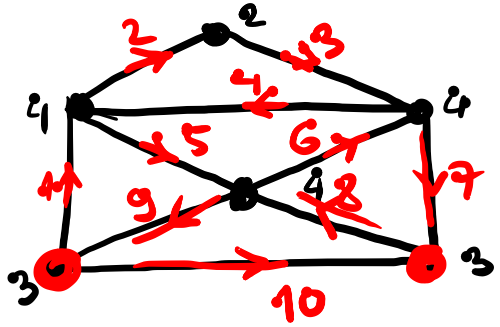
$\uparrow$ $\forall$ теме парног deg, повезан

$\xRightarrow{\text{лема}}$ $\exists$ уникурсалан ланац у G' од v до v"

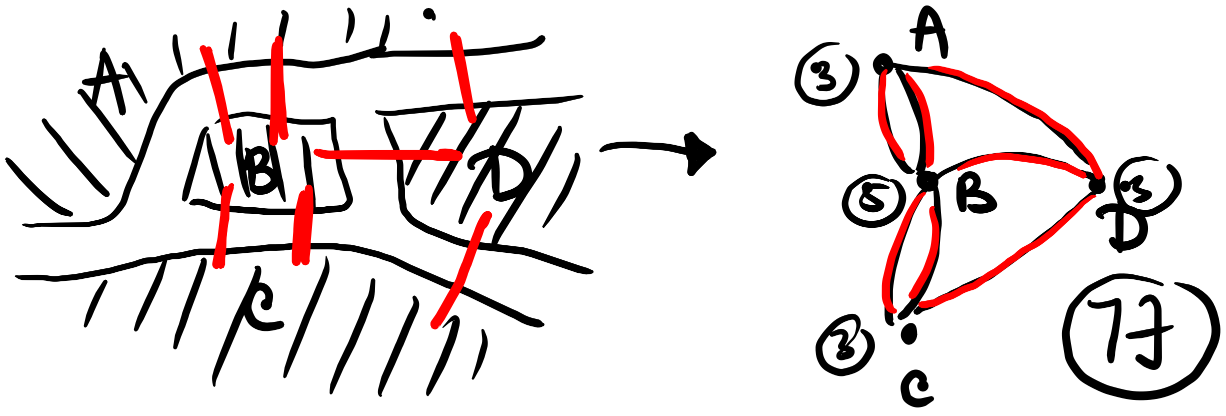
$v \to \underbrace{\dots}_{L_1} \to v \xrightarrow{e} u \to \underbrace{\dots}_{L_2} \to v$

$\Rightarrow$ $u \to \underbrace{\dots}_{L_2} \to v \to \underbrace{\dots}_{L_1} \to v$ $\quad L_2L_1$ - уникурсалан ланац који покрива G. □

Тб.



Тб. Кенігсберг мостары Эйлер



Тб: K_n уникурсал ма?

$\Updownarrow$

$2 \nmid n \vee n=2$

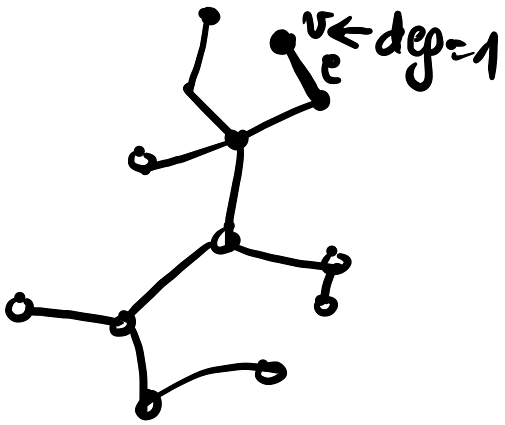
Тб.: $K_{m,n}$ уникурсал ма?

