

БУТ: $f: S^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерыв. $\Rightarrow \exists x_0 \in S^m) f(x_0) = f(-x_0)$

Теорема о непрерывности:

$A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{R}^n$ (необразы) ограничены и μ -мерности μ -Лебега мера

$\Rightarrow \exists$ χωρική συν $H \subset \mathbb{R}^n$ κοφά απ δε πόσων,
 π.μ. $\mu(A_i \cap H^+) = \frac{1}{2} \mu(A_i) = \mu(A_i \cap H^-)$, $\forall i=1, \dots, n$
 (H^+, H^- συμπληρώματα ορισμένα σε σχέση με H)

Lokaz:

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \{1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

$$x \leftrightarrow (x, 1)$$

$\alpha \leftrightarrow (\alpha, 1)$
 $\vec{v}$ - вектор из $S^n \rightarrow$ множество $R\vec{v}$ в $\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow$ множество $R\vec{v}$
 $R\vec{v} \perp \vec{v}, R\vec{v} \neq 0$

↓
x überprufen $H_U \subset \mathbb{R}^n (\mathbb{R}^n \times \{1\})$
 $H_U = R_U \cap (\mathbb{R}^n \times \{1\})$

поэтому $H_0^+ = \mathbb{R}_+^+ \cap (\mathbb{R}^n \times \{1\})$

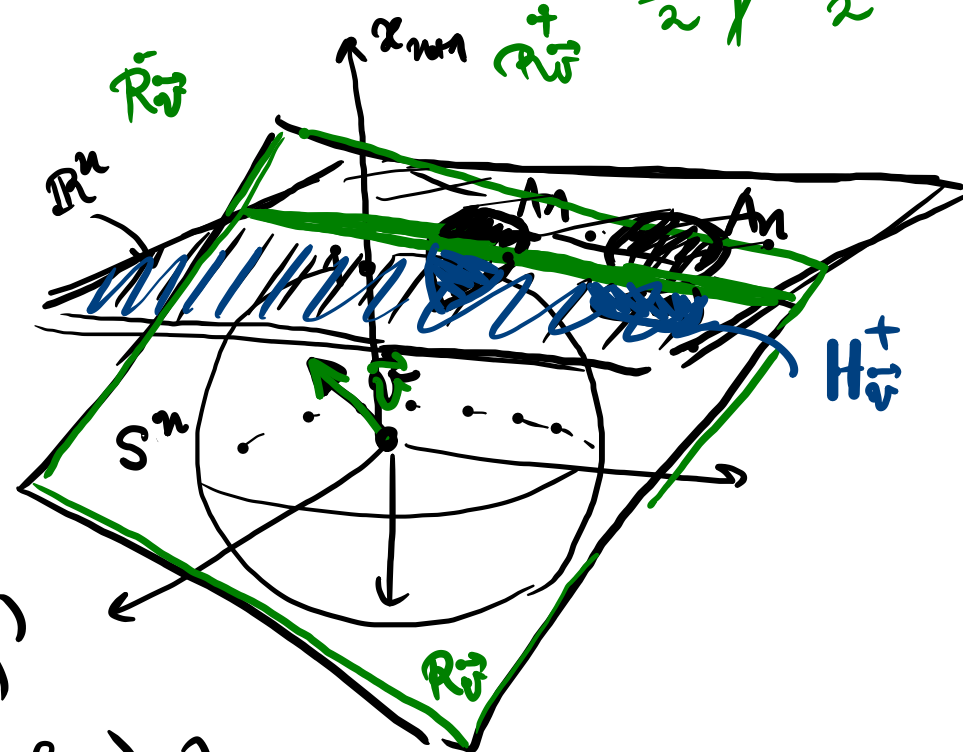
$$1 \leq i \leq n: \quad f_i: S^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\underline{\underline{f_i(\vec{v}) = \mu(A_i \cap H_{\vec{v}}^+)$$

