за четвртак
23.4.2020.

~ 2.6. Функције ослонца и удаљености ~

КРАТАК ПРЕГЛЕД ДЕФИНИЦИЈА И ТЕОРИЈЕ:

$C \neq \emptyset$ конвексан

ФУНКЦИЈА ОСЛОНЦА $\quad h_C : D \to \mathbb{R} \quad h_C(x) = \sup\limits_{a \in C} \langle a, x \rangle$

D-скуп тачака у којима је овај sup коначан

Геометријско значење: $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

H_α и H_β су две хиперравни ослонца нормалне на u

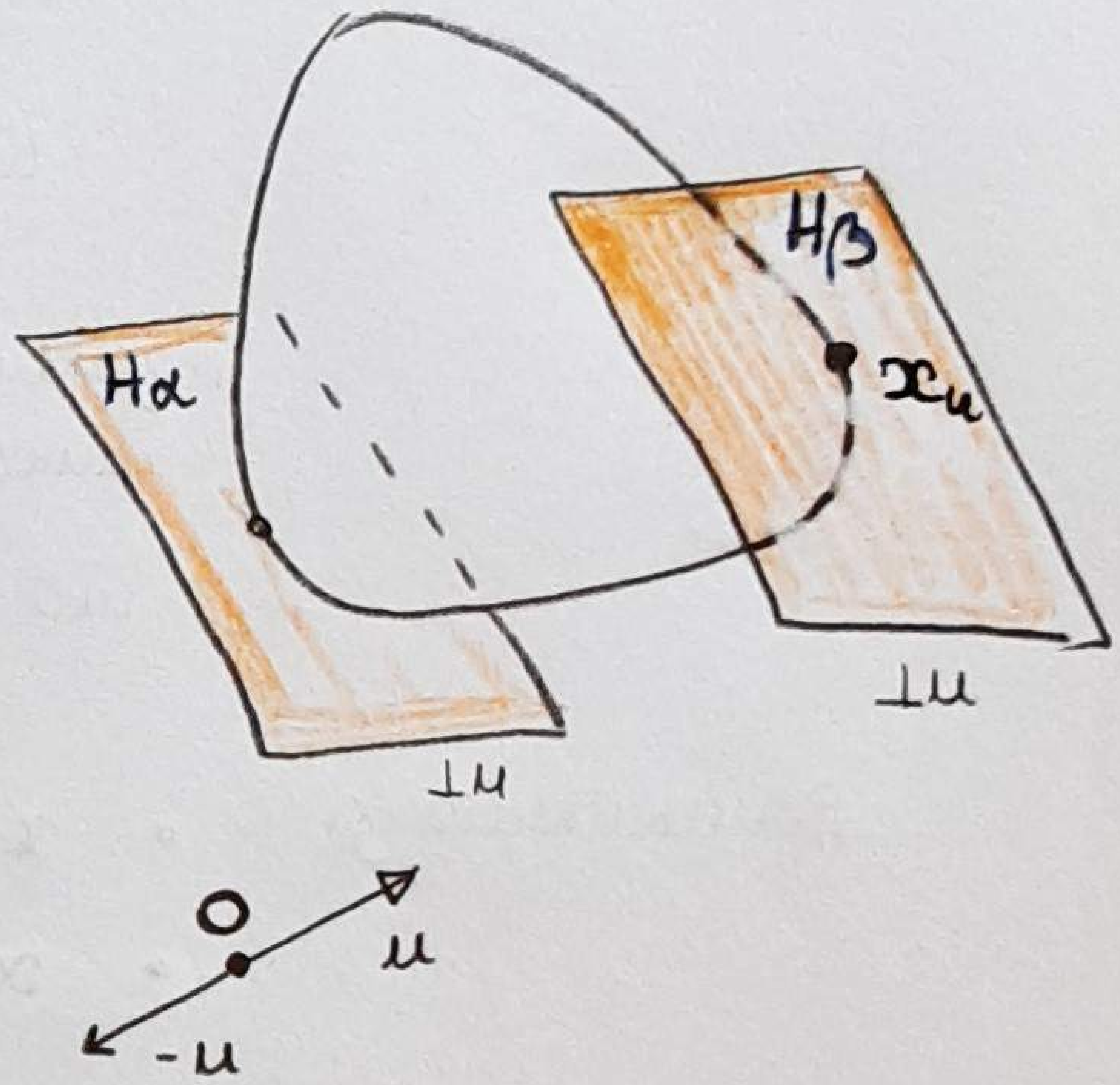
$H_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, u \rangle = \alpha\}$

