Деф. $\pi_1(X,x_0)$ – фундаментална група (са $*$) простора X са базном тачком x_0.

Тв. $X=\{*\}$ $\quad \pi_1(*)=0$

Својства фундаменталне групе

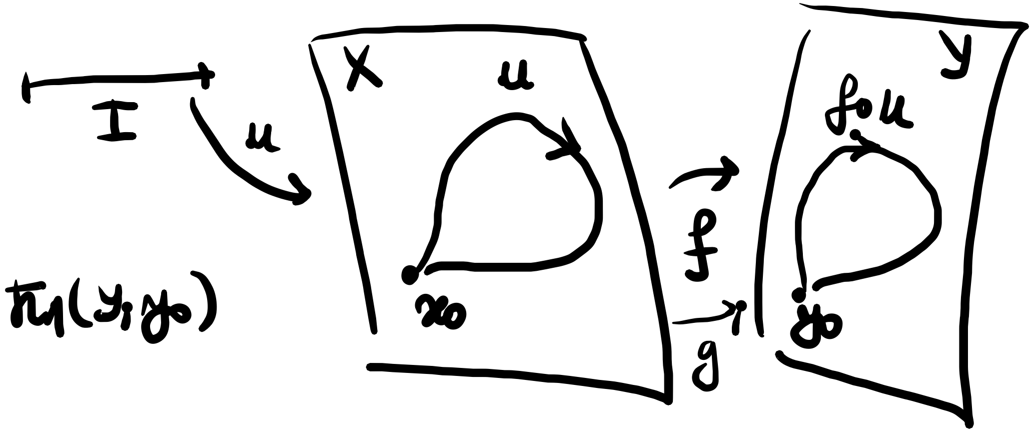
$\pi_1(X,x_0)$ & функције: (X,x_0), (Y,y_0)

непр. $f: X\to Y$ $\quad f(x_0)=y_0$

f индукује $f_*: \pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,y_0)$

$[u]\in\pi_1(X,x_0)$ $\quad u: I\to X$

$f_*[u] := [f\circ u]$



f_* је хомоморфизам група

- $f_*[c_{x_0}]=[c_{y_0}]$
- $f_*([u]*[v]) = f_*[u] * f_*[v]$

- $(1_X)_* = 1_{\pi_1(X,x_0)}$
- $(g\circ f)_* = g_*\circ f_*$
- $\left.\begin{array}{l} f,g: (X,x_0)\to(Y,y_0) \\ f\simeq g \ \mathrm{rel}\{x_0\} \end{array}\right\} \Rightarrow f_*=g_*$

• Занемаривање базне тачке –

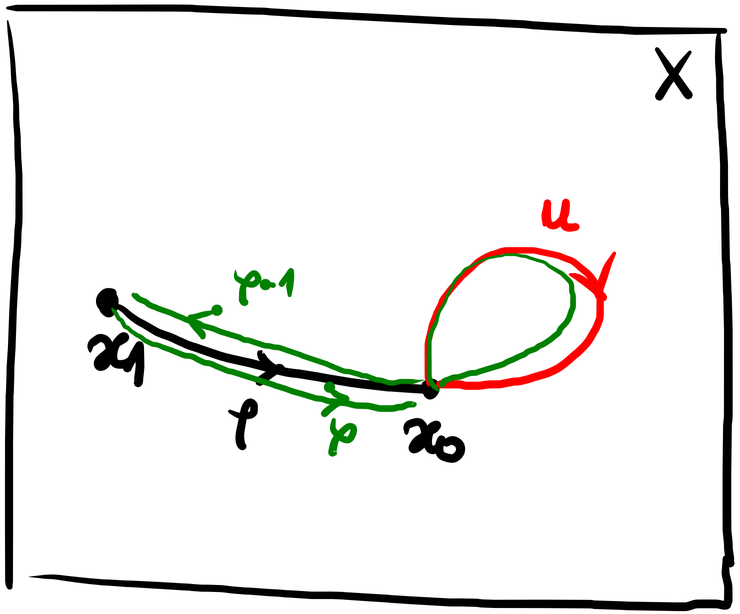
Идеја: $x_0, x_1 \in X$

$\exists$ пут φ од x_1 до x_0

$$[u] \in \pi_1(X, \underline{\underline{x_0}})$$

$$\Big\downarrow \beta_\varphi$$

$$[\varphi \cdot u \cdot \varphi^{-1}] \in \pi_1(X, \underline{\underline{x_1}})$$



Теорема: β_φ је изоморфизам група.