- $m=n=1$
- $m=2 \vee n=2$
- $2 \mid m,n$

– Ојлерова карактеристика графа –

деф. $G=(V,E)$ граф. Ојлерова карактеристика графа G:

$$\chi(G) := |V| - |E| .$$



деф. G је дрво ако је повезан граф и нема контура у њему.

Став G дрво $\Rightarrow \chi(G)=1$.

доказ: индукција по $|V|$

- $|V|=1$ • $|E|=0$ $\rightarrow \chi=1$ ✓
- ИХ: ($\forall$ дрво са мање од $|V|$ темена има $\chi=1$) $\longmapsto$ $|V| \geq 2$

став графе ☺ јер G повезан

G нема контуру $\Rightarrow (\exists v \in V)\ \deg v = 1 \vee \cancel{\deg v = 0}$

$v \rightarrow \deg v = 1$

$\exists 1\ e \in E\ v \in e$

уочимо G': $V' := V \setminus \{v\}$ $E' : E \setminus \{e\}$

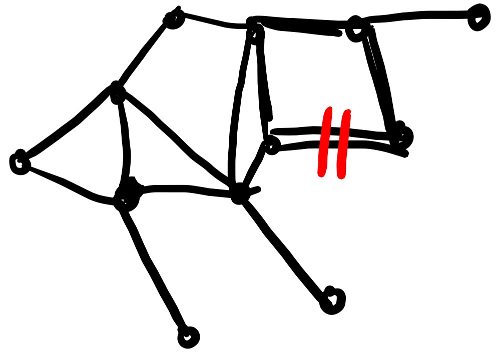
G' дрво $\overset{\text{ИХ}}{\Rightarrow}$ $\chi(G')=1$

$$\chi(G) = |V| - |E| = (|V'|+1) - (|E'|+1) = |V'| - |E'| = 1$$

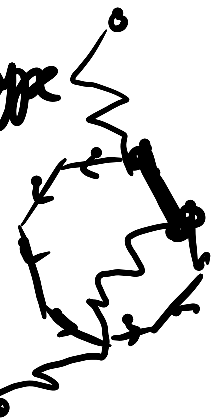
✓ □

Став. G повезан граф $\Rightarrow \chi(G) \le 1$.

Скица доказа: ако G није дрво $\to \exists$ контура



избацивањем било које ивице контуре граф остаје повезан



Понављамо процес (избацимо $\underline{k}$ ивица)

$\rightsquigarrow$ дрво: $\to$ темена $|V|$, ивица $|E|-k$

$\chi(\text{дрво}) = $ бр. темена $-$ бр. ивица $= |V| - (|E|-k) \overset{\text{став.}}{=} 1$

$\Rightarrow \underbrace{|V|-|E|}_{\chi(G)} = 1-k$

$\boxed{\chi(G) = 1-k \le 1}$ ✓ $\square$

$G \xrightarrow[\text{ивица}]{-k}$ дрво — максимално дрво графа G

$\boxed{k = 1-\chi(G)}$

Последица: G повезан граф. G је дрво $\Leftrightarrow \chi(G)=1$

Пр. $\chi(K_n) = n - \binom{n}{2} = \dots$

Пр. $\chi(K_{m,n}) = m+n - m\cdot n$
$= 1-(m-1)(n-1) \le 1$

$\chi(K_{m,n}) = 1 \Leftrightarrow m=1 \lor n=1$

Мапе на површима. Ојлерова карактеристика површи.

Деф S-површ, $G=(V,E)$ граф

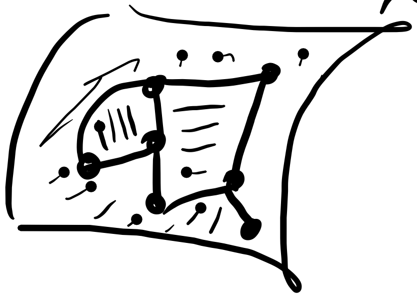
$\varphi: G \to S$ утапање (геом. реализ. G на S) се назива МАПА на површи S.