$H_\beta = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, u \rangle = \beta\}$

ако $\alpha \leq \beta$:

$h_C(u) = \beta$

$h_C(-u) = -\alpha$



- * h_C је конвексна и позитивно хомогена
- * ако је C и компактан, онда постоји тачка $x_u \in C$ тд. $h_C(u) = \langle x_u, u \rangle$ (види слику)

ЛЕМА 6.5 $f : C \to \mathbb{R}$ линеарна, C-компактан конвексан

$\Rightarrow \exists$ екстремалне тачке x_0, y_0 тд.

$$f(x_0) = \min_{x \in C} f(x)$$
$$f(y_0) = \max_{x \in C} f(x)$$

ова лема примењена на фју h_C за компактан скуп C даје да се $h_C(x)$ може рачунати као:

$$h_C(x) = \sup_{a \in C} \langle a, x \rangle \underset{\substack{\text{јер компактан C} \\ \text{па се достиже max}}}{=} \max_{a \in C} \langle a, x \rangle = \max_{a \in \operatorname{ext} C} \langle a, x \rangle$$

extC- екстремалне тачке скупа C

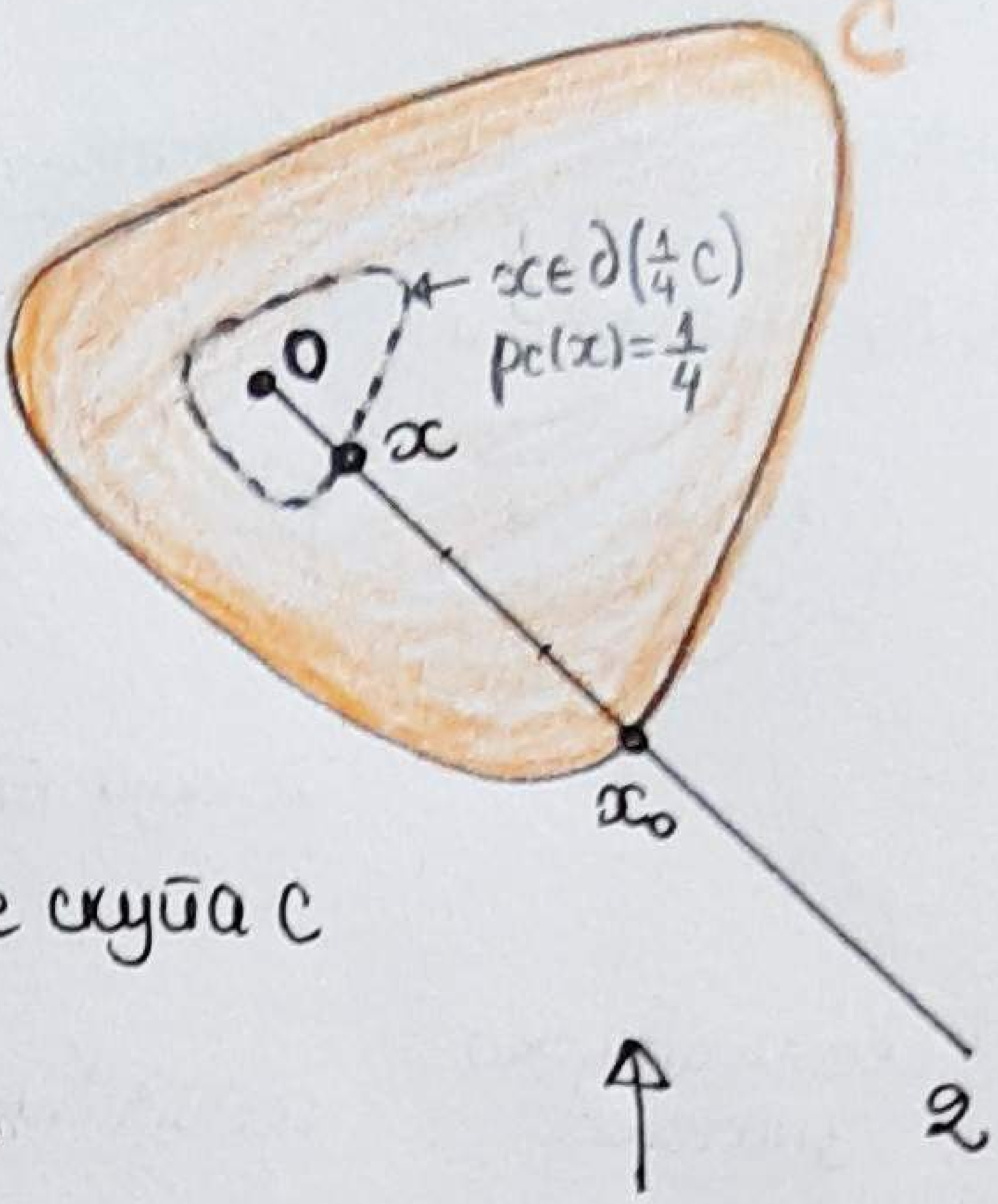
Друга важна функција:

