~ Глава 3: Фамилије конвексних скупова ~

Подсетимо се теорије:

На фамилији непразних компактних скупова у $\mathbb{R}^n$ правимо структуру метричког простора на следећи начин:

$A, B \subset \mathbb{R}^n$ компактни непразни

$$e(A,B)=\sup_{x\in A} d(x,B)$$

$$D(A,B)=\max\{e(A,B), e(B,A)\}$$

што погоднији (често) је следећи опис:

$\boxed{\text{Тврђење 2}}$ Важи:

$$e(A,B)=\min\{r>0 \mid A\subset B+K[0,r]\}$$

$$D(A,B)=\min\{r>0 \mid A\subset B+K[0,r],\ B\subset A+K[0,r]\}.$$

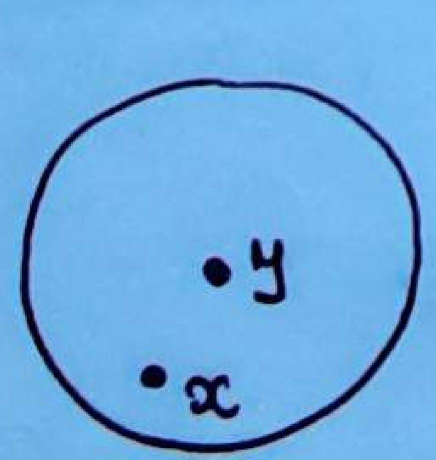
овако можемо геометријски видети колико је $D(A,B)$
тражимо то минимално r које даје „проширење" B тако да обухвати A
и „проширење" A тако да обухвати B.

Такође, у књизи смо показали да је ово D једна метрика на простору непразних компактних скупова у $\mathbb{R}^n$; назива се Хаусдорфова метрика.

$\boxed{\text{Пример 1}}$ Одредити Хаусдорфову удаљеност између тачке x и лопте $K[y,s]$.

Можемо разматрати две могућности - када $x\in K[y,s]$ или $x\notin K[y,s]$.

(1) $x\in K[y,s]$:



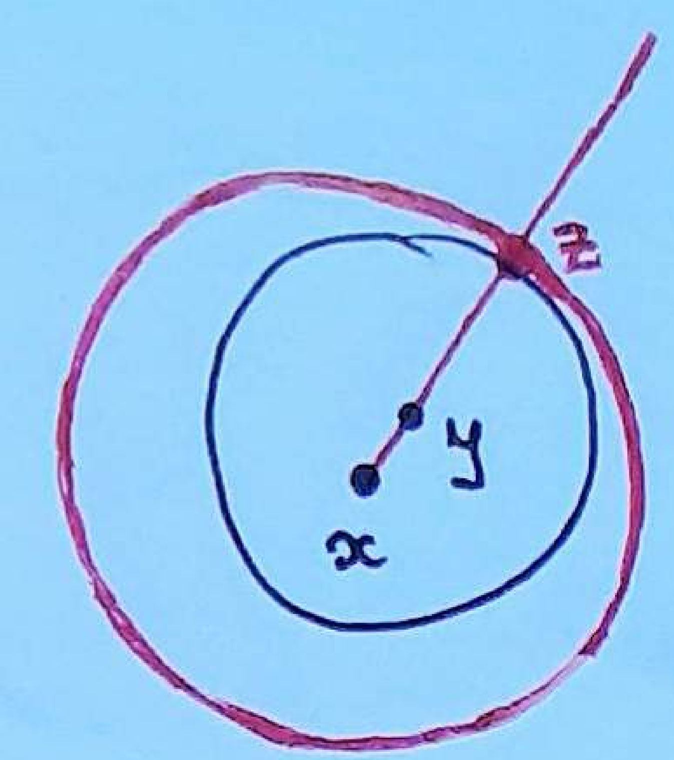
$$D(x,K)=\min\{r>0 \mid \underbrace{\{x\}\subset K[y,s]+K[0,r]}_{\text{увек испуњено јер } x\in K[y,s]},\ K[y,s]\subset\{x\}+K[0,r]\}$$