Последица: X путно повезан $\Rightarrow (\forall x_0, x_1 \in X)\ \pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$

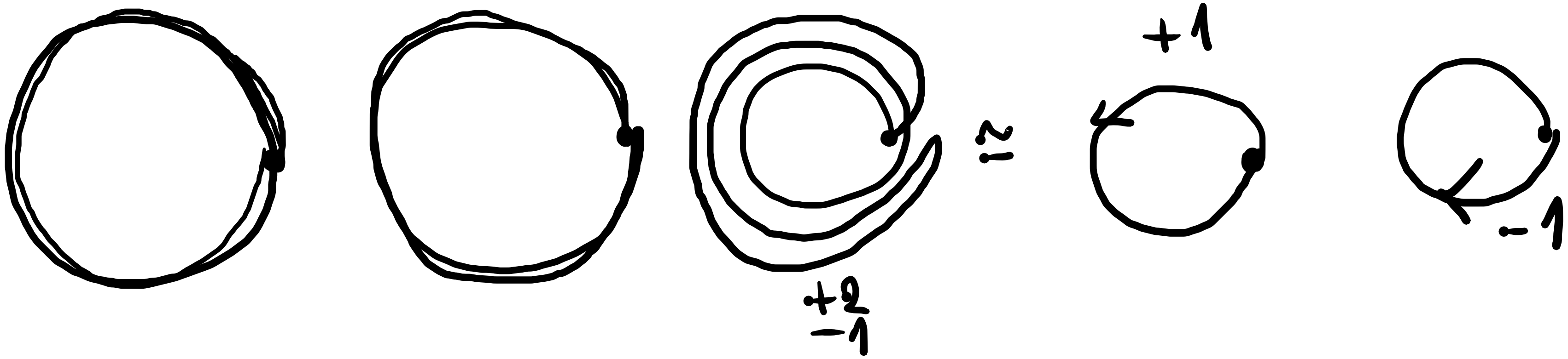
$\rightsquigarrow$ Говоримо само о $\pi_1(X)$ ФУНДАМЕНТАЛНА ГРУПА ПРОСТОРА X

Теорема $f: X \to Y$ хомотопска еквиваленција $\{X \simeq Y\}$

$\Rightarrow f_*: \pi_1(X,x) \to \pi_1(Y,f(x))$ изоморфизам $\forall x \in X$ $\Rightarrow \boxed{\pi_1(X,x) \cong \pi_1(Y,f(x))}$

* за пут.пов. X и Y: $X \simeq Y \Rightarrow \pi_1(X) \cong \pi_1(Y)$
* $\pi_1(X) \ncong \pi_1(Y) \Rightarrow X \not\simeq Y \Rightarrow X \ncong Y$
* $\left.\begin{array}{l} \mathbb{R}^n \simeq * \\ D^n \simeq * \\ \mathring{D}^n \simeq * \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \pi_1(\mathbb{R}^n) = 0 \\ \pi_1(D^n) = 0 \\ \pi_1(\mathring{D}^n) = 0 \end{array}$

Фундаментална група кружнице



Теорема $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} \cong \pi_1(S^1)$$

$$\uparrow$$

$k \longleftrightarrow [\varphi_k]$ k x навива I на S^1

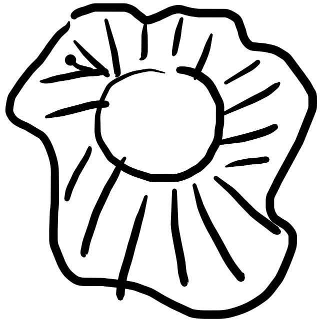
$$\varphi_k : I \longrightarrow S^1 \longrightarrow S^1$$

$$t \mapsto e^{i2\pi t} \longmapsto e^{i2\pi k t}$$

$$z \longmapsto z^k$$

Примери: $X \simeq S^1 \Rightarrow \pi_1(X) \cong \mathbb{Z}$

X:



$\simeq S^1$

$$\pi_1(\underbrace{S^1 \times I}_{\simeq S^1}) \cong \mathbb{Z}$$

Пр. простор није путно повезан?