C-компактан конвексан у $\mathbb{R}^n$, $\operatorname{int} C \neq \emptyset$, $0 \in \operatorname{int} C$

функција удаљености

$p_C : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$p_C(x) = \inf\{\lambda \mid \lambda > 0,\ x \in \lambda C\}$



↑ на слици $x = \frac{1}{4}x_0$
$\lambda = \frac{1}{4}$

геометријско значење:

Д-полуправа из 0 која садржи x

$x_0 :=$ пресечна тачка Д и границе скупа C

$\Rightarrow p_C(x) = \lambda$ такво да је $x = \lambda \cdot x_0$

тј. $p_C(x) = \frac{\|x\|}{\|x_0\|}$

„замишљамо тело $\lambda \cdot C$ хомотетично са C, а λ је такво да је x на граници $\lambda \cdot C$ то λ је $p_C(x)$ "

Приметимо да:

- $x \in \operatorname{int} C \Rightarrow p_C(x) \leq 1$ (јер $x \in C = 1 \cdot C \Rightarrow \inf\limits_{x \in \lambda C} \lambda \leq 1$)

  (генерално $x \in C \Rightarrow p_C(x) \leq 1$)

- $x \notin C \Rightarrow p_C(x) \geq 1$ ← важи строго > због компактности C

Важна теорема:

T6.7. C-компактан, конвексан, $0 \in \operatorname{int} C$

C^*-поларан скуп скупу C

$\Rightarrow \quad h_C = p_{C^*}$ и $p_C = h_{C^*}$

Дакле, „можемо прећи на поларан скуп и рачунати ону другу функцију" ☺

Најзад, прелазимо на задатке ☺

$\boxed{1.}$ $A, B \neq \emptyset$ конвексни скупови у $\mathbb{R}^n$

$h_A: D_A \to \mathbb{R}$, $h_B: D_B \to \mathbb{R}$ функције ослонца

доказати да за фју ослонца

$$h_{A+B}: D_{A+B} \to \mathbb{R}$$

скупа $A+B$ важи: $D_{A+B} = D_A \cap D_B$ (1)

и $h_{A+B} = h_A + h_B$. (2)

Скуп $A+B$ је задат са: $A+B = \{a+b \mid a \in A, b \in B\}$

покажимо да за произвољно $x \in D_A \cap D_B$ важи:

$$h_{A+B}(x) = h_A(x) + h_B(x).$$

$$\underbrace{h_{A+B}(x)} = \sup_{y \in A+B} \langle y, x \rangle$$

$$= \sup_{\substack{a \in A \\ b \in B}} \langle a+b, x \rangle = \sup_{\substack{a \in A \\ b \in B}} (\langle a, x \rangle + \langle b, x \rangle)$$

[означимо нове скупове дате са x:

$A_x = \{\langle a, x \rangle \mid a \in A\}$

$B_x = \{\langle b, x \rangle \mid b \in B\}$]

$$\overset{\text{тада:}}{=} \sup(A_x + B_x)$$

$$\overset{\text{тврђење из анализе 1}}{=} \sup A_x + \sup B_x$$

$$= \sup_{a \in A} \langle a, x \rangle + \sup_{b \in B} \langle b, x \rangle$$

$$= \underbrace{h_A(x) + h_B(x)}$$

чиме смо доказали да важи (2).

Да важи тврђење (1) примећујемо једноставно - да би постојао $\sup_{y \in A+B} \langle y, x \rangle$, морају постојати оба супремума $\sup_{y \in A} \langle y, x \rangle$ и $\sup_{y \in B} \langle y, x \rangle$, а видимо из низа једнакости да је то и довољан услов па заиста $D_{A+B} = D_A \cap D_B$.

