~ Теореме о непокретној тачки ~

Подсетимо се неколико основних ствари из теорије:

- кажемо да X има **својство фиксне тачке (СФТ)** ако свако непрекидно пресликавање $f: X \to X$ има фиксну тачку.

$\boxed{\text{Брауерова теорема}}$ n-дим диск: $D^n = \{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid \|x\| \le 1\}$

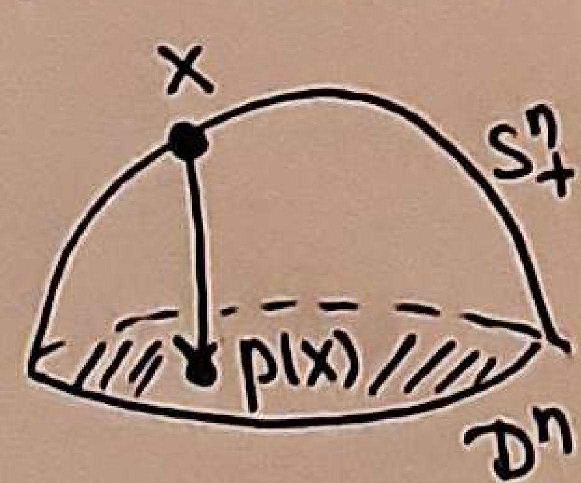
D^n има СФТ.

Поред дискова, простори који се могу непрекидно деформисати до D^n, бијективно и са непрекидним инверзним пресликавањем, такође имају СФТ. Формално дефинишемо на следећи начин:

- $h: X \to Y$ је **хомеоморфизам** ако је h непрекидно, бијекција и h^{-1} непрекидно.
ако постоји хомеоморфизам из X у Y (онда постоји h^{-1} из Y у X :))
кажемо да су X и Y **хомеоморфни**, и пишемо $\boxed{X \approx Y}$

- лако се проверава да је $\approx$ релација еквиваленције.

- Пример: полусфера $S^n_+ = \{(x_1,\dots,x_n,x_{n+1})\in S^n \mid x_{n+1}\ge 0\}$ и D^n су хомеоморфни:



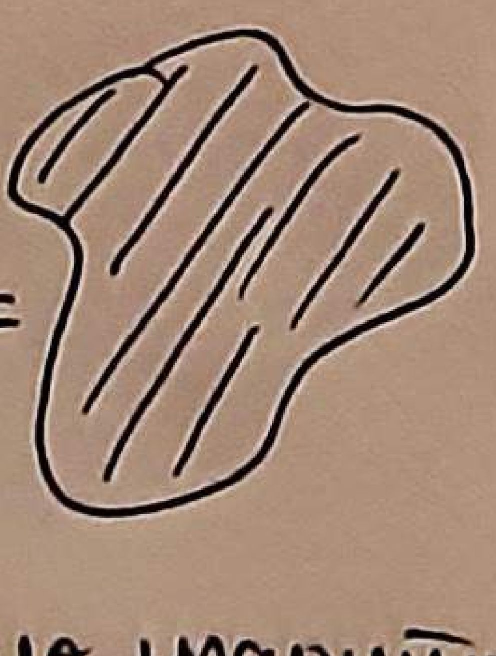
хомеоморфизам: $p: S^n_+ \to D^n$ пројекција

$p(x_1,\dots,x_n,x_{n+1}) = (x_1,\dots,x_n)$

инверзно: $p^{-1}(x_1,\dots,x_n) := (x_1,\dots,x_n,\sqrt{1-x_1^2-\dots-x_n^2}) \in S^n_+$

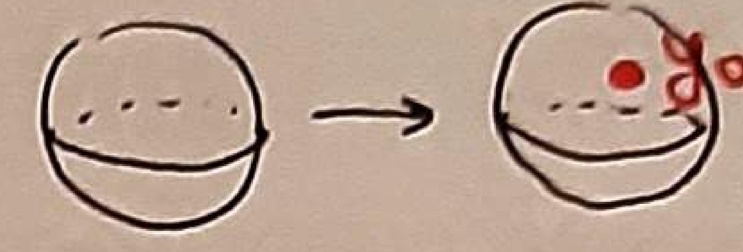
- Хомеоморфизам чува СФТ, тј. ако X има СФТ и $X \approx Y$ тада и Y има СФТ.