$K=K[y,s]$

$$\Rightarrow D(x,K)=\min\{r>0 \mid K[y,s]\subset \underbrace{\{x\}+K[0,r]}_{\text{ово је кугла са центром у } x\text{, полупречника } r}\}$$

$$\Rightarrow D(x,K)=\min\{r>0 \mid K[y,s]\subset K[x,r]\}$$

Како изгледа најмања кугла у x која садржи $K[y,s]$? ($K[x,r]$)



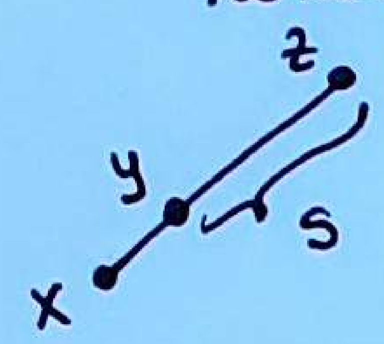
- ако је $x=y$ онда је то свакако сама кугла $K[y,s]$

  тј. $\boxed{r=s}$ (min)

- ако $x \neq y$, онда је полупречник r (минимални) једнак растојању између x и тачке z која се добија у пресеку полуправе xy са сфером $S[y,s]$ (као на слици)

  $\Rightarrow \boxed{r=|xz|}$ је минимални полупречник

Колико је $|xz|$?



$$z = y + \underbrace{\frac{y-x}{\|y-x\|}}_{\text{јединични вектор у том правцу}} \cdot s$$

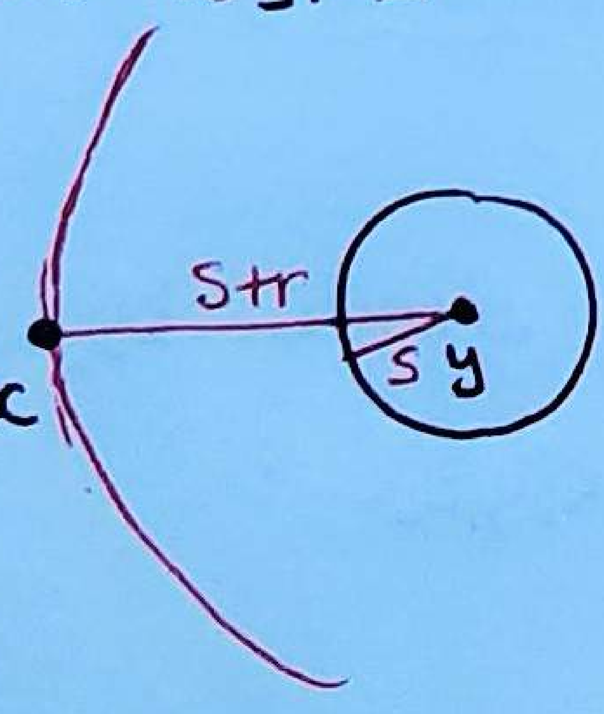
овај рачун није потребан јер може директно (са слике)

$$\Rightarrow |xz| = \|z-x\| = \left\| y-x+\frac{y-x}{\|y-x\|}\cdot s \right\| = \boxed{d(x,y)+s}$$

Да сумирамо: за $x=y$ се исто уклапа да је $r=s+0=s+d(x,y)$

$$\Rightarrow \boxed{\text{за } x\in K[y,s] \quad D(x,K[y,s]) = d(x,y)+s}$$

(2) $x \notin K[y,s]$ $\qquad D(x,K[y,s]) = \min\{r>0 \mid x\in K[y,s]+K[0,r],\ K[y,s]\subset \underbrace{\{x\}+K[0,r]}_{K[x,r]}\}$



