~ 2. Конвексне функције ~

Прелазимо на градиво из друге главе - данас ћемо радити неколико задатака који се односе на потглавља **2.1.** и **2.2.** (на самом часу не бисмо стигли да урадимо више од 2-3, али таман да више провежбамо !!) (урадићемо 4)

$\boxed{1}$ Кажемо да је функција $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ позитивно хомогена ако за $\forall x\in\mathbb{R}^d$ и $\forall\lambda\in\mathbb{R}^+_0$ важи:

$$f(\lambda x)=\lambda\cdot f(x).$$

Доказати:

(а) Ако је $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ позитивно хомогена онда важи еквиваленција:

$$f \text{ конвексна} \iff (\forall x,y\in\mathbb{R}^d)\ f(x+y)\le f(x)+f(y) \quad \circledast$$

(б) $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ је позитивно хомогена $\iff$ надграфик **epi f** је конус у $\mathbb{R}^{d+1}$

(а) За позитивно хомогену функцију f имамо да докажемо два смера:

($\Rightarrow$) нека је f конвексна; намештамо да искористимо конвексност:

$$f(x+y)=f\left(\tfrac{1}{2}\cdot 2x+\tfrac{1}{2}\cdot 2y\right)\underset{\substack{\uparrow\\ \text{конвексност,}\\ \lambda=1/2}}{\le}\tfrac{1}{2}\cdot f(2x)+\tfrac{1}{2}\cdot f(2y)$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{позитивна}\\ \text{хомогеност}\\ f(2x)=2f(x)}}{=}\cancel{\tfrac{1}{2}}\cdot\cancel{2}f(x)+\cancel{\tfrac{1}{2}}\cdot\cancel{2}f(y)=f(x)+f(y)$$

Дакле, заиста важи $\circledast$ ✓

($\Leftarrow$) Сада претпостављамо да важи $\circledast$ и желимо да докажемо конвексност:

$$f((1-\lambda)x+\lambda y)\overset{?}{\le}(1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)\qquad \lambda\in[0,1]$$

- ако је $\lambda=0$ или $\lambda=1$, своди се на $f(x)\le f(x)$ и $f(y)\le f(y)$ ✓
- нека $\lambda\in(0,1)$: процењујемо:

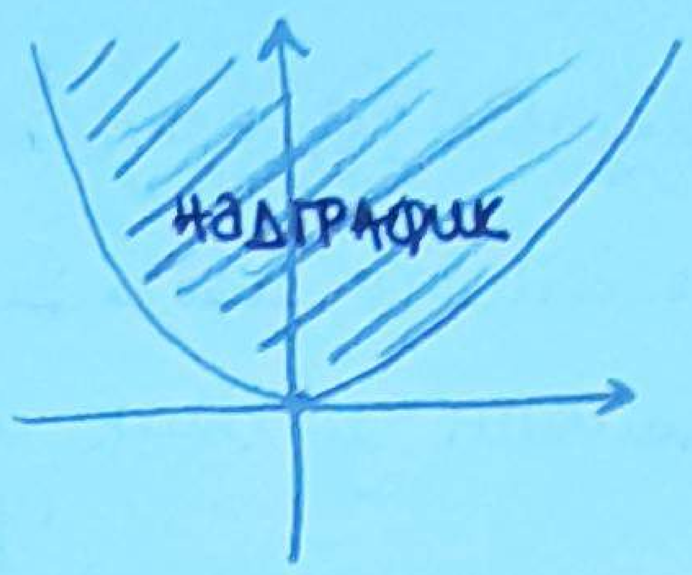
$$f((1-\lambda)x+\lambda y)\underset{\substack{\uparrow\\ \text{услов }\circledast}}{\le}f((1-\lambda)x)+f(\lambda y)\underset{\substack{\uparrow\\ \text{позитивна}\\ \text{хомогеност}}}{=}(1-\lambda)f(x)+\lambda f(y) \quad ✓$$

$\Rightarrow f$ конвексна. ✓

Тиме је завршен доказ за (а).