$$\vec{v} = e_{n+1} \text{ (refp)}$$

$$h^*(e_{i+1}) = \mu(A_i)$$

$$\vec{v} = -c_{\text{max}} \quad f_i(-c_{\text{max}}) = 0$$



$$\vec{v} : f_i(\vec{v}), f_i(-\vec{v})$$

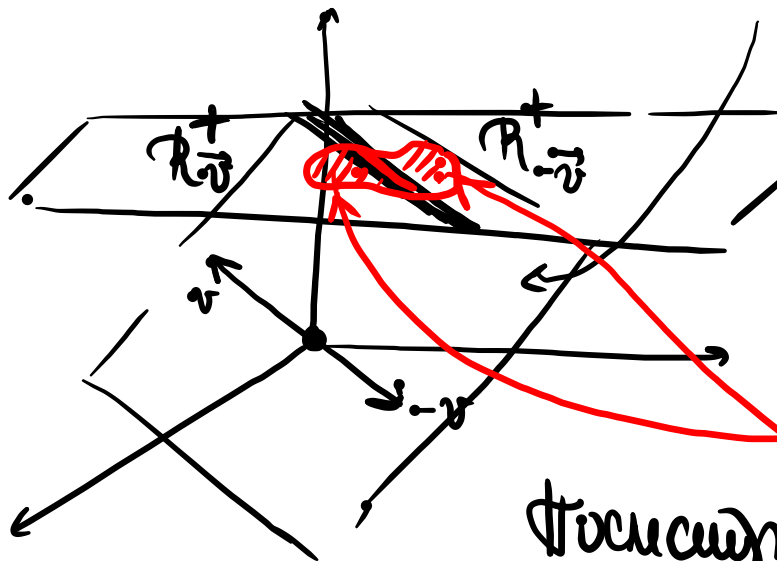
$$R\vec{v} = R_{-\vec{v}}$$

или за невырожденные

$$R_{\vec{v}}^+ \cup R_{-\vec{v}}^+ = \mathbb{R}^n \times \{1\}$$

$$R_{\vec{v}}^- = R_{-\vec{v}}^+$$

$$f_i(\vec{v}) + f_i(-\vec{v}) = f(A_i), \forall i, \forall \vec{v}$$



Нормировано: $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\vec{v} \in S^n \quad f(\vec{v}) = (f_1(\vec{v}), \dots, f_n(\vec{v}))$$

f невырождена ✓

$$\Rightarrow \exists \vec{v}_0 \quad f(\vec{v}_0) = f(-\vec{v}_0)$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad f_i(\vec{v}_0) = f_i(-\vec{v}_0) = \frac{1}{2} f(A_i)$$

$\Rightarrow$ $\vec{H}_{\vec{v}_0}$ не может делиться на A_i $\square$

- Графови -

ајстаграфи
(кони) одређају : $G=(V, E)$ $V=\{v_1, v_2, \dots\} \leftarrow$ КОНАЧАН
 E - скуп граничних интервала V
 неусмерен граф : $\{v_i, v_j\} \in E$

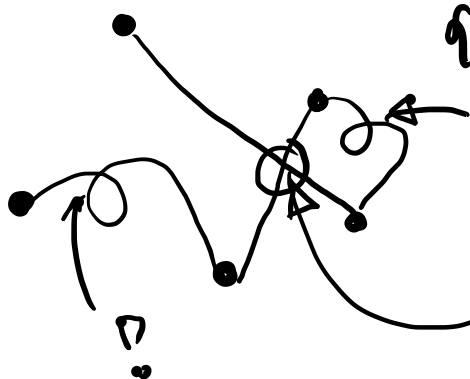
$\{v_1, v_2\} \in E \leftrightarrow$ постоји ивица $\overline{v_1 v_2}$

$G=(V, E) \mapsto$ цртамо граф G у $\mathbb{R}^n$
 дискретан скуп тачака $V=\{v_1, v_2, \dots\} \subset \mathbb{R}^n$

$\{v_i, v_j\} \in E \mapsto$ постоји $\gamma_{ij} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ $\gamma_{ij}(0)=v_i, \gamma_{ij}(1)=v_j$

не тачно

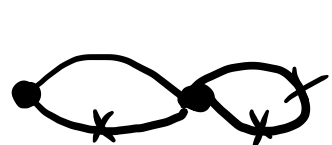
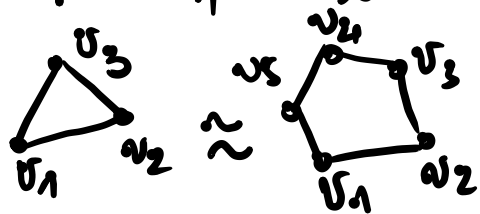
$\rightarrow$ проципи путева γ_{ij}



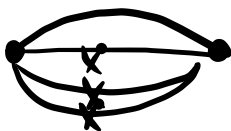
пројекција путева γ_{ij} у $\mathbb{R}^n$ тачно
 је пројекција путева γ_{ij}

Геометријска реализација графа G - цртамо граф у $\mathbb{R}^n$ тач. не постоје
 пресеци ивица осим у зај. тач. тач. и скуп путева су проципи
 "уједињених графа G у $\mathbb{R}^n$ " $\varphi : G \hookrightarrow \mathbb{R}^n$

def. $G_1 \approx G_2$ ако имају коморфне 3D-реализације.