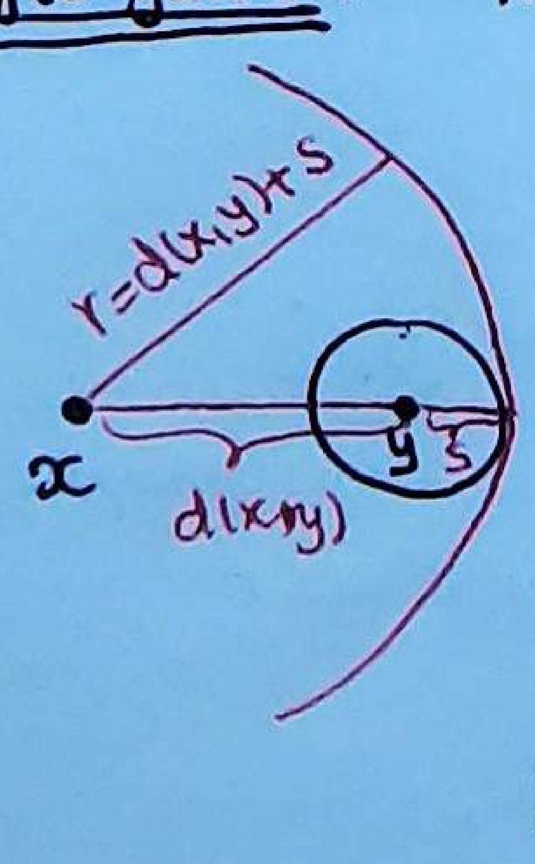
<u>први услов</u>:

$\min r$ тако да $x\in \underbrace{K[y,s]+K[0,r]}_{\text{ово је } K[y,s+r]}$

$\Rightarrow$ минимално r је такво да $s+r=d(x,y)$ тј. $\boxed{r=d(x,y)-s}$ (*)

<u>други услов</u>: $\min r$ тако да $K[y,s]\subset K[x,r]$

минимално такво r је $\boxed{r=d(x,y)+s}$ (**)



Потребно нам је r које задовољава и (*) и (**) за $D(x,K[y,s])$ — оба!

друго $\Rightarrow$ $\boxed{\text{и за } x\notin K[y,s] \quad D(x,K[y,s]) = d(x,y)+s}$

Закључак: пошто у оба случаја (1) и (2) имамо исто, закључујемо да је <u>увек</u>: $D(x,K[y,s]) = d(x,y)+s$ □

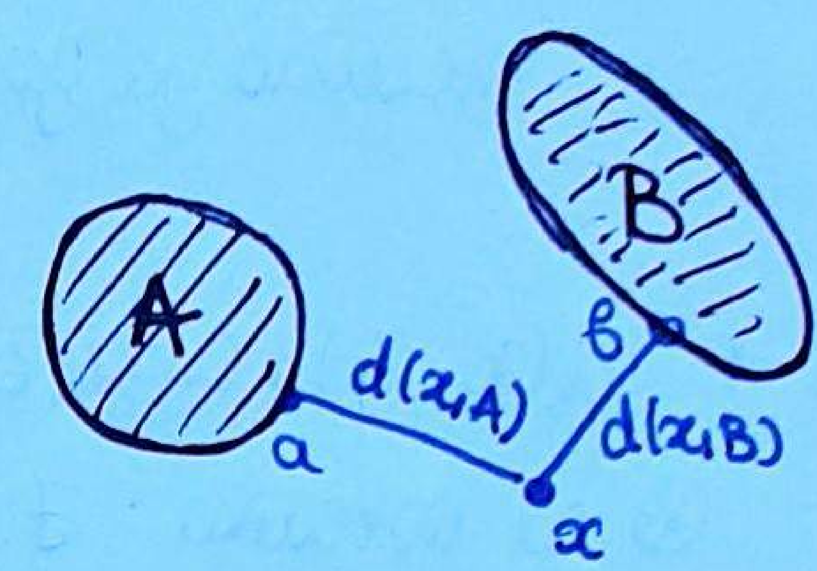
$\boxed{2}$ Нека су A и B два дисјунктна компактна конвексна скупа у $\mathbb{R}^n$ и $d \geq D(A,B)$.

Нека је скуп C дефинисан са:

$$C=\{x\in\mathbb{R}^n \mid d(x,A)+d(x,B)\le d\}$$

Доказати да $A\subset C$, $B\subset C$ и да је C конвексан и компактан.