- Дакле, ако $\boxed{X \approx D^n \Rightarrow X \text{ има СФТ}}$

$X =$  $\approx D^2 \Rightarrow$ има СФТ.

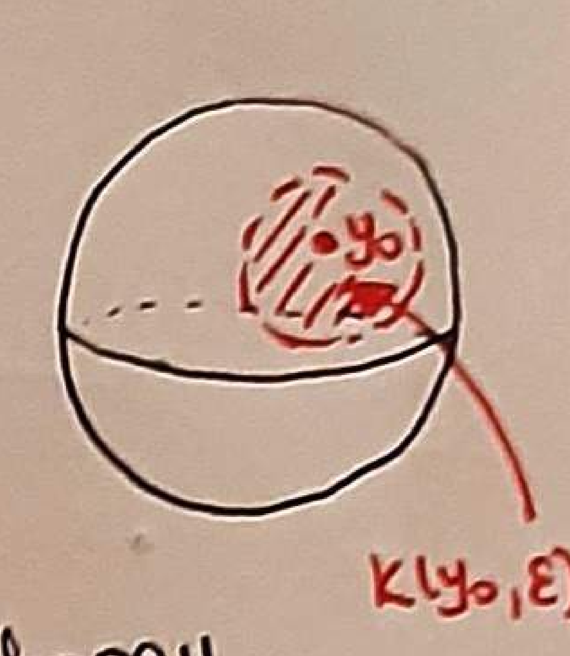
Сада ћемо урадити задатке на крају главе.

1 Нека је $f: S^n \to S^n$ непрекидно пресликавање које није НА. Доказати да f има фиксну тачку



f није НА $\Rightarrow$ $\exists\, y_0 \in S^n$ тако да $y_0 \notin f(S^n)$.

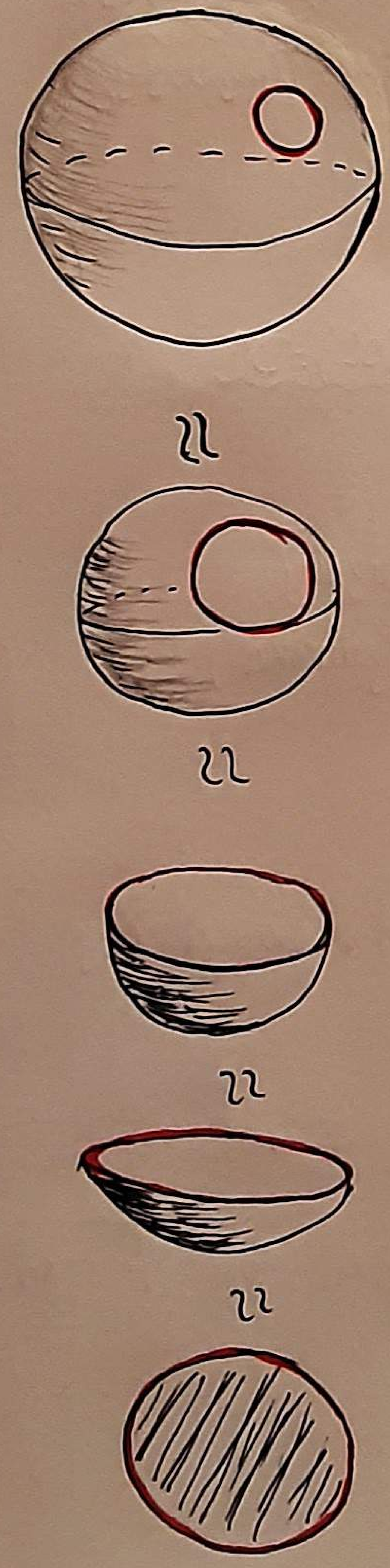
Докажимо да осим тачке y_0, постоји цела околина око y_0 у коју се ништа не пресликава.



f непрекидно, S^n компактан $\Rightarrow$ $f(S^n)$ је компактан подскуп S^n па је затворен скуп у S^n

$\Rightarrow$ његов комплемент $S^n \setminus f(S^n)$ је отворен

$y_0 \in S^n \setminus f(S^n) \xRightarrow{\text{отв.}} \exists$ околина око y_0 у $S^n \setminus f(S^n)$ тј. нека отворена кугла $K(y_0,\varepsilon)$



$\Rightarrow$ $f(S^n)$ је садржано у $\underbrace{S^n \setminus K(y_0,\varepsilon)}$

кад са сфере исечемо мали отворен круг (диск) шта остане?