$\square$

$\boxed{2}$ Одредити све компактне конвексне скупове K чија унутрашњост садржи коорд. почетак и чија је функција ослонца једнака функцији удаљености.

$0 \in \mathrm{int}\, K$, $h_K = p_K$

Тврђење 6.7. $\Rightarrow$ $h_K = p_{K^*}$, $p_K = h_{K^*}$

Дакле, закључујемо да важи $p_K = p_{K^*}$ и $h_K = h_{K^*}$

→ Циљ нам је да покажемо да важи $\boxed{K = K^*}$

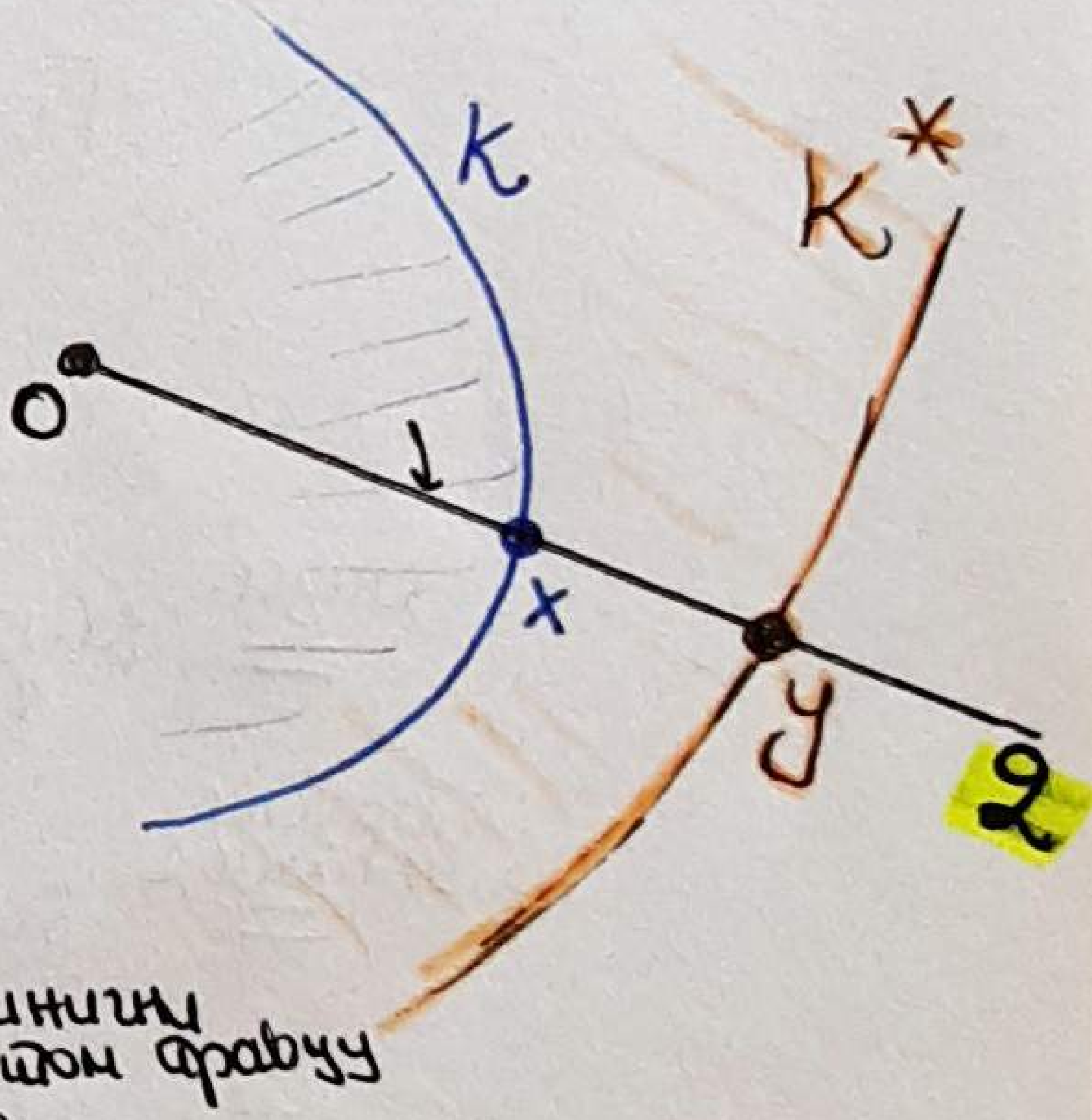
На основу тврђења 5.2. и 5.4. (из поларних скупова) знамо да је и K^* компактан, конвексан и важи $0 \in \mathrm{int} K^*$.