$A\cap B=\emptyset$ компакти конвексни $\quad d\geq D(A,B)$



(*) приметимо да због компактности A и B

за свако $x\in\mathbb{R}^n$ $\exists a\in A$ и $\exists b\in B$ тако да

$$d(x,A)=d(x,a)$$
$$d(x,B)=d(x,b)$$

(тј. растојања се достижу на компактном скупу - анализа 2 :))

Сада можемо доказати део по део:

$\boxed{A\subset C, B\subset C}$ $\quad a\in A$ произвољна

да ли припада скупу C ?

$$\underbrace{\underbrace{d(a,A)}_{0}+d(a,B)}_{} = d(a,B) \underset{\substack{\text{јер је } e\\ \text{супремум по } a\in A}}{\leq} e(A,B) \underset{\substack{\text{јер је}\\ D=\max\{e(A,B),e(B,A)\}}}{\leq} D(A,B)\leq d$$

$\Rightarrow$ задовољава услов

$\Rightarrow a\in C \overset{\forall a\in A}{\Longrightarrow} \boxed{A\subset C}$ ✓

потпуно аналогно $\boxed{B\subset C}$ ✓

$\boxed{C \text{ компактан}}$ $\quad$ затвореност:

посматрајмо функцију $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

$f(x)=d(x,A)+d(x,B)$ - ово је непрекидна функција

тада важи: $\quad C=f^{-1}(\underbrace{[0,d]}_{\text{затворен}})$

$\Rightarrow$ C је затворен као инверзна слика затвореног скупа ✓

ограниченост: пошто за свако $x\in C$ важи: $d(x,A)\leq d$

$\Rightarrow \quad C\subset A+K[0,d]$ (тачке из C не могу „побећи" далеко :))

$\overset{A \text{ ограничен}}{\Longrightarrow}$ C ограничен ✓

C је затворен и ограничен

$\Rightarrow$ C је компактан $\checkmark$

$\boxed{C \text{ конвексан}}$ $x_1, x_2 \in C$ произвољне тачке

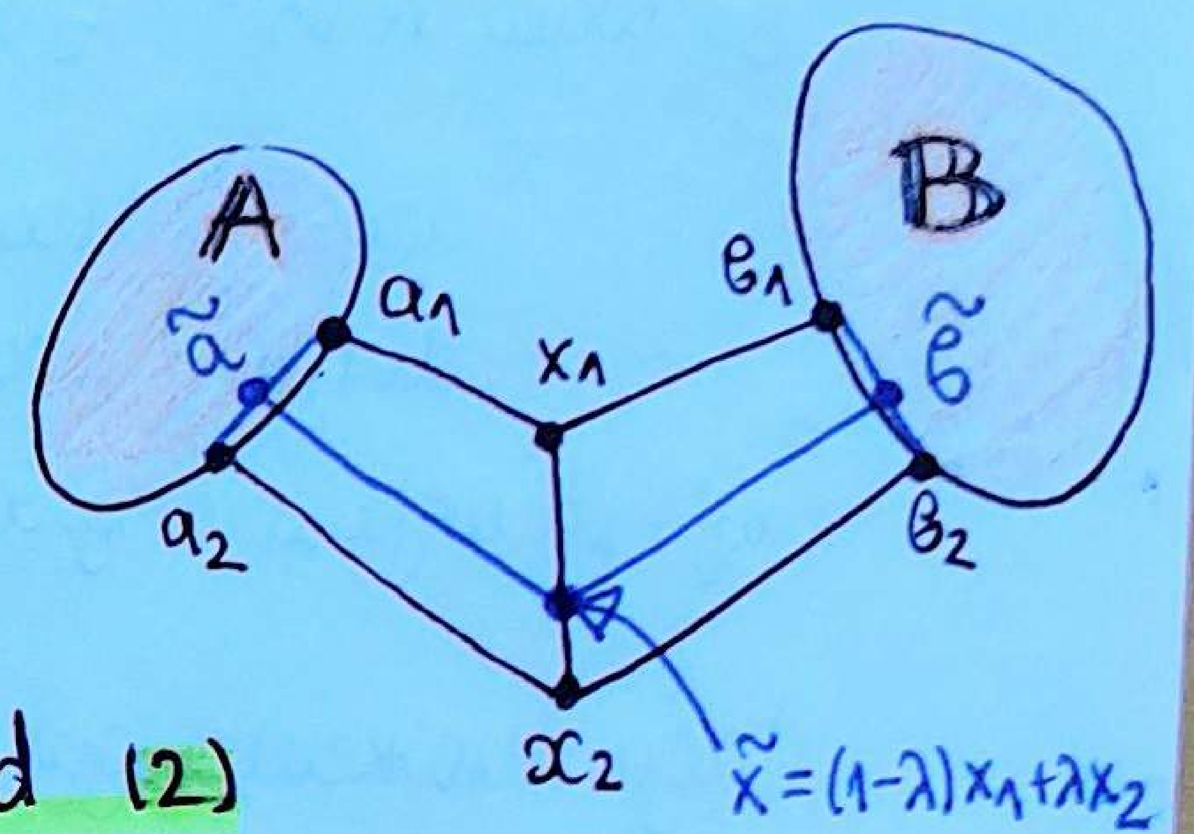
$\lambda \in [0,1]$ произв.