(б) Поново имамо да докажемо два смера.

Подсетимо се мало појмова:



- $\boxed{\mathrm{epi} f} = \{(x,\mu) \in \underbrace{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}}_{\mathbb{R}^{d+1}} \mid \mu \geq f(x)\}$

- $C \subset \mathbb{R}^{d+1}$ је конус ако за $\forall x \in C$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}^+$ важи $\lambda x \in C$

(⇒) нека је f позитивно хомогена (доказујемо да је epi f конус)

$$\left.\begin{array}{l}(x,\mu)\in \mathrm{epi} f\\ \lambda\in\mathbb{R}^+\end{array}\right\} \overset{?}{\Longrightarrow} \lambda\cdot(x,\mu)\in \mathrm{epi} f$$

ТО ТРЕБА ДОКАЗАТИ!

$$\iff (\lambda x, \lambda\mu)\in \mathrm{epi} f$$

$$\iff \lambda\mu \geq \underbrace{f(\lambda x)}_{\lambda\cdot f(x)}$$

поз. хомогеност

$$\iff \lambda\mu \geq \lambda\cdot f(x)$$

$/:\lambda>0$

$$\iff \mu\geq f(x)$$

$\iff$ $\top$ јер $(x,\mu)\in \mathrm{epi} f$ ✓ $\Rightarrow$ $\boxed{\mathrm{epi} f \text{ јесте конус}}$

(⇐) претпоставимо сада да је epi f конус у $\mathbb{R}^{d+1}$

тј. за $\forall (x,\mu)\in \mathrm{epi} f$ и $\forall\lambda>0$ важи

$$\lambda(x,\mu)=(\lambda x,\lambda\mu)\in \mathrm{epi} f$$

тј. $\mu\geq f(x) \Rightarrow \lambda\mu\geq f(\lambda x)$, за $\forall\lambda>0$ (1)

Доказујемо позитивну хомогеност:

$x\in\mathbb{R}^d$, $\lambda>0$ произвољни $\overset{?}{\Longrightarrow} f(\lambda x)=\lambda f(x)$

- уочимо $\mu = f(x)$ и применимо (1) пошто $f(x)\geq f(x)$:)

  (1) $\Rightarrow$ $\boxed{\lambda\cdot f(x)\geq f(\lambda x)}$ (2)

- желимо да докажемо и $\leq$, па искористимо (1) за:

  знамо да $(\lambda x, f(\lambda x))\in \mathrm{epi} f$ $\xrightarrow[\text{скалар } \frac{1}{\lambda}]{}$ $\left(\frac{1}{\lambda}\cdot\lambda x, \frac{1}{\lambda}\cdot f(\lambda x)\right)\in \mathrm{epi} f$

  тј. $\left(x, \frac{1}{\lambda} f(\lambda x)\right)\in \mathrm{epi} f$

  тј. $f(x)\leq \frac{1}{\lambda}\cdot f(\lambda x) \Rightarrow \boxed{\lambda\cdot f(x)\leq f(\lambda x)}$ (3)

(2),(3) $\Rightarrow$ $\boxed{f(\lambda x)=\lambda f(x)}$ тј. f је позитивно хомогена □

2. $C \subset \mathbb{R}$ конвексан скуп

$f, g : C \to \mathbb{R}$ ненегативне, конвексне, неопадајуће функције

Доказати да је функција $h = f \cdot g : C \to \mathbb{R}$ $\quad h(x) = f(x)\cdot g(x)$ конвексна.

Доказати да исто важи за производ сваких коначно много ненегативних, конвексних и неопадајућих функција.