$\boxed{S^n \setminus K(y_0,\varepsilon) \approx D^n}$ – хомеоморфно диску!

како примећујемо овај хомеоморфизам?
„ширимо отвор који је настаје избацивањем малог отвореног диска, и исправљамо"
← као на слици (интуитивно приказано)

Дакле, можемо посматрати мањи кодомен:

$$f: S^n \to S^n \setminus K(y_0,\varepsilon)$$

а затим посматрајмо и мањи, исти домен:

$$f: S^n \setminus K(y_0,\varepsilon) \to S^n \setminus K(y_0,\varepsilon)$$

$S^n \setminus K(y_0,\varepsilon) \approx D^n \xRightarrow{\text{Брауерова т.}}$ има својство фиксне тачке

$\Rightarrow \exists\, x_0 \in S^n \setminus K(y_0,\varepsilon)$

$\boxed{f(x_0) = x_0}$ што смо тражили □

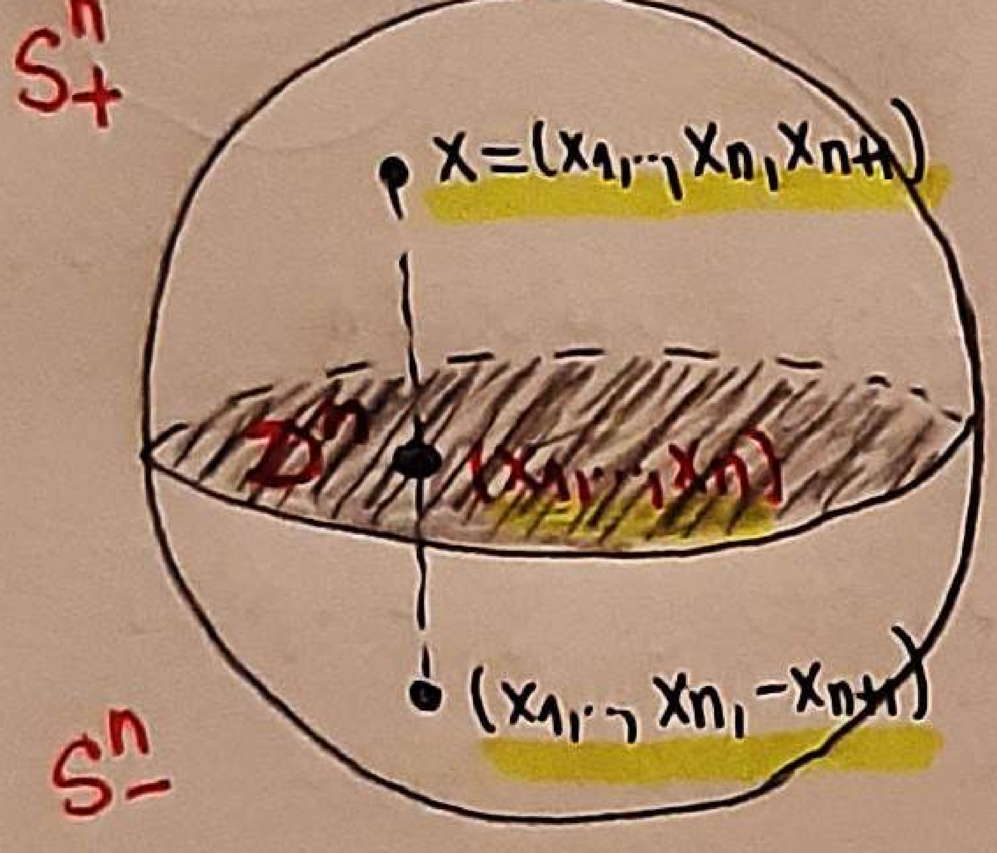
[2] Нека је f непрекидно пресликавање горње полусфере S^n_+ у доњу полусферу S^n_-

($S^n_+ = \{(x_1,\dots,x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} \geq 0$

$S^n_- = \{$ − || − $\mid x_{n+1} \leq 0\}$)

Доказати да постоји тачка $\tilde{x}=(\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_{n+1}) \in S^n_+$ тако да важи

$f(\tilde{x}) = (\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_n,-\tilde{x}_{n+1})$ (истих првих n, супротна последња координата)



(!!) У задатку желимо да нађемо тачку $\tilde{x}$ тако да је $f(\tilde{x})$ њена рефлексија у односу на D^n.