желимо да докажемо да $\underbrace{(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2}_{\text{означимо са } \tilde{x}} \in C$?

$x_1 \in C$: $d(x_1, A) + d(x_1, B) \leq d$

⊛ са почетка: $\exists a_1 \in A$ и $\exists b_1 \in B$

$d(x_1, A) = d(x_1, a_1)$, $d(x_1, B) = d(x_1, b_1)$



даље: $d(x_1, a_1) + d(x_1, b_1) \leq d$

тј. $\|x_1 - a_1\| + \|x_1 - b_1\| \leq d$ (1)

$x_2 \in C$: слично, $\exists a_2 \in A$ и $\exists b_2 \in B$: $\|x_2 - a_2\| + \|x_2 - b_2\| \leq d$ (2)

желимо да докажемо:

$$d(\tilde{x}, A) + d(\tilde{x}, B) \leq d \quad ⊛⊛$$

Идеја: уочимо тачке $\overbrace{(1-\lambda)a_1 + \lambda a_2}^{\tilde{a}}$ и $\overbrace{(1-\lambda)b_1 + \lambda b_2}^{\tilde{b}}$

A конвексан $\Rightarrow$ $\tilde{a} = (1-\lambda)a_1 + \lambda a_2 \in A$

B конвексан $\Rightarrow$ $\tilde{b} = (1-\lambda)b_1 + \lambda b_2 \in B$

Зато је довољно доказати да важи:

$$d(\tilde{x}, \tilde{a}) + d(\tilde{x}, \tilde{b}) \leq d$$

и тада следи да важи ⊛⊛.

$$\begin{aligned} d(\tilde{x}, \tilde{a}) + d(\tilde{x}, \tilde{b}) &= \|\tilde{x} - \tilde{a}\| + \|\tilde{x} - \tilde{b}\| \\ &= \|(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 - (1-\lambda)a_1 - \lambda a_2\| + \|(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 - (1-\lambda)b_1 - \lambda b_2\| \\ &= \underbrace{\|(1-\lambda)(x_1 - a_1) + \lambda(x_2 - a_2)\|}_{\text{из леме коју ћемо показати ово је: } \leq (1-\lambda)\cdot\|x_1 - a_1\| + \lambda\|x_2 - a_2\|} + \underbrace{\|(1-\lambda)(x_1 - b_1) + \lambda\cdot(x_2 - b_2)\|}_{\text{из исте леме ово је } \leq (1-\lambda)\|x_1 - b_1\| + \lambda\cdot\|x_2 - b_2\|} \end{aligned}$$

(видети лему испод доказа)

Дакле, даље имамо:

$$d(\tilde{x},\tilde{a})+d(\tilde{x},\tilde{b}) \leq (1-\lambda)\cdot\|x_1-a_1\|+\lambda\|x_2-a_2\|+(1-\lambda)\|x_1-b_1\|+\lambda\|x_2-b_2\|$$

$$= (1-\lambda)\big(\underbrace{\|x_1-a_1\|+\|x_1-b_1\|}_{\leq d \text{ из } (1)}\big)+\lambda\cdot\big(\underbrace{\|x_2-a_2\|+\|x_2-b_2\|}_{\leq d \text{ из } (2)}\big)$$