нека $x, y \in C$ произвољни, нпр. $x<y$, и $\lambda \in [0,1]$ произвољно

желимо да докажемо:

$$\underbrace{f((1-\lambda)x+\lambda y)\cdot g((1-\lambda)x+\lambda y)}_{L} \le \underbrace{(1-\lambda) f(x) g(x) + \lambda f(y) g(y)}_{D} \qquad (*)$$

на основу конвексности f и g:

$$\left.\begin{aligned} f((1-\lambda)x+\lambda y) &\le (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y) \\ g((1-\lambda)x+\lambda y) &\le (1-\lambda) g(x) + \lambda g(y) \end{aligned}\right\}$$

а због ненегативности кад помножимо претх. неједнакости чува се знак па важи:

$$L \le \big((1-\lambda) f(x) + \lambda f(y)\big)\big((1-\lambda) g(x) + \lambda g(y)\big)$$

$$= \underbrace{(1-\lambda)^2 f(x) g(x) + \lambda^2 f(y) g(y) + (1-\lambda)\cdot\lambda\cdot\big(f(x)g(y)+f(y)g(x)\big)}_{D_1}$$

дакле, $L \le D_1$, па да бисмо доказали да важи $L \le D$, довољно је доказати да важи $D_1 \overset{?}{\le} D$. Посматрајмо зато разлику (групишемо лепо чланове):

$$D - D_1 = \Big(\underbrace{(1-\lambda)-(1-\lambda)^2}_{=\lambda-\lambda^2}\Big)\cdot f(x)g(x) + (\lambda-\lambda^2) f(y)g(y) - (\lambda-\lambda^2)\big(f(x)g(y)+f(y)g(x)\big)$$

$= \lambda - \lambda^2$ тачно ☺

$$\Rightarrow \quad D - D_1 = (\lambda-\lambda^2)\cdot\big(f(x)g(x)+f(y)g(y) - f(x)g(y) - f(y)g(x)\big)$$

$$= \underbrace{(\lambda-\lambda^2)}_{\substack{\ge 0 \text{ јер} \\ \lambda\in[0,1]}}\cdot\underbrace{(f(x)-f(y))}_{\substack{\le 0 \text{ јер} \\ f \text{ неопадајућа}}}\cdot\underbrace{(g(x)-g(y))}_{\substack{\le 0 \text{ јер} \\ g \text{ неопадајућа}}} \ge 0$$

$\Rightarrow D \ge D_1$

како $L \le D_1$

$\Rightarrow \boxed{L \le D}$

$\Rightarrow$ важи $(*)$ па је $h = f\cdot g$ конвексна ✓

Други део - за производ коначно много се показује само индукцијом по броју функција ☺

□

3. Доказати да не постоји ограничена конвексна функција $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дефинисана на читавом $\mathbb{R}^n$, различита од константе.

- Прво приметимо да је довољно показати за $n=1$:

јер: ако $\exists$ неконстантна фја $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ која је конвексна и ограничена

уочимо a, b тд. $f(a) \neq f(b)$

уочимо праву кроз a и b → права p

$\Rightarrow$ $f|_p : p \to \mathbb{R}$ је ограничена и конвексна, а није константна !