Посматрајмо диск D^n (јединични)

$$D^n = \{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid x_1^2+\dots+x_n^2 \leq 1\}$$

Он је тачно пројекција сваке од полусфера на $\mathbb{R}^n$: ако са p означимо пројекцију

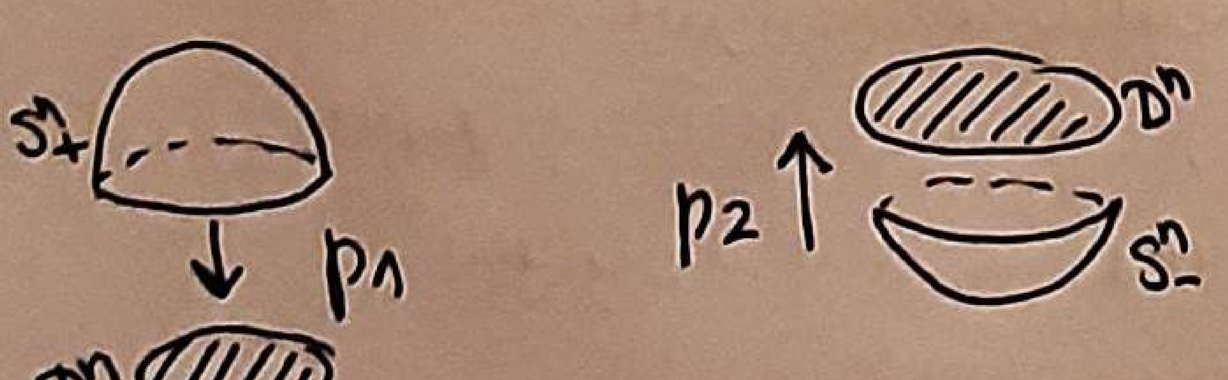
$p:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}^n$

$p(x_1,\dots,x_n,x_{n+1}) = (x_1,\dots,x_n)$,

онда важи $p(S^n_+)=D^n$ и $p(S^n_-)=D^n$

Приметимо да су рестрикције ове пројекције:

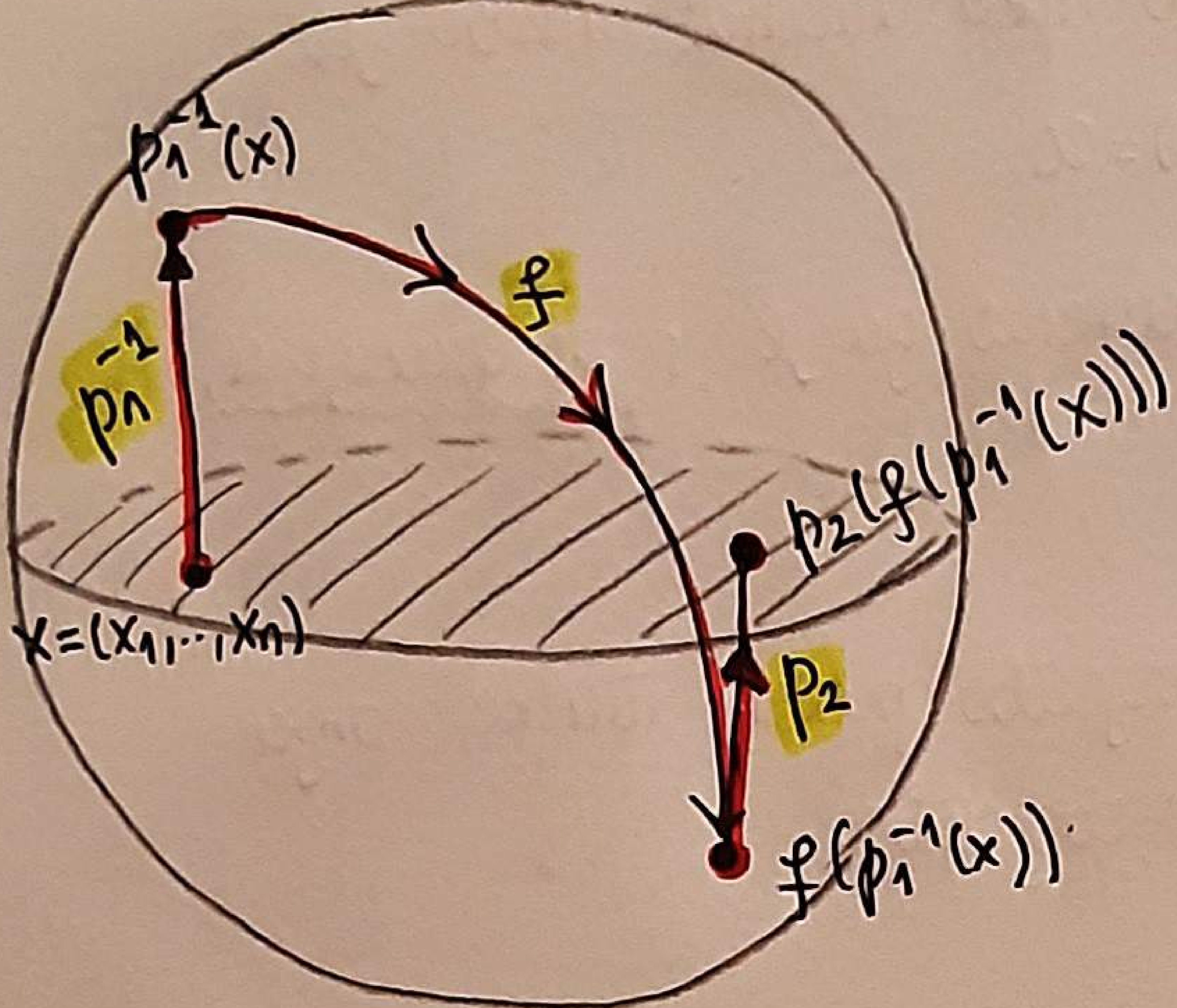
$p_1: S^n_+\to D^n$, $p_2: S^n_-\to D^n$ заправо и хомеоморфизми (као у дискусији пре задатака.)



У циљу налажења тачке $\tilde{x}$ чија је слика $f(\tilde{x})$ заправо рефлексија $\tilde{x}$ у односу на диск D^n, конструишимо следеће пресликавање:

$$p_2\circ f\circ p_1^{-1}: D^n\to D^n \quad \text{тј.} \quad D^n \xrightarrow{p_1^{-1}} S^n_+ \xrightarrow{f} S^n_- \xrightarrow{p_2} D^n$$

- p_1^{-1} – инверзно p_1, тачки $(x_1,\dots,x_n)\in D^n \longmapsto p_1^{-1}(x_1,\dots,x_n) = (x_1,\dots,x_n,\sqrt{1-x_1^2-\dots-x_n^2})$
- Затим пресликамо са $f: S^n_+\to S^n_-$
- затим пројектујемо са $p_2: S^n_-\to D^n$



$p_2\circ f\circ p_1^{-1}$ је непрекидно

D^n има својство фиксне тачке

Брауер $\Longrightarrow$ $\exists\, \bar{x}=(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n)\in D^n$

тако да:

$$p_2\circ f\circ p_1^{-1}(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n)=(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n)$$

тј.

$$p_2\circ f(\underbrace{\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n,\sqrt{1-\bar{x}_1^2-\dots-\bar{x}_n^2}}_{\text{означимо са } \tilde{x}})=(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n)$$

хомеоморфизам па можемо узети p_2^{-1}

p_2^{-1}

$$\underbrace{p_2^{-1}\circ p_2}_{1}\circ f(\tilde{x})=\underbrace{p_2^{-1}(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n)}_{\text{приметимо да је то тачно } (\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n,-\sqrt{1-\bar{x}_1^2-\dots-\bar{x}_n^2})}$$

$$\Rightarrow\ f(\underbrace{\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n,\sqrt{1-\bar{x}_1^2-\dots-\bar{x}_n^2}}_{\tilde{x}\text{ је тачно тражена тачка}})=(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n,-\sqrt{-\,\|\,-})$$

$\checkmark$ $\square$

3. Ако је $A \subset X$ и $r: X \to A$ непрекидно пресликавање такво да за свако $x \in A$ важи $r(x) = x$

(r „фиксира" све тачке из A), кажемо да је r ретракција, а A ретракт од X.