$$\leq (1-\lambda)d+\lambda d$$
$$= d$$

Дакле: $d(\tilde{x},\tilde{a})+d(\tilde{x},\tilde{b})\leq d$

$\Rightarrow \boxed{\tilde{x}\in C}$

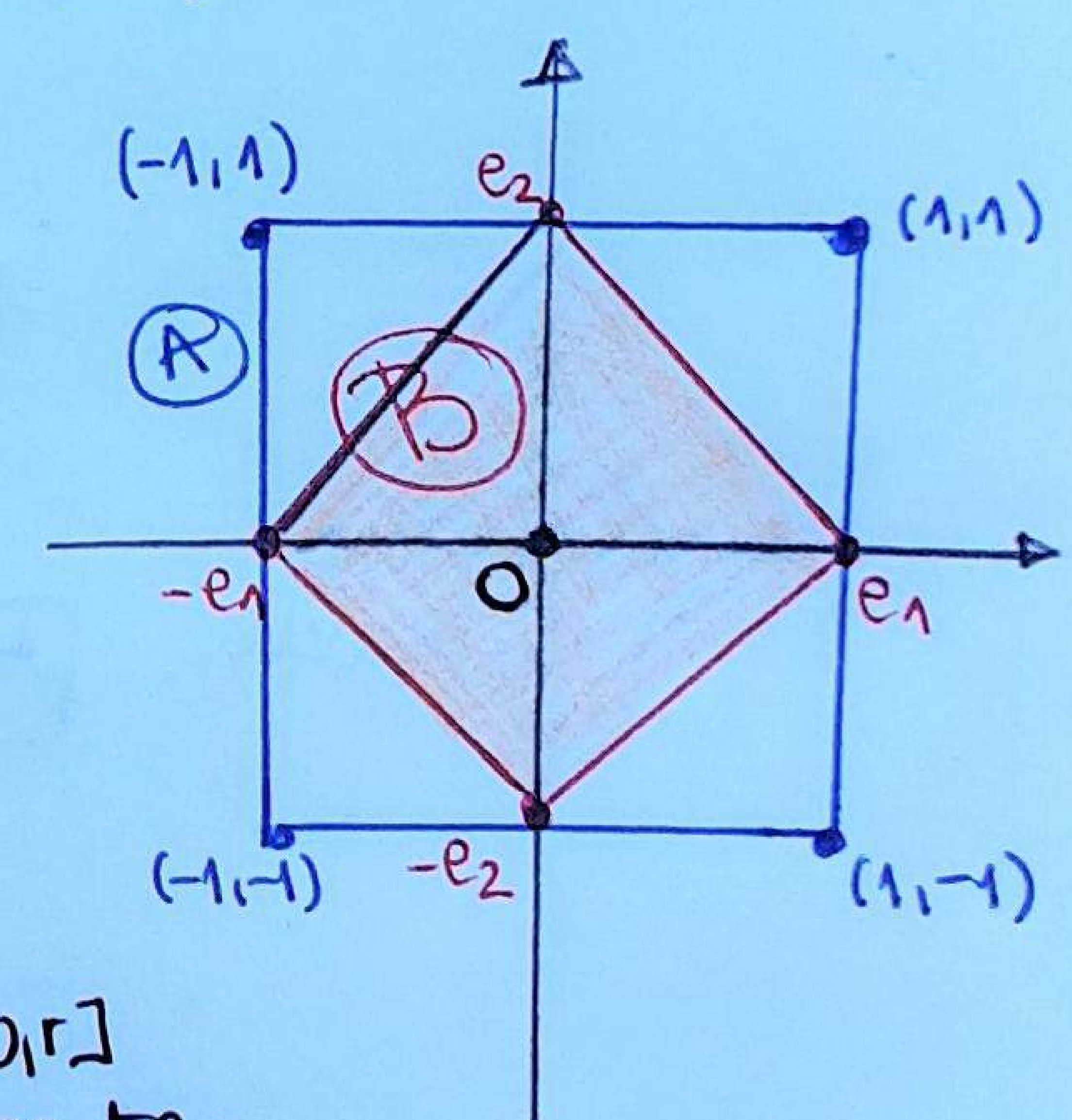
Тиме закључујемо да је C конвексан, чиме је доказ завршен. □