ова је $\approx \mathbb{R}$ рестрикција конв. фје ✓

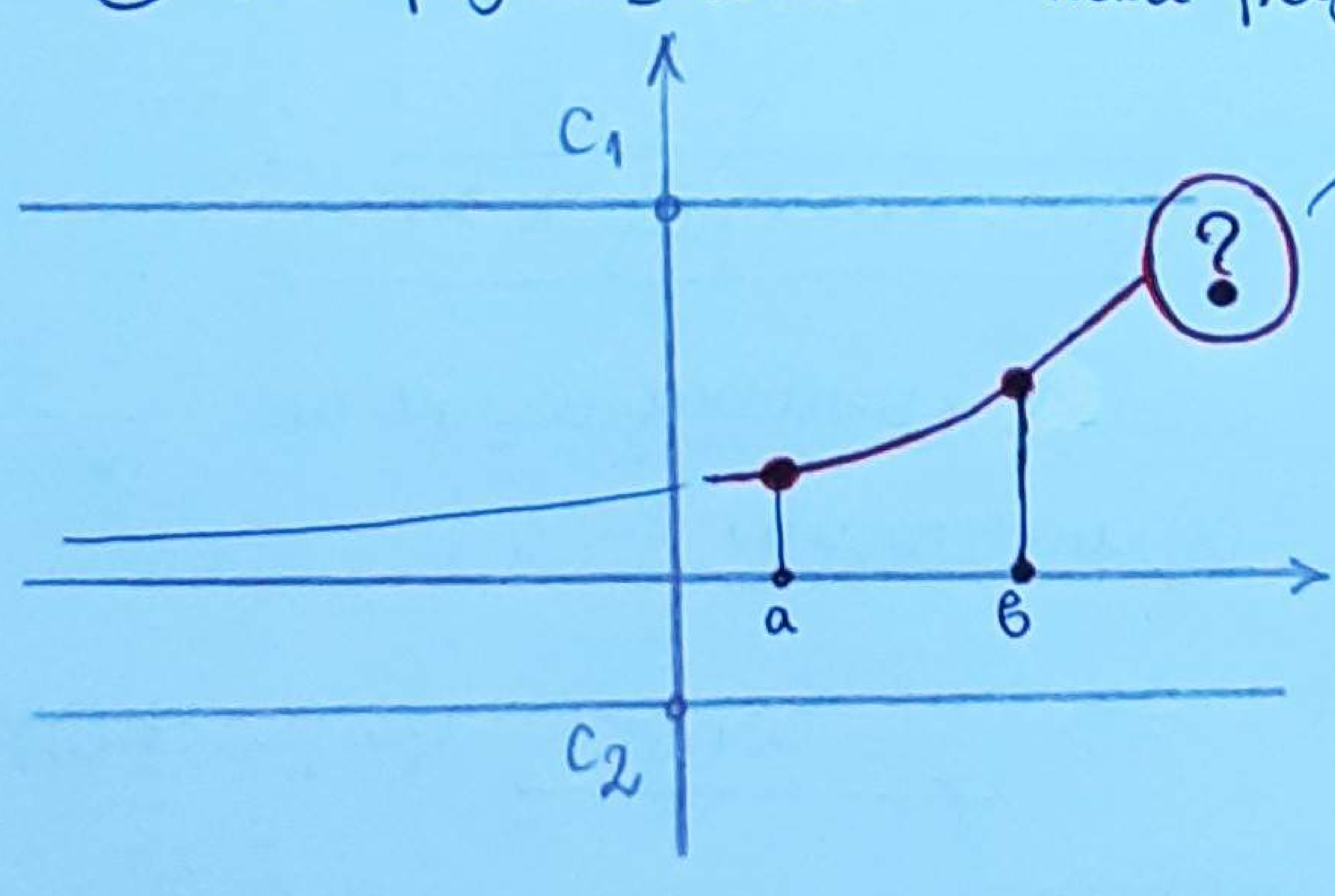
Дакле, ако покажемо тврђење за $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, доказали смо и за $\forall n$

- за $n=1$:

претпоставимо супротно: $\exists$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ конв. и ограничена, није константна

тј. $\exists a < b$ $f(a) \neq f(b)$

☺ како размишљамо: нека решимо баш $f(a) < f(b)$



делује да ћемо добити контрадикцију за $x \to +\infty$

јер да би фја наставила да буде конвексна, делује да неће моћи да буде ограничена у $+\infty$

(да смо узели $f(a) > f(b)$ проблем би био у $-\infty$)

Хајде то да формално докажемо ☺:

нека је $x > b$ произвољна тачка:

користићемо карактеризацију конвексности из леме 2.2. (књига, стр. 53); она говори о коефицијентима правца сечица ← ВАЖНА ЛЕМА !

$$f \text{ конвексна} \xRightarrow{\text{лема 2.2.}} \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(x)-f(b)}{x-b}, \text{ за } \forall x > b$$

средимо мало овај израз:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(x)-f(b)}{x-b}, \quad \forall x \in (b, +\infty)$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-b)\cdot f(b) - (x-b)\cdot f(a) \leq (b-a)\cdot f(x) - (b-a)\cdot f(b)$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-a)\cdot f(b) - (x-b)\cdot f(a) \leq (b-a)\cdot f(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x-a)\cdot f(b) - (x-b)\, f(a)}{b-a} \leq f(x), \quad \forall x > b$$

