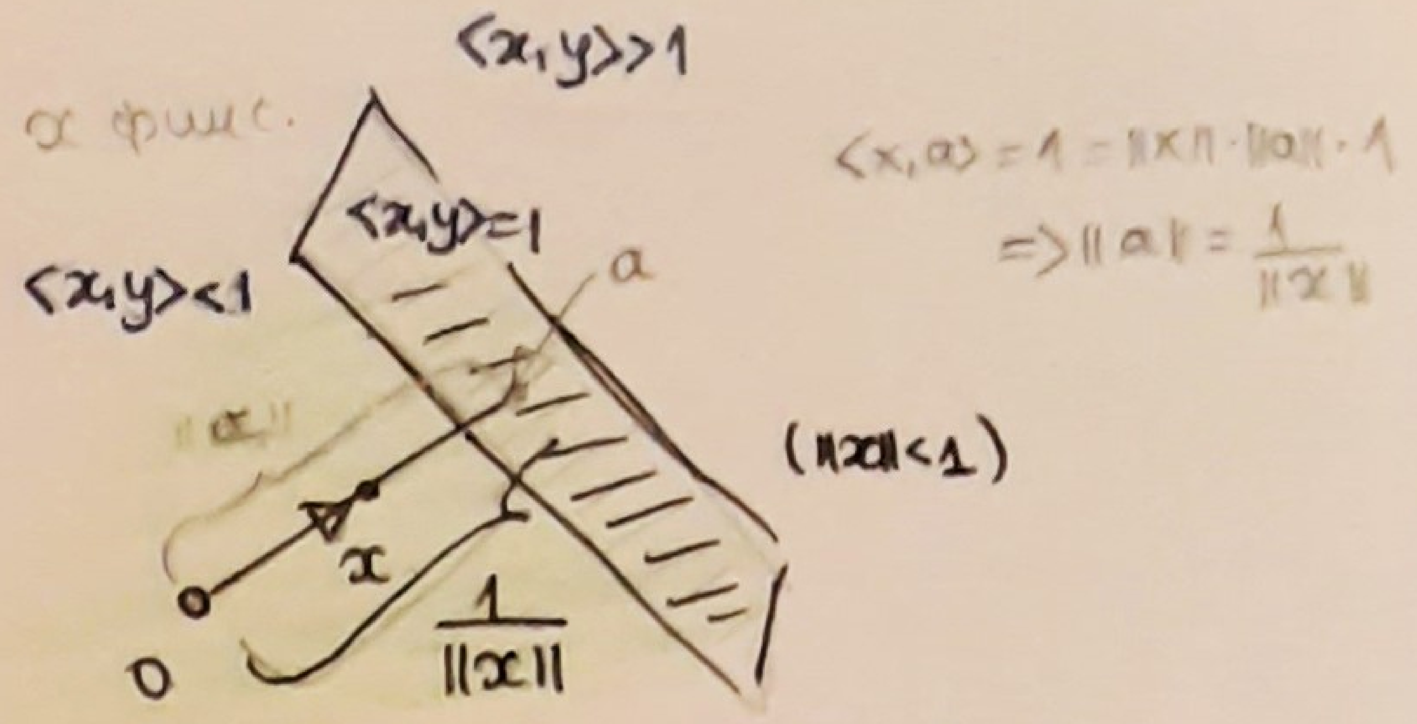
1.5. Поларни скупови

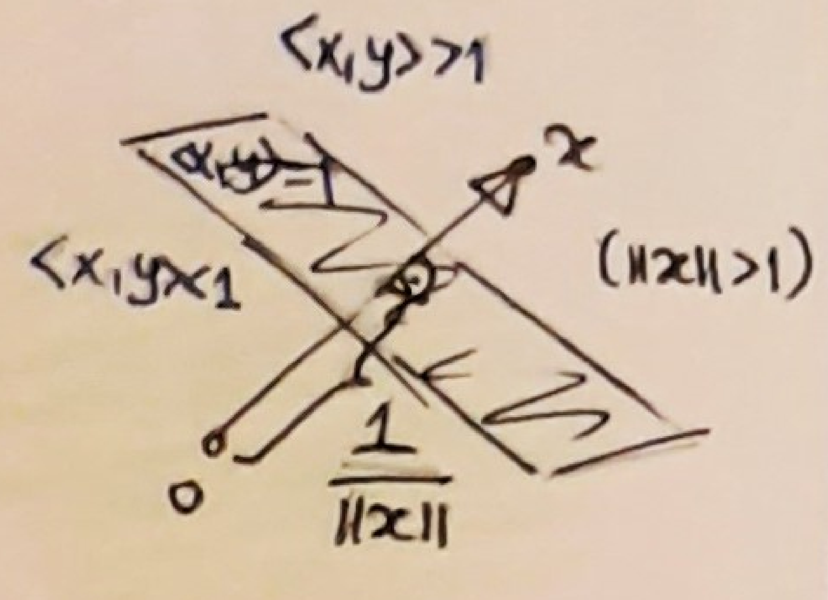
$S \subset \mathbb{R}^n$
$S \neq \emptyset$

$S^* = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid (\forall x \in S)\ \langle x, y \rangle \leq 1 \}$ ПОЛАРНИ СКУП СКУПА S

$= \bigcap_{x \in S} \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y \rangle \leq 1 \}$



ТВ $S \neq \emptyset \rightarrow S^*$ конвексан затворен, $0 \in S^*$



Примери: • $\boxed{S = \{x\}}$

$x \neq 0 \rightarrow S^*$ је затв. полупростор − на растојању $\frac{1}{\|x\|}$, садржи 0

$x = 0 \rightarrow S^* = \mathbb{R}^n$

• $\boxed{S = [a,b]}$ интервал у $\mathbb{R}^n$

$S^* = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \lambda \in [0,1])\ \langle y, (1-\lambda)a + \lambda b \rangle \leq 1 \}$

$= \{ y \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \lambda \in [0,1])\ (1-\lambda)\langle y, a \rangle + \lambda \langle y, b \rangle \leq 1 \}$

$= \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, a \rangle \leq 1 \} \cap \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, b \rangle \leq 1 \}$ − пресек два полупростора

• $\boxed{S \text{ − потпростор}}$ => $\boxed{S^* = S^\perp}$

$\supset$: јер за $y \in S^\perp$, $x \in S$ $\langle x, y \rangle = 0$ $S^* \supset S^\perp$