$\pi_1(X, x_0)$

X:

$\pi_1(X, x_1) \cong 0$

$\pi_1(X, x_2) \cong \mathbb{Z}$

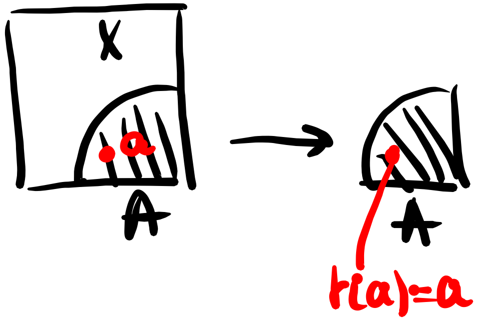
– Брауерова теорема о фиксној тачки –

Ретракти, СФТ –

<u>Деф</u> X – т.п. $A \subset X$

A је РЕТРАКТ простора X ако $\exists$ непр. $r: X \to A$ тд. $(\forall a \in A)\ r(a) = a$ тј. $r|_A = 1_A$

r – ретракција



$r|_A = 1_A$: $i: A \hookrightarrow X$ инклузија

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "r"] & \\ A \arrow[u, "i"] \arrow[r, "1_A"'] & A \end{tikzcd}$$

$r \circ i = 1_A$ троугао комутира

<u>Пр</u>: $a \in X$

$X \xrightarrow{c_a} \{a\}$

ретракција

<u>Пр</u>: $r: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to S^{n-1}$ A

радијална пр.

$r(x) = \frac{x}{|x|}$

$a \in S^{n-1}\ r(a) = \frac{a}{\|a\|} = a$, $\|a\| = 1$

S^{n-1} је ретракт од $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

Пр. $X=[a,b]$

$A=(a,b)$

конт. ↓   није конт. ↓

? $\exists$ ретракција $r: [a,b]\to(a,b)$

↳ непр

↳ НА $(\forall x\in(a,b)\ x=r(x))$

ТЈ

X пов. ТЈ A

* $f: X\to X$

x_0 је фиксна тачка (ФТ) пресликав. f ако $f(x_0)=x_0$

Деф X – тп.п. X има својство фиксне тачке (СФТ) ако $\forall$ непр. $f: X\to X$ има фиксну тачку $(\forall f: X\to X$ непр. $\exists x_0\in X\ f(x_0)=x_0)$

Пр. $\{x_0\}$ има СФТ

Пр. $\mathbb{R}^2$ нема СФТ $(\mathbb{R}^n, n\in\mathbb{N})$

$\tau: x\mapsto x+v$

↑ τ_v

транслација $v\neq 0$

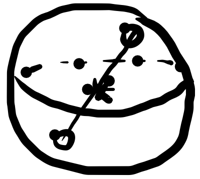
Пр. S^n $a_{S^n}: x\mapsto -x$

антиподално

непр ✓

нема ФТ

S^n нема СФТ.



$\mathbb{R}^n \simeq *$ $\Rightarrow$ СФТ није хомотопска инваријанта

нема сфт   има сфт

Али: **Став** СФТ је тополошка инваријанта.

Доказ: $X \approx Y$ $\underline{\underline{?\,Y}}$ $f: Y \to Y$ непр.

(X има сфт)

$h: X \xrightarrow{\approx} Y$ хомеоморфизам

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] & Y \arrow[d, "h^{-1}", "\approx"'] \\ X \arrow[u, "h", "\approx"'] & X \end{tikzcd}$$

$h^{-1} \circ f \circ h : X \to X$ непр. $\overset{X \text{ сфт}}{\Longrightarrow}$ $(\exists x_0 \in X)$ $h^{-1} \circ f \circ h(x_0) = x_0 \quad / h$

$\Rightarrow f \circ h(x_0) = h(x_0)$ $f(\underline{h(x_0)}) = \underline{h(x_0)}$

$h(x_0)$ је фт. за f $\Rightarrow Y$ има сфт ✓ □

Став X - има сфт, A - ретракт од X $\Big\}$ $\Rightarrow A$ има СФТ.

Доказ: $r: X \to A$ ретракција $f: A \to A$ непр.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dr, "r"] & \\ A \arrow[ur, "i"] \arrow[rr, "1_A"'] & & A \end{tikzcd}$$

$r \circ i = 1_A$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & A \arrow[d, "i"] \\ X \arrow[u, "r"] & X \end{tikzcd}$$

Тада: $i \circ f \circ r : X \to X$ непр.