Посматрајмо произвољну полуправу q из коорд. почетка.

Нека је $[0x] = K \cap q$ (слика) (пресеци су дужи због конвексности и ограниченост
$[0y] = K^* \cap q$ а затворене због компактности)

Желимо да покажемо да $x = y$:
претпоставимо супротно, да $x < y$ (на q), као на слици

$p_K(x) = 1$ јер: $x \in K \Rightarrow p_K(x) \leq 1$,
а ако би било $p_K(x) < 1$, онда би постојало $\lambda_0 < 1$ тако да $x \in \lambda_0 K$,
међутим $\lambda_0 K \cap q$ је дуж $[0, \lambda_0 \cdot x]$ која не садржи x,
дакле $p_K(x) = 1$.



$\Rightarrow$ $p_{K^*}(x) = 1$ такође

Међутим, уочимо $\lambda_0 = \frac{\|x\|}{\|y\|} < 1$: $\lambda_0 \cdot K^* \ni \lambda_0 \cdot y = \overset{\text{јединични у том правцу}}{\frac{\|x\|}{\|y\|} \cdot y} = x$

$x \in \lambda_0 \cdot K^*$, $\lambda_0 < 1$ $\Rightarrow$ $p_{K^*}(x) < 1$ ↯

Слично бисмо добили контрадикцију за $y < x$.
Дакле, мора бити $\boxed{x = y}$
То важи за сваку полуправу q из 0 да $q \cap K = q \cap K^*$

$$\Rightarrow \boxed{K = K^*}$$

Сада користимо задатак из Поларних скупова (урадили на вежбама ☺)

$K = K^*$ $\Rightarrow$ $\boxed{K \text{ је јединична лопта}}$

што је одговор □

$\boxed{3.}$ Нека је K шестоугао са теменима

$A(2,0), B(1,\sqrt{3}), C(-1,\sqrt{3}), D(-2,0), E(-1,-\sqrt{3}), F(1,-\sqrt{3})$

(а) Одредити његов поларни скуп K^*

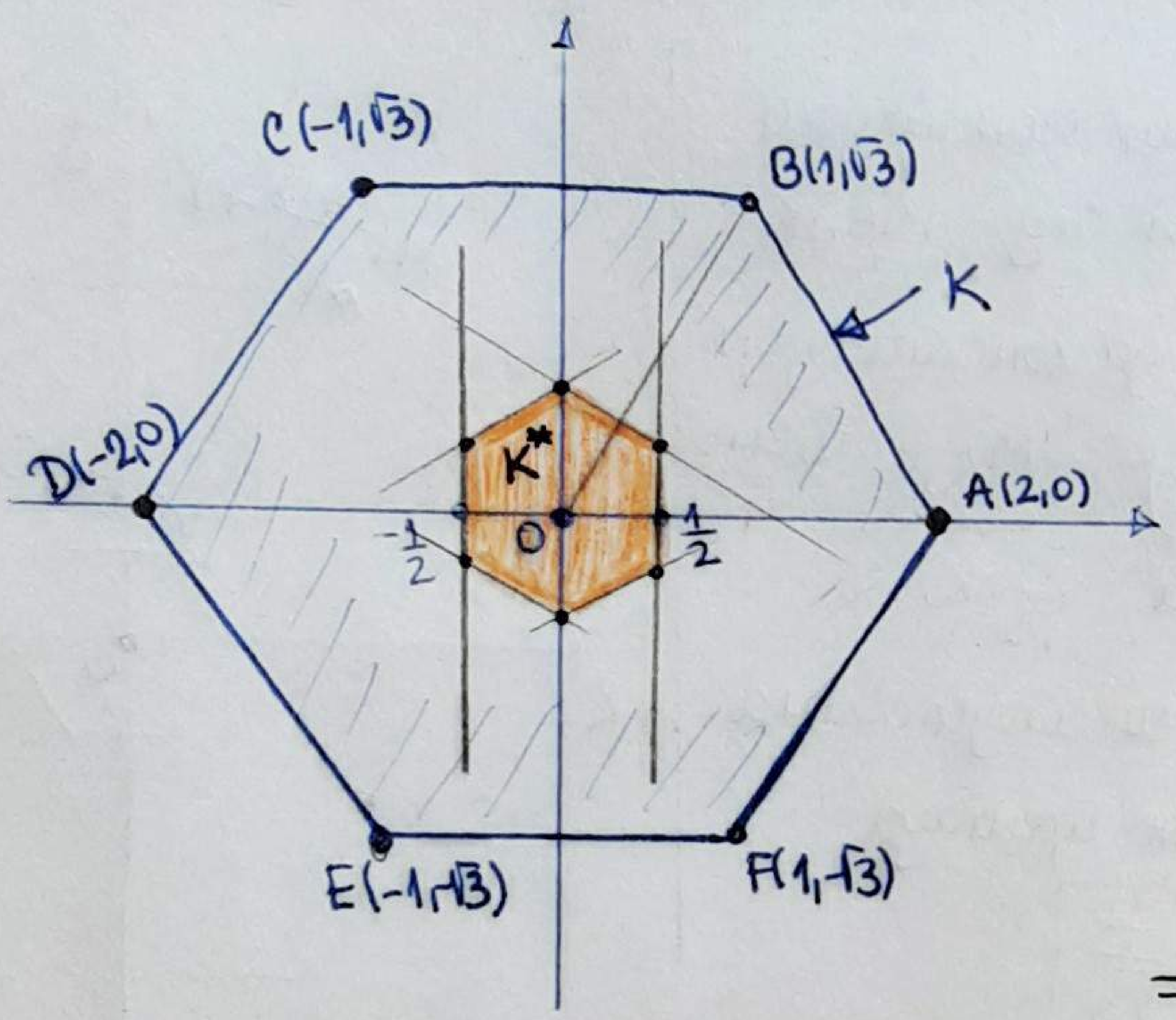
(б) Одредити функцију ослонца $h_K(u)$ за произв. $u \in \mathbb{R}^2$.