Доказати да ако простор X има својство фиксне тачке, онда и сваки његов ретракт има то својство.

X – има СФТ

A – ретракт од X, $r: X \to A$

Узмимо произвољно непрекидно пресликавање $f: A \to A$ и докажимо да оно има фиксну тачку

Посматрајмо композицију

$$i \circ f \circ r : \quad X \xrightarrow{r} A \xrightarrow{f} A \xhookrightarrow{i} X$$

где је $i: A \hookrightarrow X$ инклузија, $i(a) = a$, $\forall a \in A$.

$i \circ f \circ r : X \to X$ непрекидно, X има СФТ $\Rightarrow \exists \tilde{x} \in X$ тако да $i \circ f \circ r(\tilde{x}) = \tilde{x}$

$i \circ f \circ r(\tilde{x}) = \tilde{x} \to \tilde{x}$ је у кодомену пресликавања i, а знамо да $i(A) = A$

$\Rightarrow \boxed{\tilde{x} \in A}$ (1)

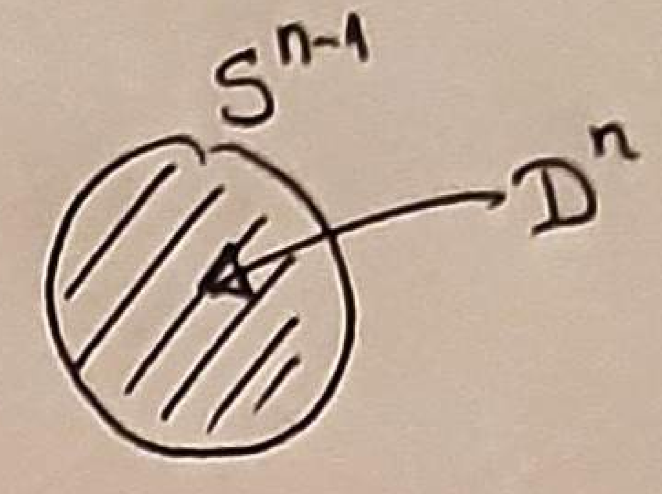
$\Rightarrow$ пошто је r ретракција, $r(\tilde{x}) = \tilde{x}$

$\Rightarrow i \circ \underbrace{f(\tilde{x})}_{\in A} = \tilde{x}$, па $i(f(\tilde{x})) = f(\tilde{x})$

$\Rightarrow \boxed{f(\tilde{x}) = \tilde{x}}$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow$ f има фиксну тачку $\overset{\forall f}{\Rightarrow}$ A има СФТ. $\square$

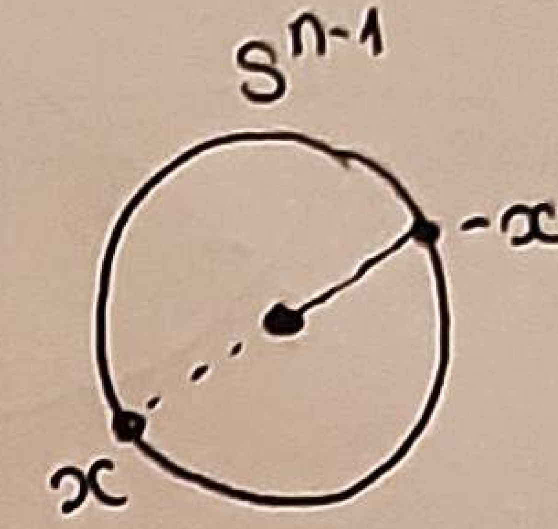
$\boxed{4}$ Доказати да сфера S^{n-1} није ретракт лопте D^n.



Претпоставимо супротно, да S^{n-1} јесте ретракт D^n

Брауерова т. $\Rightarrow$ D^n има СФТ

задатак $\boxed{3}$, S^{n-1} ретракт D^n $\Rightarrow$ S^{n-1} има СФТ.