G_1 је прост ако нема њених 0-димензијских или 1-димензијских простих графова коморфних просим графу.



МОМЕНТ КРИВА

$$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$$

$$\Gamma = \{ \gamma(t) \mid t \in \mathbb{R} \} - \text{моменти крива}$$

Лема Не постоје 4 копланарне тачке на моменти криве.

Доказ: пр. $\exists$ раван $\pi: ax+by+cz=d$ ($a, b, c \neq 0$)

$$\pi \ni \gamma(t_1), \gamma(t_2), \gamma(t_3), \gamma(t_4) \quad t_1, t_2, t_3, t_4 - 4 \text{ разл. тачке}$$

$$\gamma(t) \in \pi: at+bt^2+ct^3=d$$

$$at+bt^2+ct^3-d=0$$

$$p(t) \neq 0$$

$$\leftarrow \deg p \leq 3$$

4 разл. тачке



Теорема Сваки граф се може реализовати у $\mathbb{R}^3$.

Доказ: $G = (V, E)$

$f: V \rightarrow \mathbb{R}^3$

$v_1, \dots, v_n$

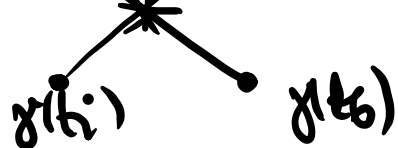
$v_i \mapsto \gamma(t_i)$

$t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n$

постављају различите тачке попут криве
илица $\{v_i, v_j\} \mapsto \gamma(t_i), \gamma(t_j)$

да ли се може где разн. илук не секу?

нпс. секу $\gamma(t_a)$ $\gamma(t_b)$ $\Rightarrow$ контрадикције $\gamma(t_a), \gamma(t_i), \gamma(t_b), \gamma(t_j)$



$\Downarrow$ $\square$

Примери: * комплетан граф K_n

* комплетан дивергентан m $K_{1,m}$

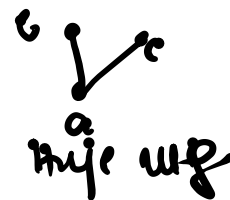
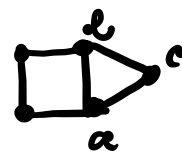
* путања, стаза P_n P_3

* циклус, колаца C_n

Дефиниција $G = (V, E)$

* подграф: $G' = (V', E')$ $V' \subset V, E' \subset E$

* индуцирани подграф: $G' = (V', E')$
 $V' \subset V$
 $E' = E \cap \mathcal{P}(V')$



* ланац у графу:



уз члене (не морају бити разн.)

$\forall i \exists$ путања $v_i v_{i+1}$

ЕЛЕМЕНТАРНИ ЛАНАЦ - да члене различите ($\Rightarrow \nexists$ путање различите)

УНИКУРСАДНИ ЛАНАЦ - да путање различите

КОНТУРА (ЦИКЛ) - да члене различите осим $v_1 = v_{n+1}$ $v_1 \dots v_n$
и да путање различите.

Лема $G = (V, E)$

Еквивалентност:

(1) $(\forall v, w \in V) \exists$ ланац који их повезује

(2) $-||-$ $\exists$ елементарни ланац који их повезује

(3) G повезан

(4) G једино повезан

степен чвора: $\forall v \in V$ $\deg v := |\{e \in E \mid v \in e\}|$
(индекс) $\text{in } v$

Лема: $\boxed{\sum_{v \in V} \deg v = 2 \cdot |E|} \quad (1)$

$\rightarrow 2$

$a_i(G) = \text{број елемената степена } i$

$$\sum_{v \in V} \deg v = a_1(G) + 2a_2(G) + 3a_3(G) + \dots \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow 2 \cdot |E| = \underbrace{(a_1(G) + a_3(G) + a_5(G) + \dots)}_{\uparrow} + 2(\dots)$$

Последаца: $G = (V, E)$

број елемената највишег степена је паран.

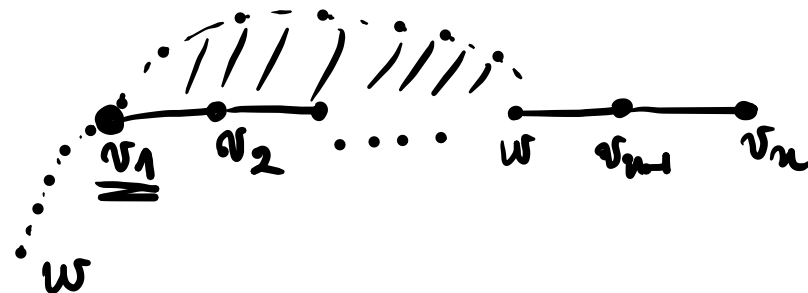
Πρόβ. $G = (V, E)$

Αν $(\forall v \in V) \deg v \geq 2 \Rightarrow \exists$ κύκλος γ G .