X има сфт $\Rightarrow \exists x_0 \in X$

$i \circ f \circ r(x_0) = x_0$

$i(\underset{\in A}{\sim\sim}) = x_0 \Rightarrow \underline{f \circ r(x_0) = x_0}$ и $x_0 \in A$ ↗ $\underline{r(x_0) = x_0}$

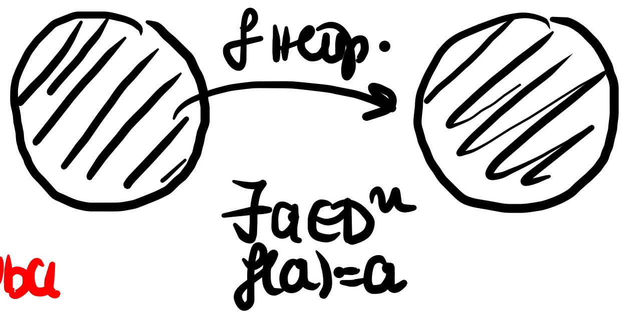
$\Rightarrow f(x_0) = x_0,\ x_0 \in A$

$\Rightarrow A$ има сфт □

Последица: $A \subset X \Rightarrow A$ није ретракт од X.

нема СФТ (под A)   има СФТ (под X)

— Брауерова теорема —



Теорема $\forall n \in \mathbb{N}$ D^n има СФТ.

Теорема $n \in \mathbb{N}$. Еквивалентне су тврђења

(1) D^n има СФТ

(2) S^{n-1} није ретракт D^n

(3) S^{n-1} није контрактибилна.

Доказ: (1)$\Rightarrow$(2)

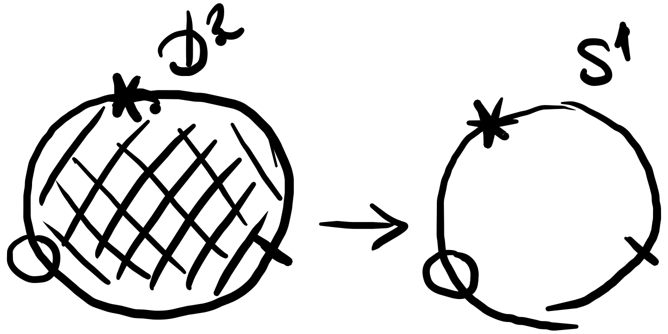
D^n има СФТ

ппс. S^{n-1} ретракт D^n

$\Rightarrow$ S^{n-1} има СФТ

↯ јер $a_{S^{n-1}} : S^{n-1} \to S^{n-1}$ нема ФТ

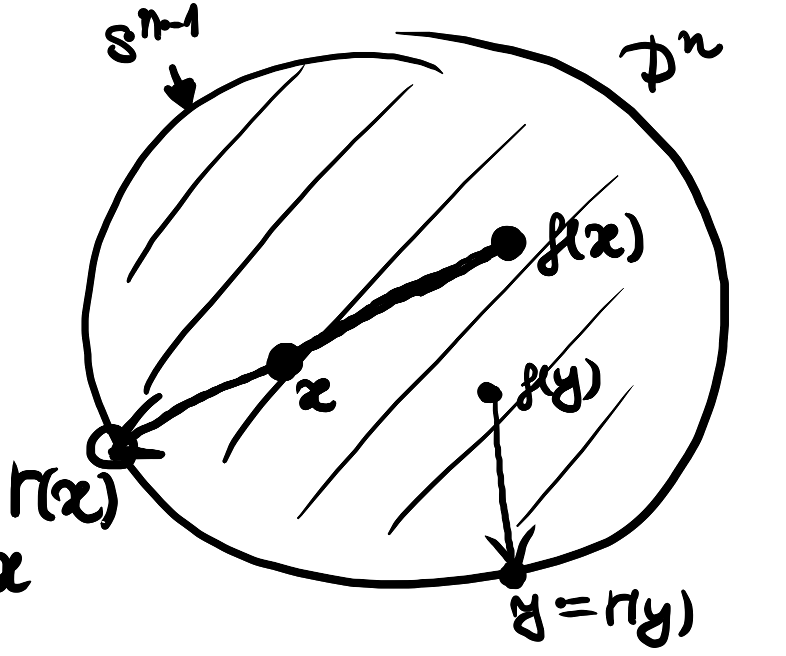
$\Rightarrow$ S^{n-1} није ретракт D^n



(2) $\Rightarrow$ (1)   (S^{n-1} није ретр. D^n $\Rightarrow$ D^n има СФТ) (?)