Међутим, антиподално пресликавање $a: S^{n-1} \to S^{n-1}$

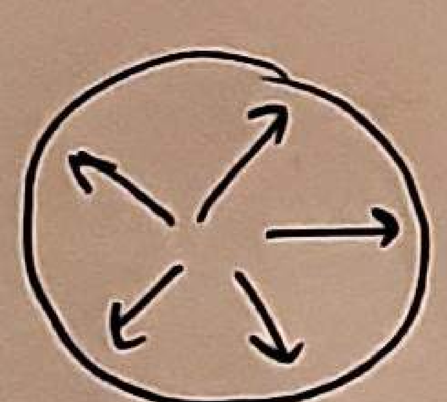
$a(x) = -x$

је непрекидно, а нема фиксну тачку,

што је контрадикција ↯

$\Rightarrow$ S^{n-1} није ретракт од D^n. □

(Заиста, примећујемо да никако не можемо непрекидно усмерити тачке диска где да се сликају на кружницу, тако да све тачке на кружници стоје)

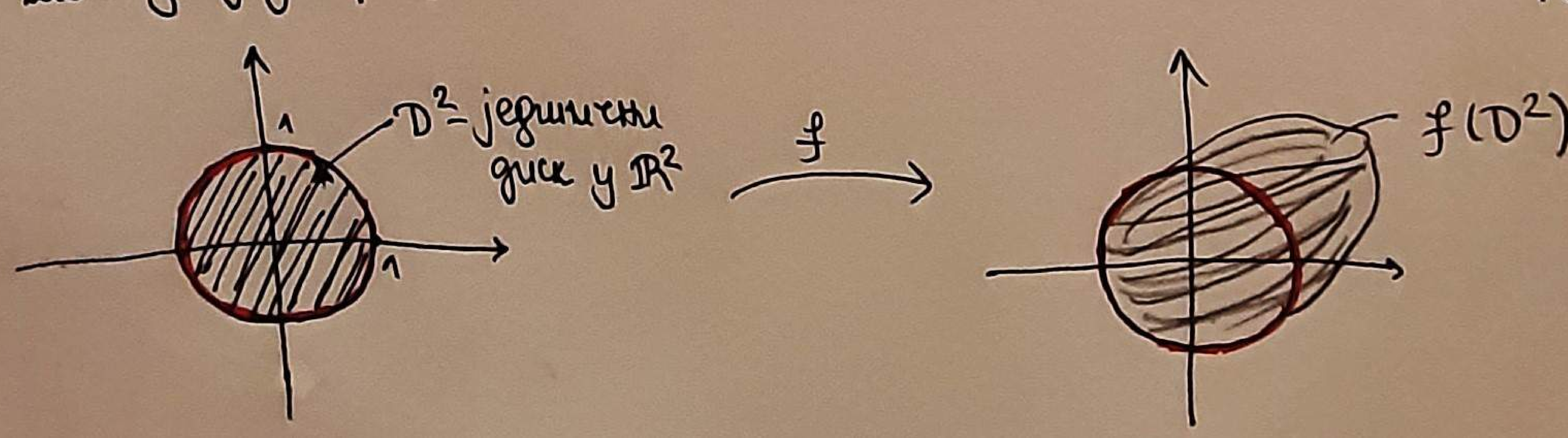


$\boxed{5}$ Нека је $f: D^2 \to \mathbb{R}^2$ непрекидно пресликавање такво да за свако $x \in S^1$ важи $f(x) = x$.