циљ нам је да докажемо да $f(x)$ не можемо ограничити одозго, а то ћемо постићи ако докажемо да израз на левој страни може да буде произвољно велики за довољно велико x. Средимо га да се то лакше види

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(b-a)\cdot f(b) + (x-b)\,(f(b)-f(a))}{b-a} \leq f(x), \quad \forall x > b$$

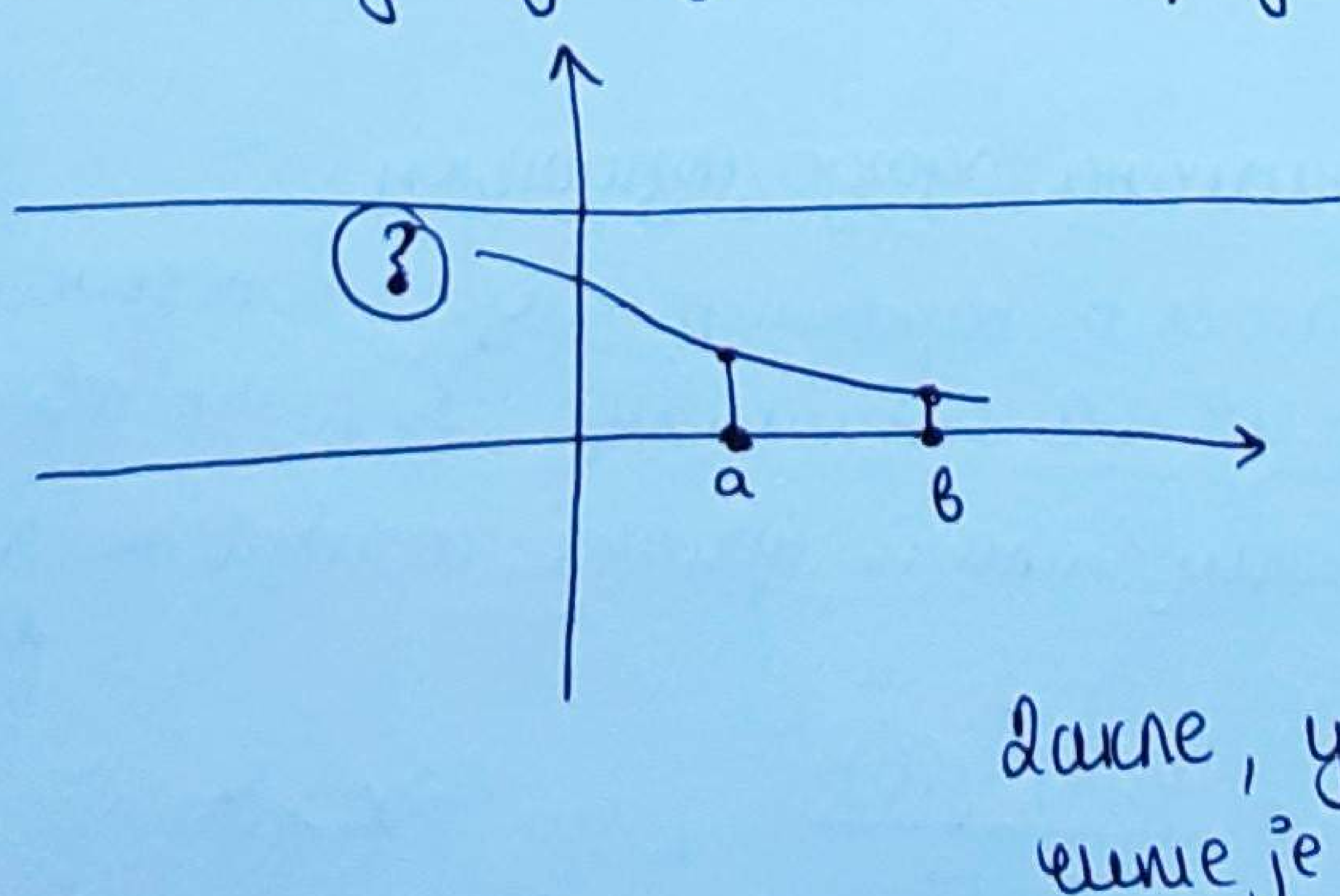
$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\underbrace{f(b)}_{\text{конст.}} + \underbrace{\frac{x-b}{b-a}}_{\to +\infty \text{ кад } x \to +\infty} \cdot \underbrace{(f(b)-f(a))}_{\substack{c>0 \\ \text{константа}}}}_{\to +\infty \text{ кад } x \to +\infty} \leq f(x), \quad \forall x > b$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f(x) \to +\infty \text{ кад } x \to +\infty}$$