$\Longleftrightarrow$

(D^n нема СФТ $\Rightarrow$ S^{n-1} ретракт D^n) (*)



ПП. D^n нема СФТ

$\exists f : D^n \to D^n$ непр. нема ФТ ; $(\forall x \in D^n)\ f(x) \neq x$

добро деф. !

Дефинишимо:

$r : D^n \to S^{n-1}$

$x \in D^n \to$ полуправа из $f(x)$ која садржи x
p_x

$r(x) :=$ пресечна тачка полуправе p_x и S^{n-1}, различита од $f(x)$

r-непрекидно? ✓✓ $r(x) = f(x) + t \cdot (x - f(x))$, $t > 0$

$\|r(x)\| = 1$ $\langle r(x), r(x) \rangle = 1$ $\rightsquigarrow$ кв. једн. по t

r-ретракција : $x \in S^{n-1}$ $r(x) = x$ ✓

$\Rightarrow$ S^{n-1} ретракт D^n

$\Rightarrow$ важи (*) $\Rightarrow$ закључак (2) $\Rightarrow$ (1)

(2) $\Leftrightarrow$ (3): показујемо $\neg(2) \Leftrightarrow \neg(3)$

$\neg(2) \Leftrightarrow S^{n-1}$ ретракт D^n

$\Leftrightarrow \exists$ непр. $r: D^n \to S^{n-1}$ тд $r|_{S^{n-1}} = 1_{S^{n-1}}$

$\Leftrightarrow 1_{S^{n-1}}$ се може проширити на D^n

став од пре

$\Leftrightarrow 1_{S^{n-1}} \simeq const$

став од пре

$\Leftrightarrow S^{n-1} \simeq *$

$\Leftrightarrow \neg(3)$ □

Брауерова теорема за $n=1$

D^1 има СФТ $\Leftrightarrow S^0 \not\simeq * \Leftrightarrow$ (T)

није повезан
пуно свр

став $X \simeq * \Rightarrow X$ путно повезан.

Брауерова теорема за $n=2$

D^2 има СФТ $\Leftrightarrow S^1 \not\simeq * \Leftrightarrow$ (T)

$\pi_1(S^1) = \mathbb{Z} \neq \pi_1(*) = 0$

☺ D^n има СФТ

$\Leftrightarrow S^{n-1} \not\simeq *$

$\pi_{n-1}(S^{n-1}) = \mathbb{Z}$

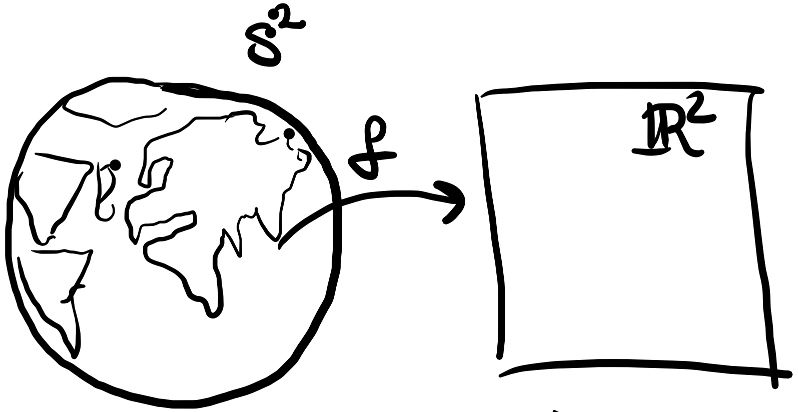
~~ш~~ $\neq$ $\pi_{n-1}(*) = 0$

СФТ:

СФТ

-Борсук-Уламова теорема-

Теорема (БУТ) $n \in \mathbb{N}$ $f: S^n \to \mathbb{R}^n$ непр.
$\Rightarrow (\exists x_0 \in S^n)\ f(x_0) = f(-x_0)$



$f(x) := (T(x), p(x))$

$\Rightarrow \exists x_0 \quad f(x_0) = f(-x_0)$

$T(x_0) = T(-x_0)$

$p(x_0) = p(-x_0)$

Теорема Еквивалентни су: $(n \in \mathbb{N})$

(1) БУТ: $f: S^n \to \mathbb{R}^n$ непр. $\Rightarrow (\exists x_0 \in S^n)\ f(x_0) = f(-x_0)$

(2) Не постоји непрекидно и непарно пресл. $g: S^n \to S^{n-1}$

g непарно: $(\forall x \in S^n)$ $g(-x) = -g(x)$

Доказ:

$(1) \Rightarrow (2)$: ППС. $\exists$ непрекидно непарно $g: S^n \to S^{n-1}$

$f: S^n \xrightarrow{g} S^{n-1} \xhookrightarrow{i} \mathbb{R}^n$ $\quad f = i \circ g$ непр. из S^n у $\mathbb{R}^n$

БУТ $(\exists x_0 \in S^n)$ $f(x_0) = f(-x_0)$ $\quad i \circ g(x_0) = i \circ g(-x_0)$

$g(x_0) = g(-x_0) = -g(x_0) \Rightarrow g(x_0) = 0 \notin S^{n-1}$

$\lightning$

$(2) \Rightarrow (1)$: ППС БУТ не важи

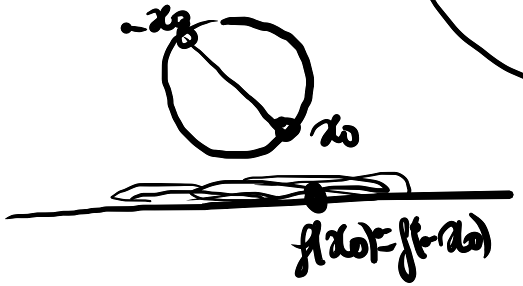
$\exists f: S^n \to \mathbb{R}^n$ непрекидно тд. $\forall x \in S^n$ $f(x) \neq f(-x)$

Посматрамо: $g: S^n \to S^{n-1}$ $\quad g(x) := \dfrac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}$ добро деф ✓ $\in S^{n-1}$ ✓

g непрекидно ✓

$g(-x) = -g(x)$ непарно $\lightning$ са (2) $\square$

$\boxed{\text{БУТ за } n=1}$ $f: S^1 \to \mathbb{R}$ непр. $\Rightarrow (\exists x_0 \in S^1)\ f(x_0) = f(-x_0)$



$\Leftrightarrow$ $\neg\exists$ непр. непарно $g: S^1 \to S^0$

доказ: ППС $\exists g: S^1 \to S^0$ непр. непарно

$x \in S^1$ $\quad g(-x) = -g(x)$ $\quad \{g(-x), g(x)\} = S^0$

$\Rightarrow$ g је НА

НА, непр. $S^1 \to S^0$ $\quad$ ↯

S^1: путно пов. $\quad$ S^0: није путно пов.

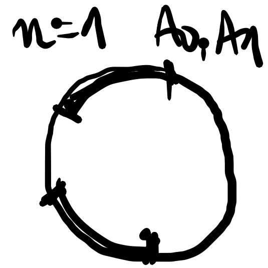
$\square$

Теорема (Lusternik-Schnirelmann)

$S^n = A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_n$, $A_i \in \mathcal{F}_{S^n}$, $\forall i = 0,1,\dots,n$

тада бар један од ових скупова садржи пар антиподалних тачака,

тј. $\exists i \in \{0,1,\dots,n\}$ тд. $\operatorname{diam} A_i = 2$.



Доказ: Дефинишемо $f: S^n \to \mathbb{R}^n$

$f(x) := (d(x,A_1),\dots,d(x,A_n))$ непр ✓

БУТ $\Rightarrow (\exists \tilde{x} \in S^n)\ f(\tilde{x}) = f(-\tilde{x})$

$\tilde{x}$ мора припадати неком A_i

- ако $\exists i \in \{1,\dots,n\}$ $\tilde{x} \in A_i$

  $f(\tilde{x}) = f(-\tilde{x})$

  $\underbrace{d(\tilde{x}, A_i)}_{0} = d(-\tilde{x}, A_i) \Rightarrow 0 = d(-\tilde{x}, \underset{\text{затв.}}{A_i})$

  $\Rightarrow -\tilde{x} \in A_i$

  $\Rightarrow \tilde{x}, -\tilde{x} \in A_i$ ✓

- $\tilde{x} \notin \underset{\text{затворени}}{A_1 \cup \dots \cup A_n} \Rightarrow \tilde{x} \in A_0$

  $\Downarrow$

  $d(\tilde{x},A_1)>0,\dots, d(\tilde{x},A_n)>0$

  $d(-\tilde{x},A_1)>0,\dots, d(-\tilde{x},A_n)>0$

  $\Rightarrow -\tilde{x} \notin A_1 \cup \dots \cup A_n \underset{\text{покривач}}{\Rightarrow} -\tilde{x} \in A_0$ □

$\operatorname{diam} A_0 = 2$ ✓