Δοκείμ:  $|V| \geq 3$

Υποθέτουμε μείζοντα εlementarismό αλυσίδας γ G .

$v_1 v_2 \dots v_n$ $n \geq 2$



v_1 αρχή κλειστού $\deg v_1 \geq 2$

$\Rightarrow \exists$ δάρσιον δεύτερο ακέραιον w κλειστού v_1 , $w \neq v_2$

1° ακό $w \notin \{v_2, \dots, v_n\} \rightarrow w v_1 v_2 \dots v_n$ συνεχόμενος αλυσίδας γ

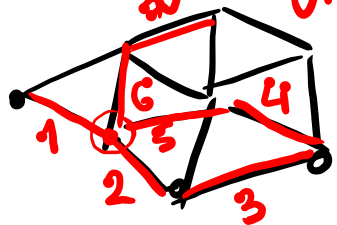
2° $w \in \{v_2, \dots, v_n\}$

$w = v_i$, $i \geq 3$



$\Leftarrow \exists$ κύκλος γ $\square$

- Уникурсалност -



1-7 уникурсални ланци

деф $G=(V,E)$ G је уникурсалан ако $\exists$ уникурсални ланци који садржи све ивице графа G , и сва ивица графа G .

" G се може нацртати у 1 повезу" $\rightarrow G$ повезан.

Лема $G=(V,E)$ повезан граф

$(\forall v \in V) 2 | \deg v$ $\Rightarrow G$ је уникурсалан и за $\forall v \in V$ постоји уникурсалан л. који покрива $G \setminus \{v\}$ и који почиње и завршава се у v . $v \dots \dots v$

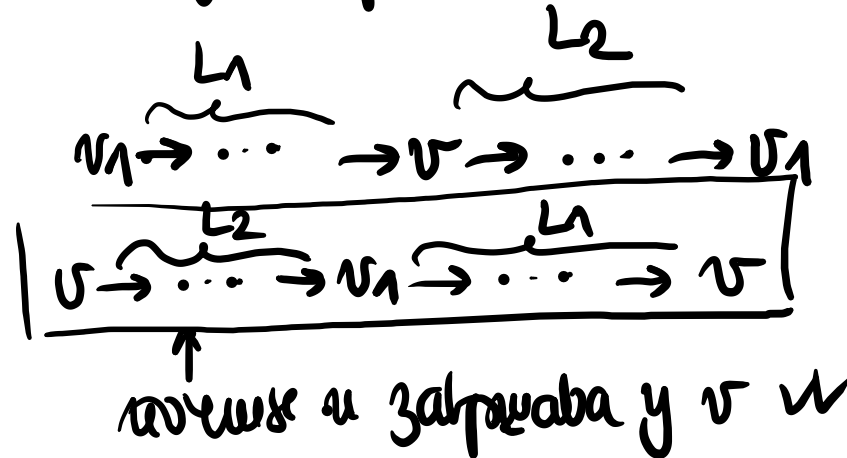
Доказ: G је повезан јер је уникурсалан л. који покрива G .

ако $\exists 1: v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_1$

$v \in V$ произв.

$\exists i: v_i = v$

$\Rightarrow$



Индукција по $|E|$

• $|E|=1$: $\overline{1x1}$ 

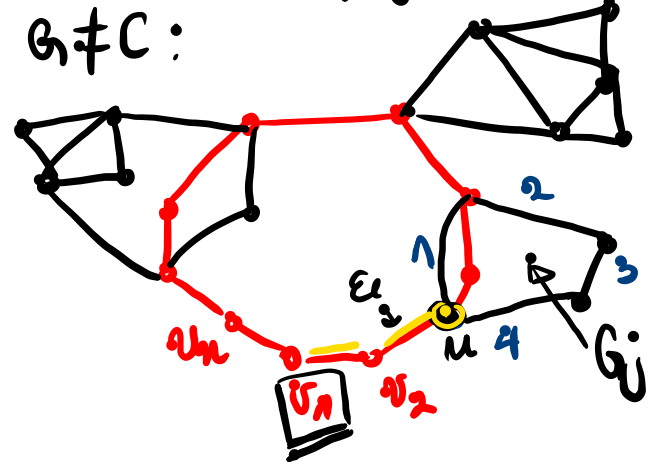
$\boxed{IX}$ Треба ли да употребиме бајки за да докажеме нешто со чини и контрадиктор, коју имаме само од $|E|$ а не од $|V|$

Докажуваме за $G=(V,E)$ $|E| \geq 2$.