$v\in V \mapsto \varphi(v)$ теме мапе

$e\in E \to \varphi(e)$ ивица

комп. повез. $S\setminus\varphi(G)$ – региони мапе φ

$R :=$ скуп свих региона

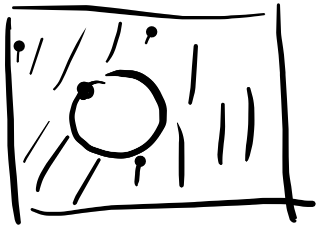


Ако $\forall r\in R$ $r\approx \mathring{D}^2 \to$ мапа φ је РЕГУЛАРНА

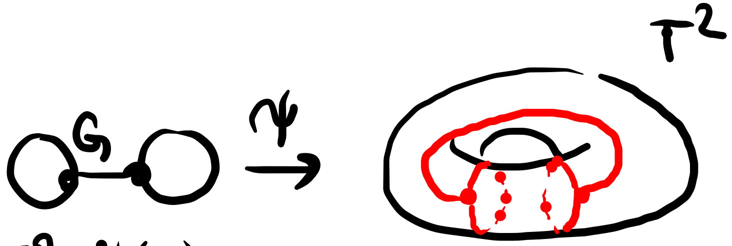
Пр: $G \xrightarrow{\varphi} S^2$

$S^2\setminus\varphi(G)$:

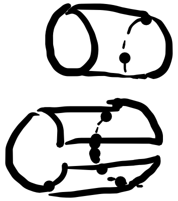
φ – регуларна мапа на S^2



Пр. $G \xrightarrow{\psi} T^2$



$T^2\setminus\psi(G)$:



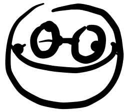
$\not\approx \mathring{D}^2$

$\approx \mathring{D}^2$

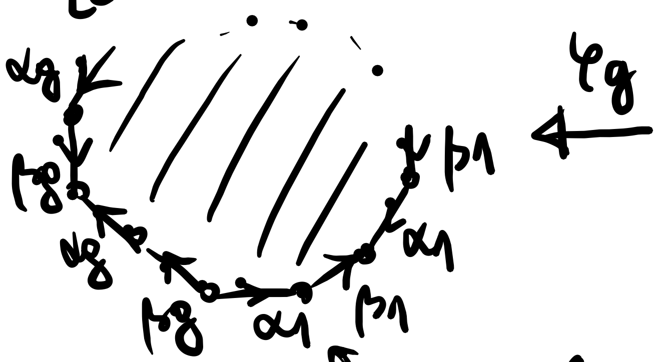
Није регуларна мапа

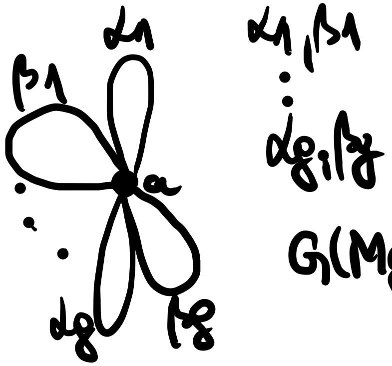
Став S-затворена повезана површ $\Rightarrow$ на S постоји регуларна мапа.

Доказ. $(\exists g\in\mathbb{N}_0\ S\approx M_g)\vee(\exists h\in\mathbb{N})\ S\approx N_h$

* $M_0=S^2$ ← пр. рег. мапе ✓ 

* $\boxed{M_g}$ $g\geq 1$





$G(M_g)$

$M_g\setminus\varphi_g(G(M_g))\approx$  $\mathring{D}^2$

регуларне мапе ✓

* $\boxed{N_h}$ $h\geq 1$

$N_h\setminus$ слике графа

$\approx$  $\mathring{D}^2$

регуларне мапе ✓

□

ДОДАТАК:

$\chi=1-2g+1=2-2g$

$\chi=1-h+1=2-h$

Деф. S-површ, G-граф, $\varphi: G \to S$ мапа на S

V-темена, E-ивице, R-региони на мапи φ

$$\boxed{\chi(\varphi)} := |V| - |E| + |R|$$

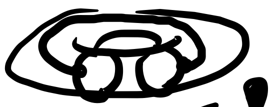
Ојлерова карактеристика мапе φ

Израчунамо: $\chi(\varphi_g) = 2-2g$, $\chi(\psi_h) = 2-h$ (*)

μ_1

$\chi(\mu_1) = 2-3+3 = 2$

μ_2



$\chi(\mu_2) = 2-3+2 = 1$

! није рег. мапа !

φ_1 на $M_1 \approx T^2$: $\chi(\varphi_1) = 2-2\cdot 1 = 0$

Теорема φ_1, φ_2 - регуларне мапе на површи S $\Rightarrow \chi(\varphi_1) = \chi(\varphi_2)$

Деф. S-затворена и повезана површ.

$$\boxed{\chi(S)} := \chi(\varphi),$$ где је φ произв. регуларна мапа на S

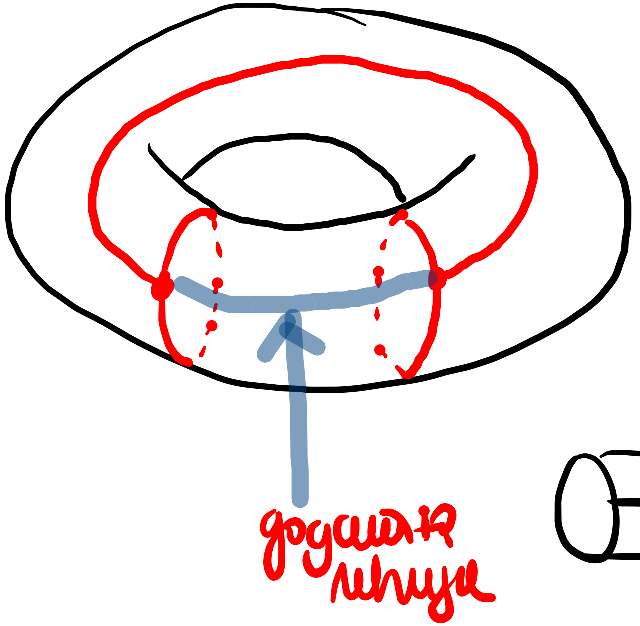
Ојлерова карактеристика површи S

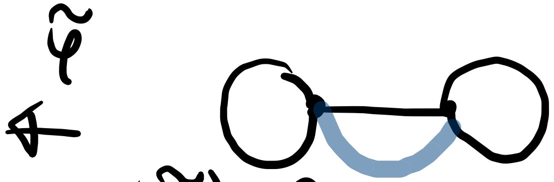
из (*) $\chi(S^2) = \chi(\mu_1) = 2$

$\chi(M_g) = 2-2g$, $\forall g \in \mathbb{N}_0$

$\chi(N_h) = 2-h$, $\forall h \in \mathbb{N}$.

Од сваке мапе φ на S може се добити регуларна мапа $\tilde{\varphi}$ на S





$\chi(\tilde{\varphi}) = 0$

Важи:

$$\underline{\underline{\chi(\tilde{\varphi})}} \le \chi(\varphi)$$

$$\uparrow$$

$$\chi(S)$$

Став

S - затв. пов. површи

$\varphi : G \to S$ мапа

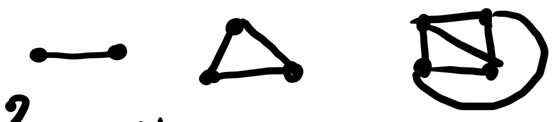
$\Rightarrow \chi(\varphi) \ge \chi(S)$.

