

2.7. Конјуговане функције

Подсећамо се дефиниције:

$$f: C \rightarrow \mathbb{R}$$

Њена конјугована функција f^* се дефинише као:

$$f^*: D \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f^*(y) = \sup_{x \in C} (\langle x, y \rangle - f(x))$$

D -скупи на коме је овај супремум коначан.

* свака конјугована ф-ја је конвексна (ТВ.7.2.)

1 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{x^{2020}}{2020}$

Одредити f^* .

Када је f функција једне променљиве из $C \subset \mathbb{R}$, $f: C \rightarrow \mathbb{R}$, тада $\langle x, y \rangle = xy$, па:

$$f^*(y) = \sup_{x \in C} (xy - f(x))$$

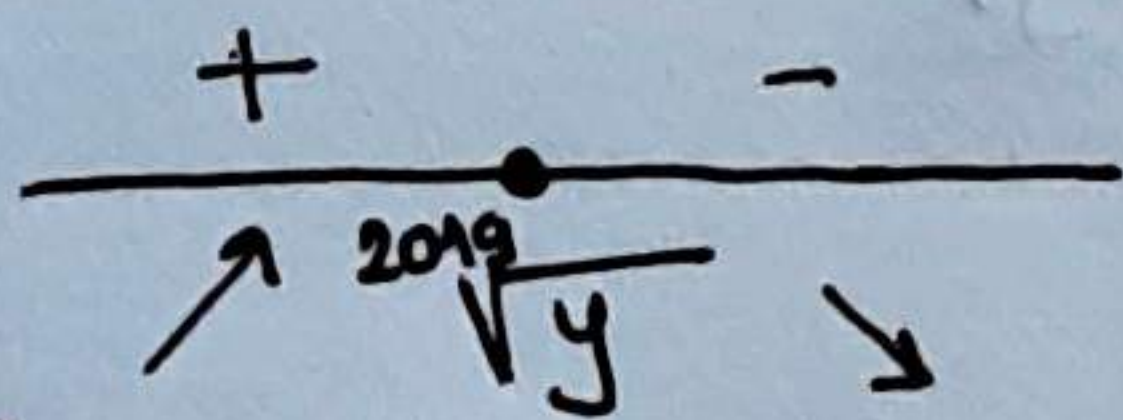
у нашем примеру: $f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (x \cdot y - \frac{x^{2020}}{2020})$

Испитајмо:

$$g(x) = y \cdot x - \frac{x^{2020}}{2020}$$

Да ли g има супремум ($x \in \mathbb{R}$) за фиксирано y ?

$$g'(x) = y - x^{2019}$$



$$g'(x) > 0 \text{ за } x < \sqrt[2019]{y} \Rightarrow g \text{ расте на } (-\infty, \sqrt[2019]{y})$$

$$g'(x) < 0 \text{ за } x > \sqrt[2019]{y} \Rightarrow g \text{ опада на } (\sqrt[2019]{y}, +\infty)$$

$\Rightarrow g$ достиже максимум за $x = \sqrt[2019]{y}$

$$g_{\max} = y \cdot \sqrt[2019]{y} - \frac{(\sqrt[2019]{y})^{2020}}{2020} = \frac{2019}{2020} y^{\frac{2020}{2019}}$$

(по је свакако овда и иранени супремум за фиксирано y)

$$\Rightarrow \boxed{f^*(y) = \frac{2019}{2020} \cdot y^{\frac{2020}{2019}}}$$

ово важи за свако $y \in \mathbb{R}$, из $f^*: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $\square$

2. Heraja je $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = -\frac{1}{2} - \ln x$
određujemo f^* .

Потом је ф дја једне променљиве на бити:

$$\begin{aligned} f^*(y) &= \sup_{x \in (0, +\infty)} (xy - g(x)) \\ &= \sup_{x \in (0, +\infty)} (xy + \frac{1}{2} + \ln x) \end{aligned}$$

Поновно за фиксирано y означилимо:

$$g(x) = xy + \frac{1}{2} + \ln x$$

и широким сферичним та испитивањем мало 9:

$$g'(x) = y + \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

(за сада у мени узимати све реалне вредности док не одредимо тачно где постоји коначан супремум)

Имано случаје:

① $y \geq 0$: $g(x) = y \cdot x + \frac{1}{2} + \ln x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$
 $(g'(x) = y + \frac{1}{x} > 0 \text{ } \forall x)$

g nije ograničena fja

$$\Rightarrow \exists \sup g(x)$$

$\Rightarrow$ није дефинисано $f^*(y)$

(20) $y < 0$: $g(x) = \underline{y} \cdot x + \frac{1}{2} + \ln x$

"jate od ln" pa neke biljke neopranjene odložite
a neka ih
ovo je samo ideja !!