(в) Дати геометријску интерпретацију за $h_K(5,5)$

(г) Одредити функцију удаљености p_K у тачки $\left(-\frac{7\sqrt{3}}{3}, 7\right)$

(д) Одредити функцију удаљености $p_K(u)$ за произв. $u \in \mathbb{R}^2$.

(а) Приметимо да је K правилни шестоугао са центром у коорд. почетку:



Одређивање поларног скупа смо добро научили:

$K = \mathrm{conv}\{A, B, C, D, E, F\}$

$\quad = \mathrm{conv}(\{A\} \cup \dots \cup \{F\})$

$\Rightarrow K^* = \{A\}^* \cap \{B\}^* \cap \{C\}^* \cap \{D\}^* \cap \{E\}^* \cap \{F\}^*$

Све ове тачке су на растојању ② од коорд. почетка

$\Rightarrow$ њихови поларни скупови су полуравни на растојању $\left(\frac{1}{2}\right)$ од коорд. почетка, нормалне на одговарајуће правце

$\Rightarrow$ K^* је пресек шест полуравни
биће шестоугао као на слици (темена одредити за вежбу)

(б) $h_K(u) = ?$

$h_K(u) = \sup\limits_{a \in K} \langle a, u \rangle$ лема 6.5. – достиже се на екстремима K

$\quad = \sup\limits_{a \in \mathrm{ext}K} \langle a, u \rangle$ extK – шест тачака