— Планарност графова —

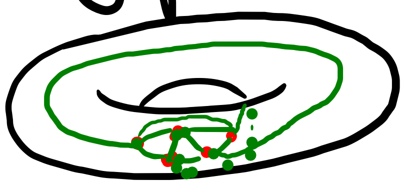
$G \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ **деф** G је ПЛАНАРАН ако $\exists$ топол. реализација у равни.

? $G \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ тј. $\exists$ утапање $\varphi : G \hookrightarrow \mathbb{R}^2$

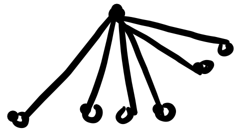
Пр. K_n



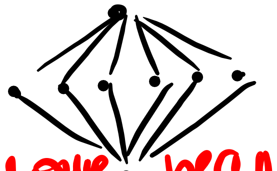
$K_5 \not\hookrightarrow \mathbb{R}^2$ $K_5 \hookrightarrow T^2$



$K_{m,n}$? $K_{1,n}$



$K_{2,n}$



$K_{3,3} \not\hookrightarrow \mathbb{R}^2$

Став. (а) G-планаран $\Rightarrow$ G се може реализовати на свакој површи.

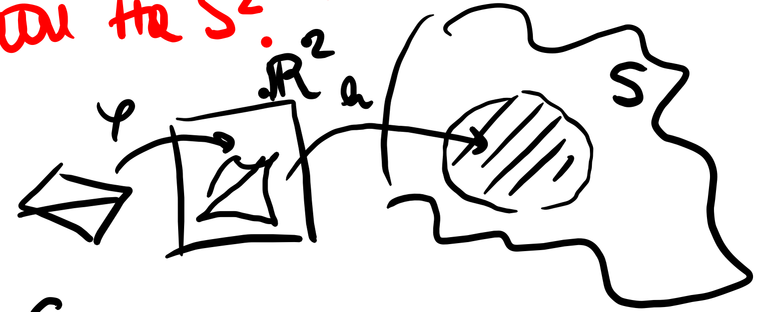
(б) G-планаран $\Leftrightarrow$ G се може реализовати на S^2.

Доказ: (а) $\exists \varphi : G \hookrightarrow \mathbb{R}^2$

S-површ $\forall x \in S$ $\exists$ околина $V(x) \approx \mathbb{R}^2$

$h : \mathbb{R}^2 \to V(x)$ хомеоморфизам

$h \circ \varphi : G \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \to V(x)$ реализација G на S.



(б) ($\Rightarrow$) из а)

($\Leftarrow$)

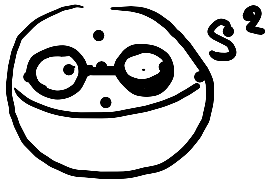
$S^2 \setminus * \approx \mathbb{R}^2$

$(\exists a \in S^2)\ a \notin \varphi(G)$ $\varphi : G \hookrightarrow S^2$

Узмемо стереографску пројекцију из a □

M - мапа на површи S

e - ивица мапе



$r_1 \neq r_2 \rightarrow r_1$ и r_2 суседни региони

(може бити и $r_1 = r_2$)