используя $g'(x) = y + \frac{1}{x}$

$\boxed{g'(x) > 0} \Leftrightarrow y + \frac{1}{x} > 0$	$\stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} xy > -1$	$\stackrel{y < 0}{\Leftrightarrow} \boxed{x < -\frac{1}{y}}$	$(-\frac{1}{y} > 0 \text{ јер } y < 0)$
$\boxed{g'(x) < 0} \Leftrightarrow$	$<$	$\Leftrightarrow \boxed{x > -\frac{1}{y}}$	

⇒ унамо:

$\Rightarrow g$ достигает max за $x = -\frac{1}{y}$

$$\boxed{g_{\max}} = -\frac{1}{y} \cdot y + \frac{1}{2} + \ln\left(\frac{1}{y}\right) = \boxed{-\frac{1}{2} - \ln|y|}$$

2. case: $f^*(y) = -\frac{1}{2} - \ln|y|$

3a $y < 0$ wj: $D = (-\infty, 0)$, $f^*: D \rightarrow \mathbb{R}$

3. Нека је $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ парна функција и дефинишимо помоћну функцију:

$$f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) := \varphi(\|x\|)$$

$$g(x) := \varphi^*(\|x\|)$$

Докажи да важи: $f^* = g$.

Уопште произвољно $y \in \mathbb{R}^n$:

Џио нам је да докажемо да важи: $f^*(y) = g(y)$.

$$\underline{f^*(y)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (\langle x, y \rangle - f(x))$$

$$= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (\langle x, y \rangle - \varphi(\|x\|))$$

$\sup_{x \in \mathbb{R}^n}$ се може параметризувати као:

$$\sup_{t \geq 0} \sup_{\|x\|=t}$$

јер пролазимо иску $\perp$

$$= \sup_{t \geq 0} \sup_{\|x\|=t} (\underbrace{\langle x, y \rangle}_{t \cdot \underbrace{\langle \frac{x}{\|x\|}, y \rangle}_{\text{вектор норме 1}}} - \underbrace{\varphi(\|x\|)}_{\varphi(t)})$$

$$= \sup_{t \geq 0} \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in \mathbb{R}^n}} (t \cdot \langle x, y \rangle - \varphi(t))$$

не заборави о x

$$= \sup_{t \geq 0} (t \cdot \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ \|x\|=1}} \langle x, y \rangle - \varphi(t))$$

$$\text{ово је } \|y\| \text{ јер } \langle x, y \rangle = \underbrace{\|x\|}_{=1} \cdot \|y\| \cdot \cos \angle(x, y)$$

пролази све угаове
јер x пролази све
векторе норме 1

иа за $x = \frac{y}{\|y\|}$ обде имамо 1

$$= \sup_{t \geq 0} (t \cdot \|y\| - \varphi(t)) \quad (1)$$

Са груте шране:

$$\underline{g(y)} = \varphi^*(\|y\|) = \sup_{t \in \mathbb{R}} (t \cdot \|y\| - \varphi(t))$$

$$\varphi \text{ парна па за } t \geq 0: \underbrace{(-t) \cdot \|y\| - \varphi(-t)}_{\text{члан за } (-t)} = -t\|y\| - \varphi(t) < \underbrace{t \cdot \|y\| - \varphi(t)}_{\text{члан за } t}$$

$\Rightarrow \sup$ се свакако достиже на $t \geq 0$

$$\Rightarrow \underline{g(y)} = \sup_{t \geq 0} (t \cdot \|y\| - \varphi(t)) = (1)$$

$$\Rightarrow \boxed{f^*(y) = g(y)} \quad (\forall y \in \mathbb{R}^n)$$

чиме је доказ завршен. $\square$

4 Одредити f^* ако $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисана са:

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2$$

и f^* ће бити функција коју ће пронаћи, означимо $f^*(a, b): (a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$f^*(a, b) = \sup_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} (\langle (a, b), (x, y) \rangle - f(x, y))$$

$$= \sup_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} (\underbrace{ax + by - x^2 - xy - y^2}_{\text{означимо са } g(x, y)})$$

Дакле, за фиксиране $a, b \in \mathbb{R}$ измишљено $g(x, y) = -x^2 - xy - y^2 + ax + by$, - пратимо $\sup_{(x, y) \in \mathbb{R}^2}$

с обзиром на то да су квадратни чланови сви са минусом, очекујемо да је ограничена одозго, тј. да постоји максимум.

Како пратити екстремуме? (подсетити се из анализе 😊)

Пратимо путе градијента ∇g на:

$$\boxed{g'_x = 0, g'_y = 0} \quad (\text{пару извода} = 0)$$

$$\begin{cases} g'_x = -2x - y + a = 0 \\ g'_y = -2y - x + b = 0 \end{cases}$$

решимо овај мали систем

и добијемо:

$$\boxed{x = \frac{2a-b}{3}, y = \frac{2b-a}{3}}$$

То је једини кандидати за екстремуме.

$$\text{одредимо } \underline{g\left(\frac{2a-b}{3}, \frac{2b-a}{3}\right)} = -\left(\frac{2a-b}{3}\right)^2 - \left(\frac{2b-a}{3}\right)^2 - \left(\frac{2a-b}{3}\right)\left(\frac{2b-a}{3}\right) + a \cdot \frac{2a-b}{3} + b \cdot \frac{2b-a}{3}$$

$$= \underline{\text{рачуна}} \dots = \underline{\frac{a^2 + b^2 - ab}{3}}$$

За већу доказати да је овај екстремум заиста максимум (мало анализе 😊).

$$\Rightarrow \boxed{f^*(a, b) = \frac{a^2 + b^2 - ab}{3}} \quad f^*: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ - пратена конјугована функција. } \square$$