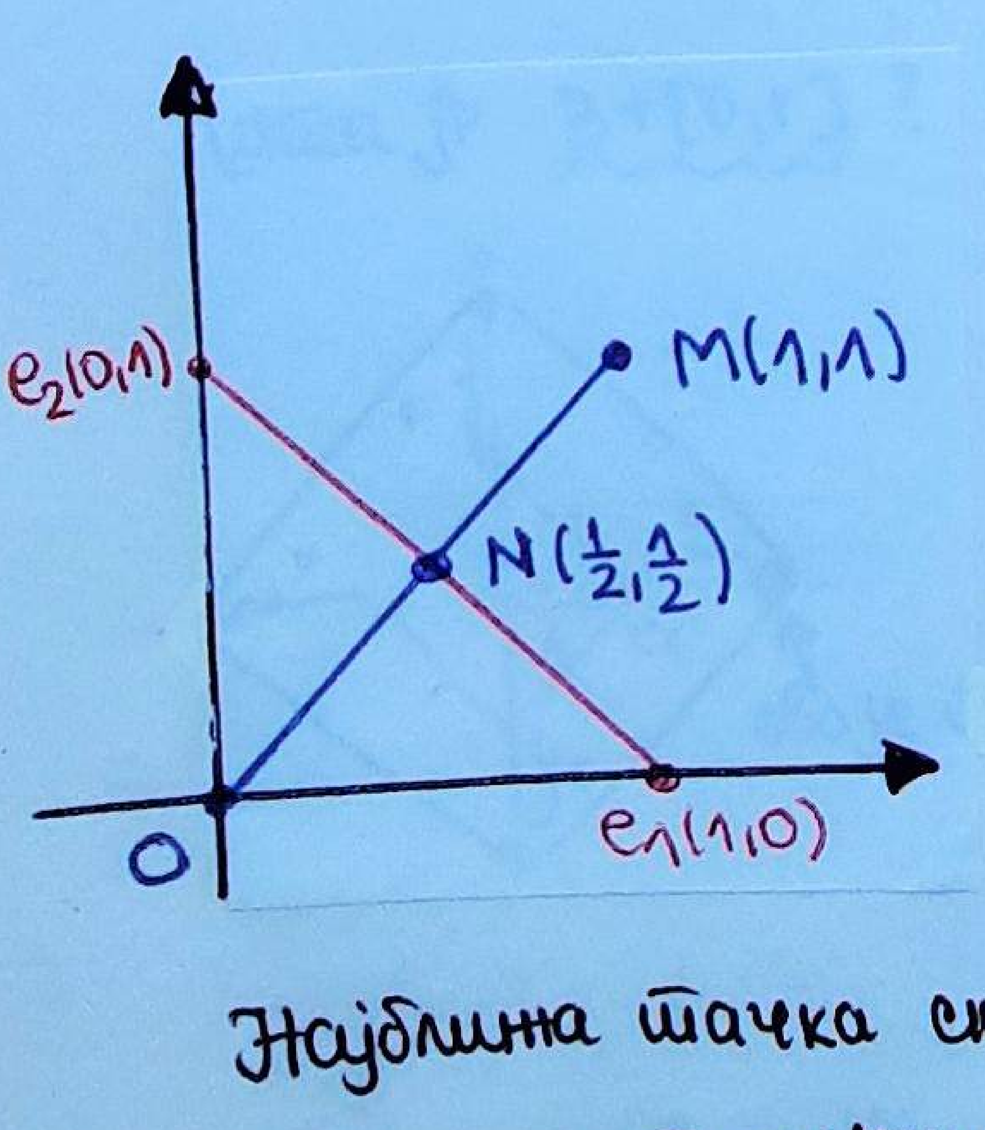
3. Одредити Хаусдорфову удаљеност између хиперкоцке $A=[-1,1]^n$ и њој поларног хипероктаедра: $B=\mathrm{conv}\{e_1,-e_1,\dots,e_n,-e_n\}$

Знамо да је овде $B\subset A$ па имамо

$D(A,B)=\min\{r>0 \mid \underbrace{B\subset A+K[0,r]}_{\text{увек испуњен јер } B\subset A},\ A\subset B+K[0,r]\}$