$\subset$: $y \in S^*$

ако за њего $x \in S$ $\langle x, y \rangle \neq 0$

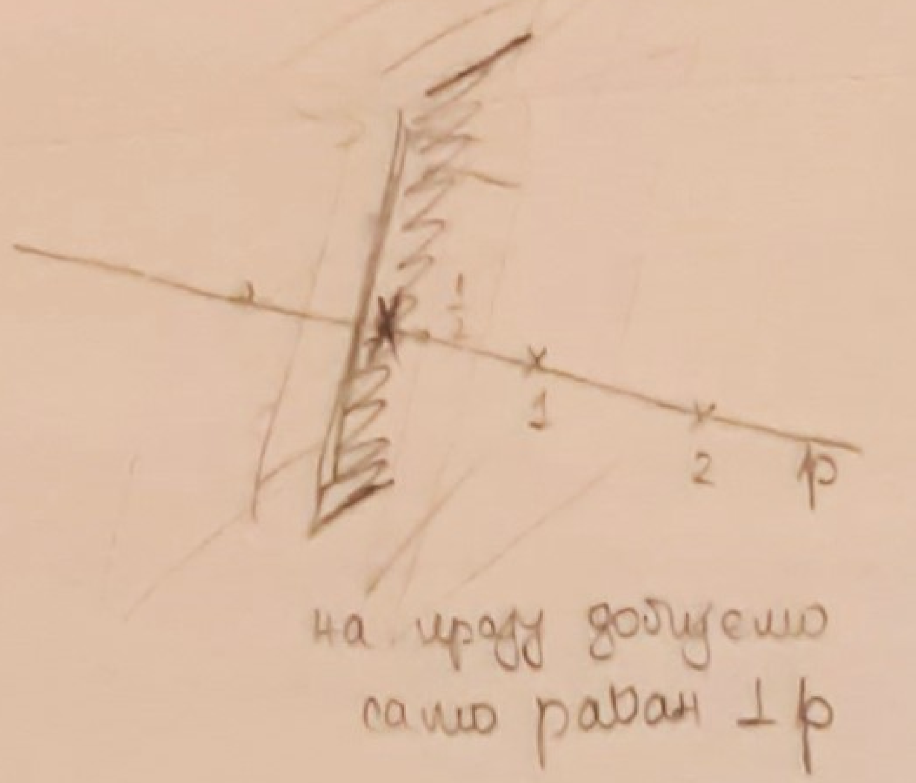
⇓

$\lambda x \in S$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ јер је потпростор

може се изабрати λ тд.

$\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle > 1 \Rightarrow y \notin S^*$ ↯

$\Rightarrow S^* \subset S^\perp$ □

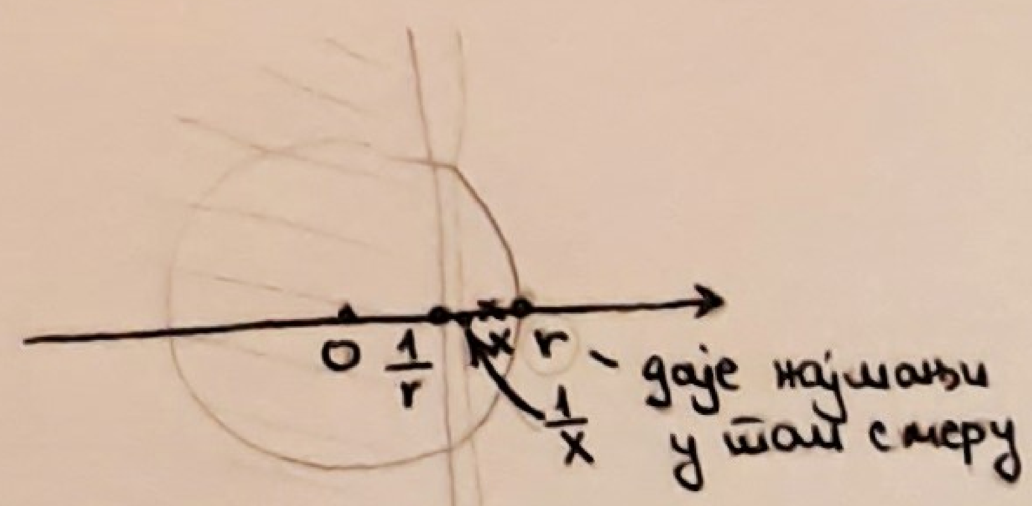


• $\boxed{S = K[0,r]}$ => $\boxed{S^* = K[0, \frac{1}{r}]}$

$\supset$: $x \in K[0,r]$, $y \in K[0,\frac{1}{r}]$ $\langle x, y \rangle \leq \|x\| \cdot \|y\| \leq r \cdot \frac{1}{r} = 1$ ✓