што је контрадикција са ограниченошћу f !

$$\Rightarrow \quad \boxed{f \equiv \text{const}} \quad (\text{за } f(a) < f(b))$$

- случај $f(a) > f(b)$ се доказује потпуно аналогно, само тада добијамо контрадикцију за $x \to -\infty$:



урадити за вежбу !
(важно за проверу разумевања леме 2.2)

Дакле, у сваком случају $\boxed{f \equiv \text{const}}$ чиме је доказ завршен. □

$\boxed{4.}$ Одредити реалне параметре a, b, c за које је функција:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = a \cdot e^{2x} + b \cdot e^{x} + c$ конвексна

Какви год да су параметри a, b и c, f је диференцијабилна 2 пута, па на основу тврђења 2.5. (стр. 56.) знамо:

$$f \text{ конвексна } \Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \text{ за све } x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 2a \cdot e^{2x} + b \cdot e^{x}$$

$f''(x) = 4a \cdot e^{2x} + b \cdot e^{x}$ ← видимо да c не утиче на конвексност :)

$f''(x) \geq 0, \forall x \Leftrightarrow 4a \cdot e^{2x} + b \cdot e^{x} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ $\quad / : e^{x} \ (e^{x} > 0)$

$\Leftrightarrow 4 \cdot a \cdot e^{x} + b \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ $\circledast$

Поделимо на неколико случајева:

1. ако $a = 0$: $\circledast \Leftrightarrow b \geq 0$ $\Rightarrow$ сви $\{(0, b, c) \mid b \geq 0, c \in \mathbb{R}\}$ су задовољавајући параметри

2. ако $a < 0$: $\circledast \Leftrightarrow -4|a| \cdot e^{x} + b \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

   $\Leftrightarrow b \geq \underbrace{\underbrace{4 \cdot |a|}_{>0} \cdot e^{x}}_{\to +\infty,\ x \to +\infty}, \forall x \in \mathbb{R}$

   десна страна $\to +\infty$ кад $x \to +\infty$ па не постоји такво b

   $\Rightarrow f$ не може бити конвексна за $a < 0$

3. ако $a > 0$: $\boxed{3.1}$ ако је и $b \geq 0$ $\circledast$ је очито задовољена

   $\Rightarrow$ сви $\{(a, b, c) \mid a > 0, b \geq 0, c \in \mathbb{R}\}$ су добри параметри

   $\boxed{3.2}$ ако $b < 0$ доказаћемо да f није конвексна:

   $\circledast$: $4a \cdot e^{x} - |b| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

   $\underbrace{4a \cdot e^{x}}_{\to 0,\ x \to -\infty} \geq |b|, \forall x \in \mathbb{R}$

   $\Rightarrow$ не постоји позитиван број $(|b| > 0)$ који ограничава одоздо $4 \cdot a \cdot e^{x}$ на $\mathbb{R}$

   $\Rightarrow f$ није конвексна.

Све заједно, закључујемо да су тражени параметри:

$$\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^{3} \mid a \geq 0, b \geq 0, c \in \mathbb{R}\}$$

□