R - сви региони $\quad r \in R \rightarrow e(r) =$ бр. ивица r

$$\boxed{\sum_{r\in R} e(r) \le 2\cdot|E|} \quad ⊛$$

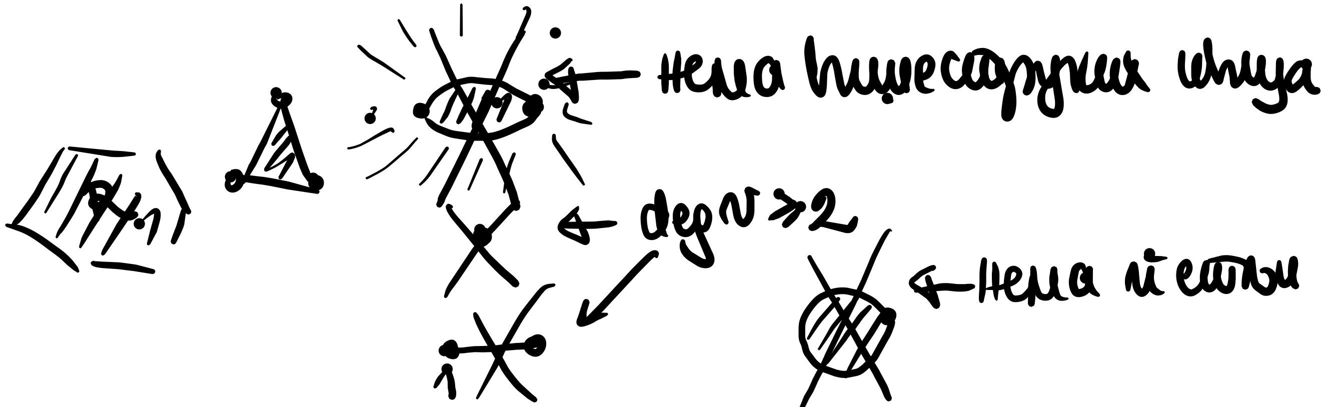
↑ ∀ ивица рачунамо 1 v 2

Став $G=(V,E)$ - прост граф $\forall v\in V \; \deg v \ge 2$.

$\varphi: G \hookrightarrow S$ геом. реализација G на површи S

R - сви региони мапе φ

$\Rightarrow \; |R| \le \frac{2}{3}|E|.$



(детаљнија анализа у књизи)

доказ: $\quad 3\cdot|R| \le 2\cdot|E|$

$(\forall r\in R)\; e(r) \ge 3$

$$3\cdot R \le \sum_{r\in R} e(r) \overset{⊛}{\le} 2\cdot|E| \quad ✓ \quad \square$$

Теорема K_5 и $K_{3,3}$ нису планарни.

доказ: докажемо: $K_5 \not\hookrightarrow S^2$ $\quad K_{3,3} \not\hookrightarrow S^2$

$\boxed{K_5}$ ппс. $\exists$ геом. реализација $\varphi: K_5 \to S^2$

$(\forall v \in K_5)\ \deg v = 4$ и просте

$\overset{\text{став}}{\Longrightarrow} |R| \le \frac{2}{3}|E| = \frac{2}{3}\cdot\binom{5}{2} = \frac{2}{3}\cdot 10 = \frac{20}{3} \to |R| \le \frac{20}{3}$ ↯

$\chi(S^2) = 2$

$2 = \chi(S^2) \le \chi(\varphi) = |V| - |E| + |R| = 5 - 10 + |R| \Rightarrow |R| \ge 7$

$\Rightarrow \boxed{K_5 \not\hookrightarrow S^2}$

$\boxed{K_{3,3}}$ ппс. $\exists$ геом. реал. $\varphi: K_{3,3} \hookrightarrow S^2$

црвени

плави

$(\forall r \in R)\ e(r) \ge 4$: од пре $e(r) \ne 0, 1, 2$ $\quad \varnothing$

? $e(r) = 3$ $\quad$ ↯ анализа свих случајева ... ↯

↯ јер $K_{3,3}$ бипартитан

↯ $\Rightarrow e(r) \ne 3$

$4 \cdot |R| \le \sum_{r \in R} e(r) \overset{(*)}{\le} 2 \cdot |E| = 2 \cdot 9 \Rightarrow \boxed{|R| \le \frac{9}{2}}$

$2 = \chi(S^2) \le \chi(\varphi) = |V| - |E| + |R| = 6 - 9 + |R| \Rightarrow \boxed{|R| \ge 5}$

↯ $\Rightarrow \boxed{K_{3,3} \not\hookrightarrow S^2}$

Теорема G је планаран $\iff$ G нема подграф хомеоморфан са K_5
и —||— —||— са $K_{3,3}$.