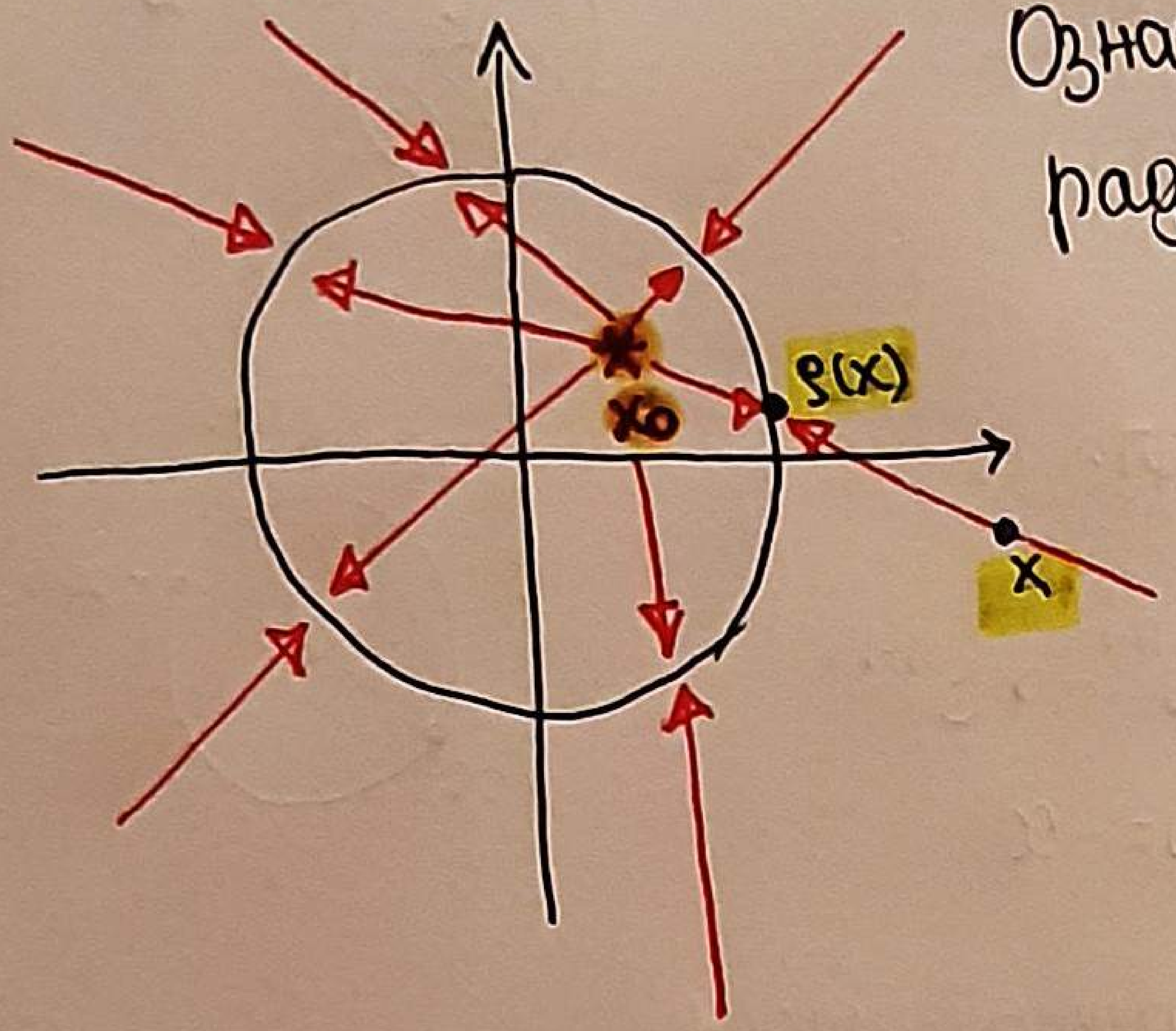
Доказати да важи: $D^2 \subset f(D^2)$

Дакле, фиксирали смо сваку тачку кружнице на „свом месту",
а остале непрекидно пресликали у $\mathbb{R}^2$.

Желимо да докажемо да је цео диск у слици, тј. да се и у сваку тачку унутар диска нешто пресликава (не може „настати рупа" :))



Претпоставимо супротно, да постоји x_0 у унутрашњости D^2 тако да $x_0 \notin f(D^2)$.



Означимо са $\rho : \mathbb{R}^2 \setminus \{x_0\} \to S^1$ радијалну пројекцију са центром у x_0, на S^1:

за сваку тачку $x \neq x_0$

$\rho(x) :=$ пресек полуправе из x_0 ка x са кружницом.

Приметимо да ако $x \in S^1$ онда је $\rho(x) = x$. (1)

Посматрајмо сада композицију: $D^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \setminus \{x_0\} \xrightarrow{\rho} S^1$

(можемо смањити кодомен јер $x_0 \notin f(D^2)$)

$\rho \circ f : D^2 \to S^1$ непрекидно

за $x \in S^1$: $\rho \circ \underbrace{f(x)}_{=x} = \rho(x) \overset{(1)}{=} x$

$\rho \circ f(x) = x$

$\Rightarrow$ $\rho \circ f$ је ретракција D^2 на S^1

што није могуће према задатку $\boxed{4}$ ↯

не постоји x_0 $\Rightarrow$ $\boxed{D^2 \subset f(D^2)}$ □