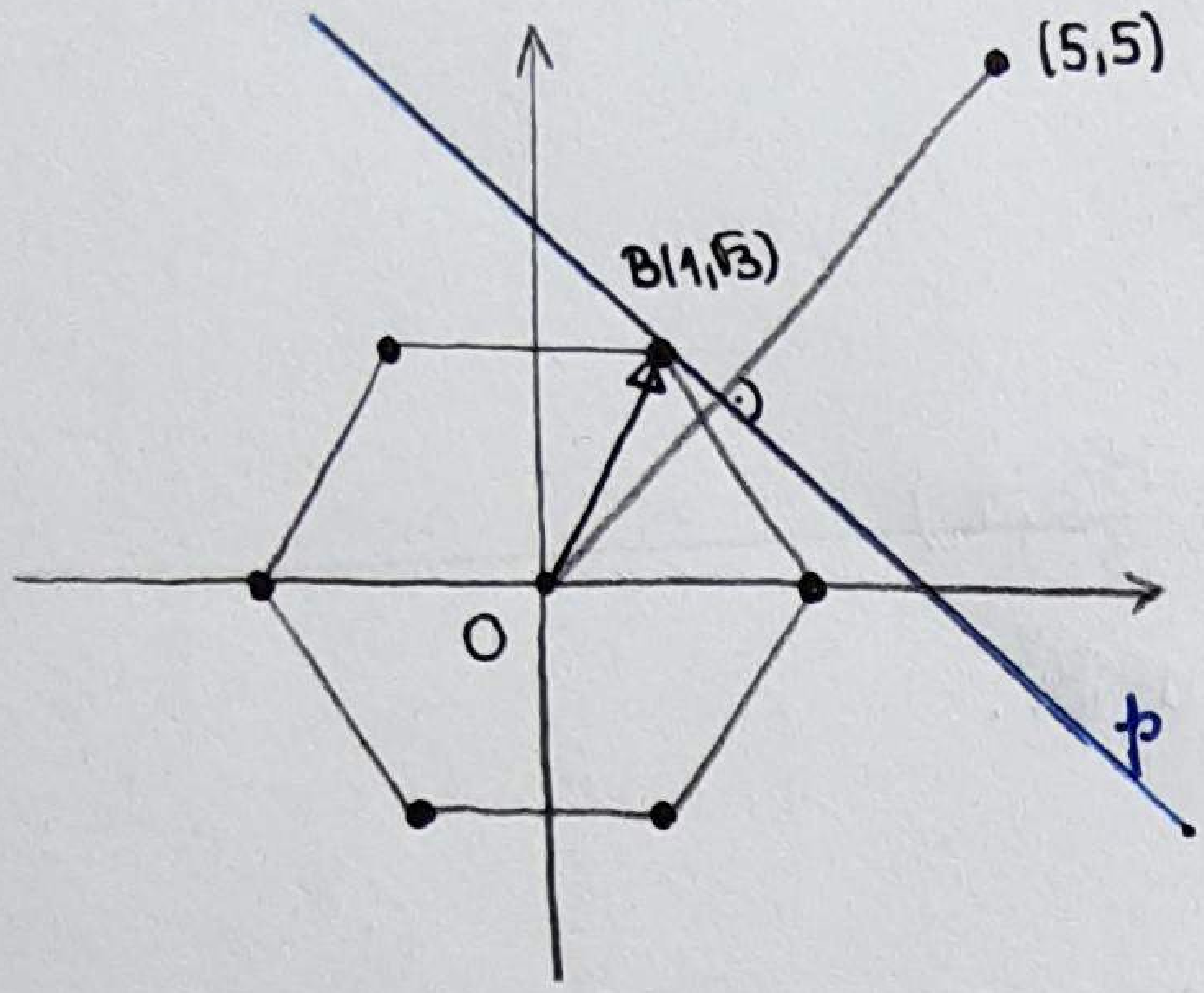
$\quad = \max\limits_{a \in \{A,B,C,D,E,F\}} \langle a, u \rangle$

Нека је $u = (x, y)$: $\langle A, u \rangle = \langle (2,0), (x,y) \rangle = 2x + 0 \cdot y = 2x$
слично осталих 5 скаларних производа

$\Rightarrow h_K(x,y) = \max\{2x, x+\sqrt{3}y, -x+\sqrt{3}y, -2x, -x-\sqrt{3}y, x-\sqrt{3}y\}$

$\Rightarrow \boxed{h_K(x,y) = \max\{2|x|, |x| + \sqrt{3} \cdot |y|\}}$ (краће записано) (в) $h_K(5,5) = \max\{2\cdot 5,\ 5+\sqrt{3}\cdot 5\}$

$= 5+5\sqrt{3}$



$\sup\limits_{a\in K}\langle a,(5,5)\rangle$ се достиже

на екстремалним тачкама

овде на темену $\underline{B(1,\sqrt{3})}$

Права ослонца (овде је хиперраван = права, у $\mathbb{R}^2$ ☺)

има једначину:

$p=\{x\in\mathbb{R}^2 \mid \langle x,(5,5)\rangle = 5+5\sqrt{3}\}$

(г) $p_K(-\frac{7\sqrt{3}}{3}, 7) = ?$

$$p_K(\underbrace{-\tfrac{7\sqrt{3}}{3}, 7}_{M}) = \inf_{\substack{\lambda>0\\ M\in\lambda K}} \lambda$$