$\Rightarrow D(A,B)=\min\{r>0\mid A\subset B+K[0,r]\}$



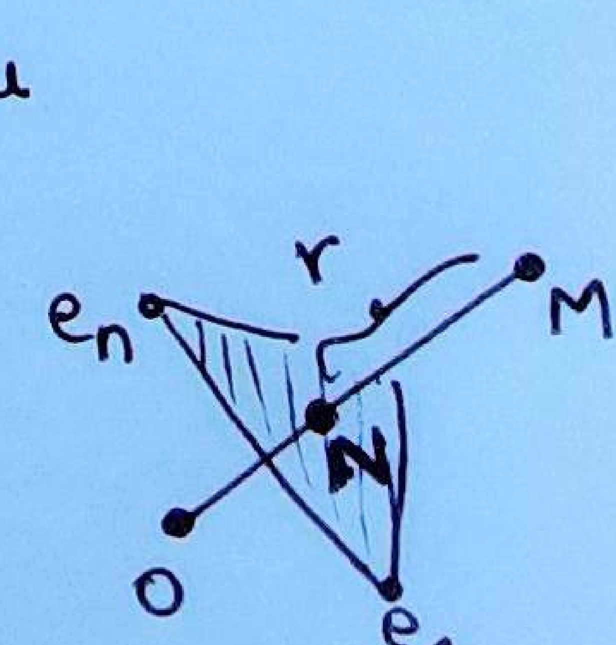


Приметимо да када $B+K[0,r]$ обухвати темена од A, онда ће свакако важити и $A\subset B+K[0,r]$.

Пошто је ситуација за сва темена симетрична, довољно је наћи $\min r$ тако да:

$$M=(\underbrace{1,1,\dots,1}_{n})\in B+K[0,r]$$

Најближа тачка скупа B тачки M се добија у пресеку дужи OM и хиперравни одређене са $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ (за $n=2$ то је $\{e_1,e_2\}$), означимо ту тачку са N.



Због тога је $\underset{\text{(тражено)}}{\min r}$ заправо минимално r тако да важи:

$$\boxed{M\in N+K[0,r]}$$

Одредимо тачку N: $N \in OM \Rightarrow$ облика је $N(x, x, \dots, x)$

(јер је колинеарна са $(1,1,\dots,1) = M$)

$N \in \operatorname{conv}\{e_1, \dots, e_n\}$

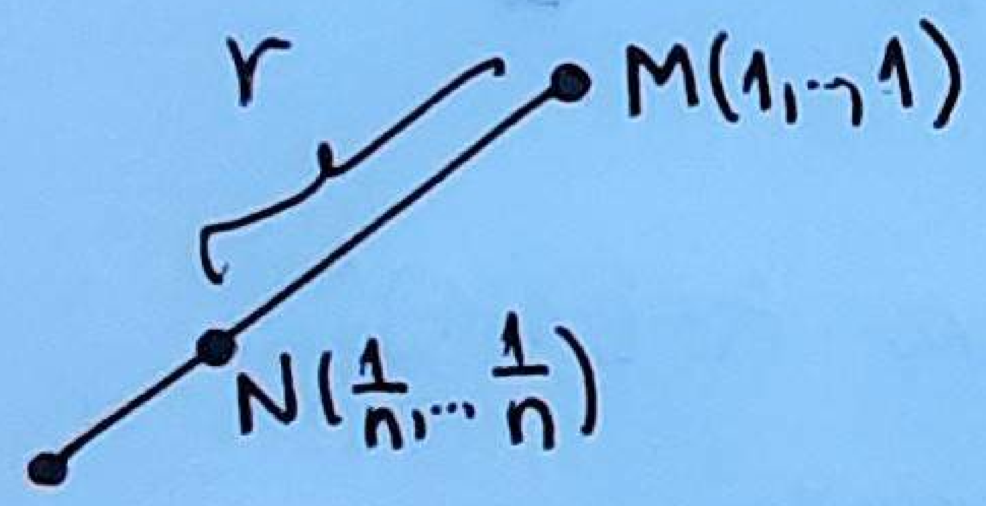
$e_1 = (1, 0, \dots, 0)$
$e_2 = (0, 1, \dots, 0)$
$\vdots$
$e_n = (0, \dots, 0, 1)$

знамо да хиперраван коју одређују $e_1, e_2, \dots, e_n$ има једначину:

$$\boxed{x_1 + \dots + x_n = 1}$$

$\Rightarrow$ за N важи $\underbrace{x + x + \dots + x}_{n} = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{n}$

$$\Rightarrow \boxed{N\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)}$$



$\Rightarrow$ рачунамо r је:

$$r^2 = \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 + \dots + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2}_{n}$$

$$\Rightarrow \boxed{r} = \sqrt{n} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \sqrt{n} \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{n-1}{\sqrt{n}}$$

Дакле, $\boxed{D(A, B) = \frac{n-1}{\sqrt{n}}}$ $\square$