лема $\exists$ контура $\underline{C}$: $v_1 \xrightarrow{e_1} v_2 \xrightarrow{e_2} \dots \rightarrow v_n \xrightarrow{e_n} v_1$ у G

$\textcircled{!!} (\forall v \in V) 2 \mid \deg v$
 G поврзан $\Rightarrow \deg v \neq 0$
 $(\forall v \in V) \deg v \geq 2$

Ако $G=C \rightarrow$ крај на



"друга контура C "

$G'=(V',E') : V'=V \setminus \{v_i \mid i=1, \dots, n\}, \deg_G v_i=2$
 $E'=E \setminus \{e_1, \dots, e_n\}$

$G' \leftarrow$ компоненти индуцирани $G_j=(V_j, E_j) \ j \geq 1 \ j \leq k$
 $\deg_{G'} v \leq \deg_G v \rightarrow$ сепак чакот е добро паран
 $\deg_{G'} v \leq \deg_G v - 2$

$\Rightarrow G_j \leftarrow$ може се применуваат инд. хипотеза. $(*)$

• G_j - докажи дека G_j содржи неко од елементите $v_1, v_2, \dots, v_n$

$\underline{v_1}$ - докажи дека постои пат од v_1 до G_j (проб. елемент из G_j)

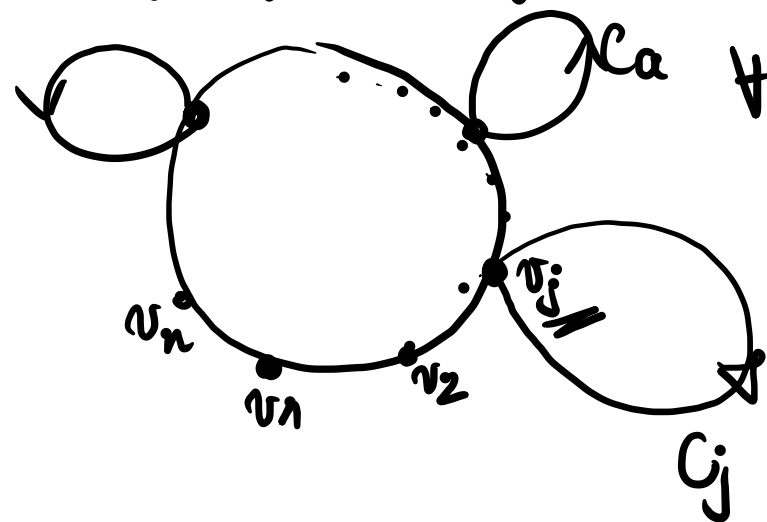
$\underline{v_1} \xrightarrow{a} u \xrightarrow{e_1} \dots \rightarrow u \xrightarrow{e} u \in V_j$

големо докажување $e \in C$
 $u \in C$

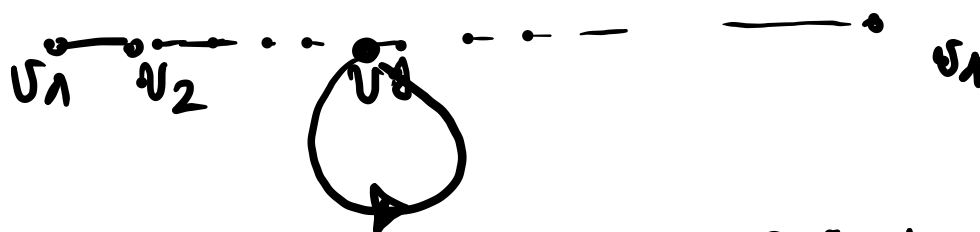
- ако $e \in G_j \rightarrow \exists$ кратен пат $\rightarrow$
- e не е у некои групи G_i и $i \neq j$

$\Rightarrow \boxed{e \in C}$
 $\Rightarrow \boxed{u \in C}$

Фрагмент унцирсантн дгтн за цео G :



Ка $\forall G_j \exists v_i$ које припада G_j и припада C



G_j -унцирсантн дгтн у G_j $\otimes$
који $\exists$ до н.х.

За $\forall j \rightarrow$ унцирсантн дгтн G_j за G_j
зачемено у C код помена v_i

$\leadsto$ унцирсантн дгтн за G . $\checkmark$ $\square$