ово одређујемо геометријски

минимално λ тд. $M\in\lambda K$

примећујемо да хомотетијом

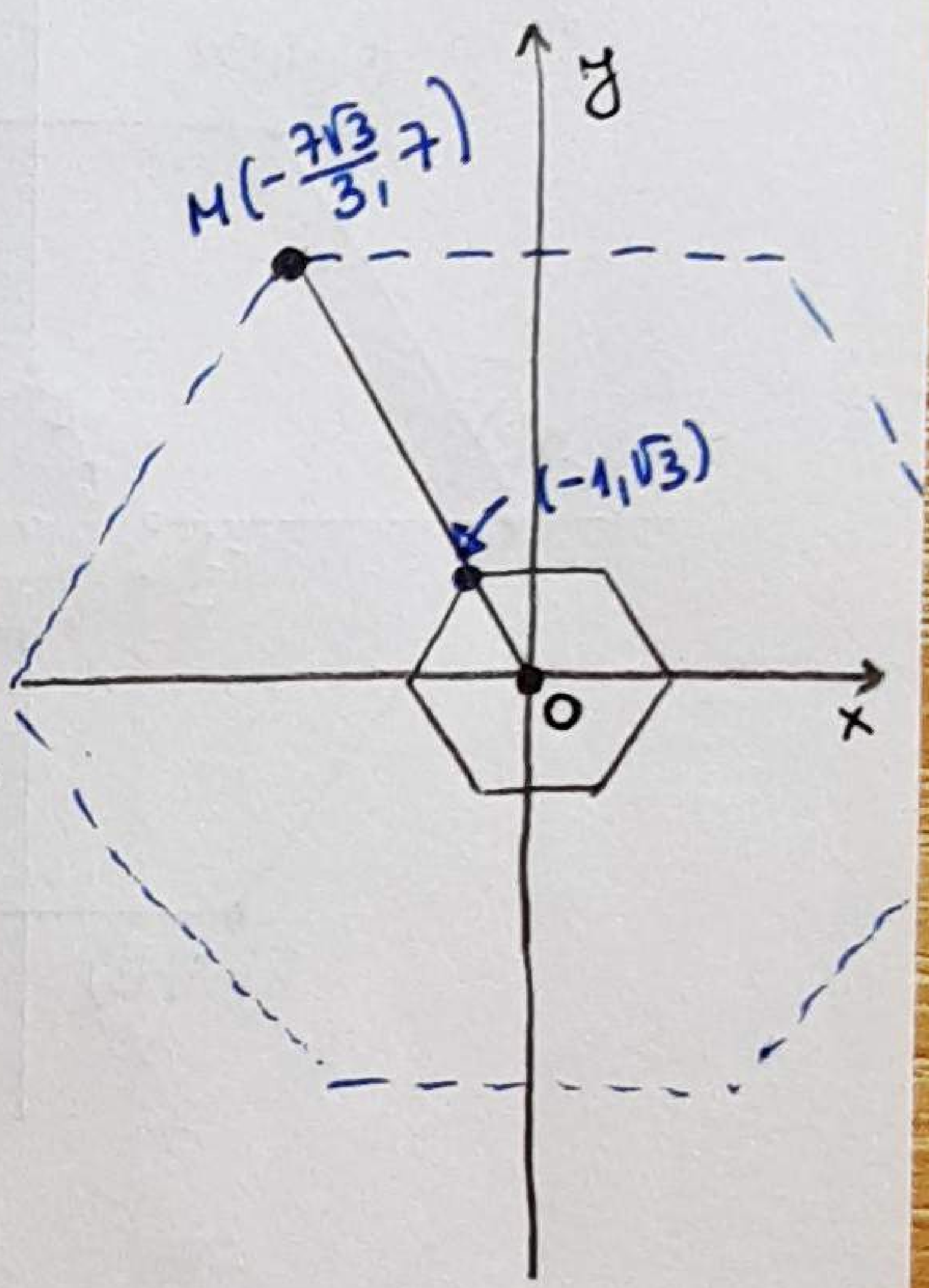
са коеф. $\textcircled{\frac{7}{\sqrt{3}}}$, M је теме

шестоугла $\frac{7}{\sqrt{3}}\cdot K$

сви „мањи" шестоуглови $\lambda\cdot K$

за $\lambda<\frac{7}{\sqrt{3}}$ M не припада

$\Rightarrow \boxed{p_K(M)=\frac{7}{\sqrt{3}}}$



(д) $p_K(u) = ?$, $u\in\mathbb{R}^2$

знамо:

$p_K(u)=h_{K^*}(u)$

тд. ово остаје да вежбу јер већ знамо (из дела (б))

како одређујемо h на шестоуглу (max на екстремалним тачкама)

тд. овај део добијате чим одредите темена од K^* у (а)

(ово би вам оставила за домаћи након часа ☺).