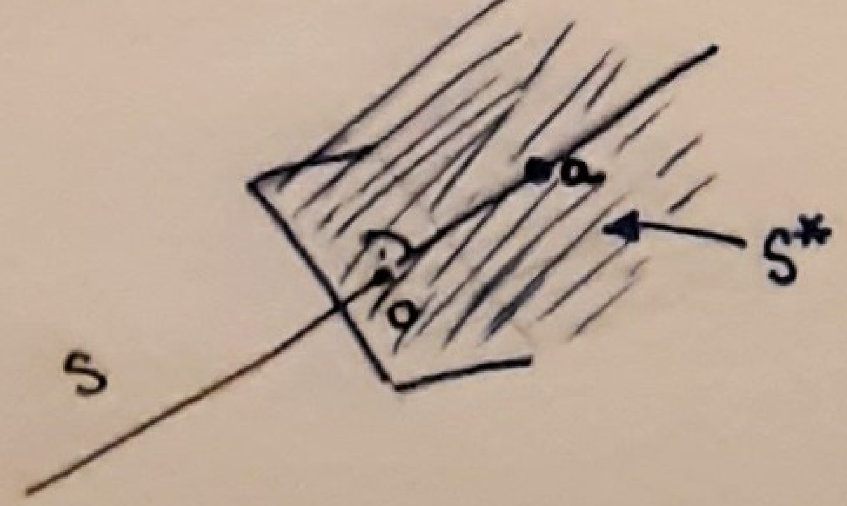
$\subset$: $y \in S^*$ произв. → нормирамо на r: $r \cdot \frac{y}{\|y\|} \in K[0,r]$

$\langle \underbrace{\frac{r}{\|y\|} \cdot y}_{\in S}, \underbrace{y}_{\in S^*} \rangle \leq 1 \Rightarrow r \cdot \|y\| \leq 1 \Rightarrow \|y\| \leq \frac{1}{r} \Rightarrow y \in K[0, \frac{1}{r}]$ ✓ □



• $\boxed{S \text{ полуправа } S = \{\lambda a \mid \lambda \leq 0\}}$ $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$S^* = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \lambda \leq 0)\ \langle \lambda a, y \rangle \leq 1 \} = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, y \rangle \geq 0 \}$ − затворени полупростор



~ Битна тврђења која користимо ~

$\boxed{\text{ТВ 5.3.}}$ S, S_1, S_2, S_i – непразни у $\mathbb{R}^n$. Важи:

(i) $\left(\mathrm{conv}\left(\bigcup_{i\in I} S_i\right)\right)^* = \bigcap_{i\in I} S_i^*$

(ii) $S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow S_2^* \subseteq S_1^*$

(iii) $\lambda > 0 \Rightarrow (\lambda S)^* = \frac{1}{\lambda} S^*$

$\boxed{\text{ТВ 5.4.}}$ $\left.\begin{array}{l} C \subset \mathbb{R}^n \\ \text{компактан, конвексан} \\ 0 \in \mathrm{int}\, C \end{array}\right\} \Rightarrow$ C^* компактан и $0 \in \mathrm{int}\, C^*$

(C^* је свакако конвексан јер је $\cap$ полупростора)

Применимо тврђење:

$\boxed{\text{Т 5.5.}}$ $A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow A^{**} = \mathrm{cl}(\mathrm{conv}(A \cup \{0\}))$

$\boxed{\text{Посл 5.6.}}$ $C \subset \mathbb{R}^n$ непразан:

(i) ако је C затв., конвексан и садржи 0 $\Rightarrow$ $C^{**} = C$

(ii) $C^{***} = C^*$ (увек) – ово се доказује лако јер C^* задовољава услове за (i) 🙂

даклe: $C^* = (\mathrm{cl}(\mathrm{conv}(C \cup \{0\})))^*$
увек па је то један начин да одредимо $\underline{\underline{C^*}}$!

$\boxed{\text{Посл 5.7.}}$ $\{C_i \mid i \in I\}$ фамилија непразних затв. конв. скупова у $\mathbb{R}^n$ који садрже 0.

Тада: $\left(\bigcap_{i\in I} C_i\right)^* = \mathrm{cl}\left(\mathrm{conv} \bigcup_{i\in I} C_i^*\right)$

Следе теореме из поларних скупова конвексних конуса – може бити на кол./испиту све до полиедралних и коначно генерисаних конуса (то није рађено на предавањима, па неће доћи ни на кол/испиту.)

~ Поларни скупови - вежбе ~

(За задатке ће нам веома бити важна тврђења из теорије (као и увек ☺), и примери са почетка главе 1.5. из књиге !)

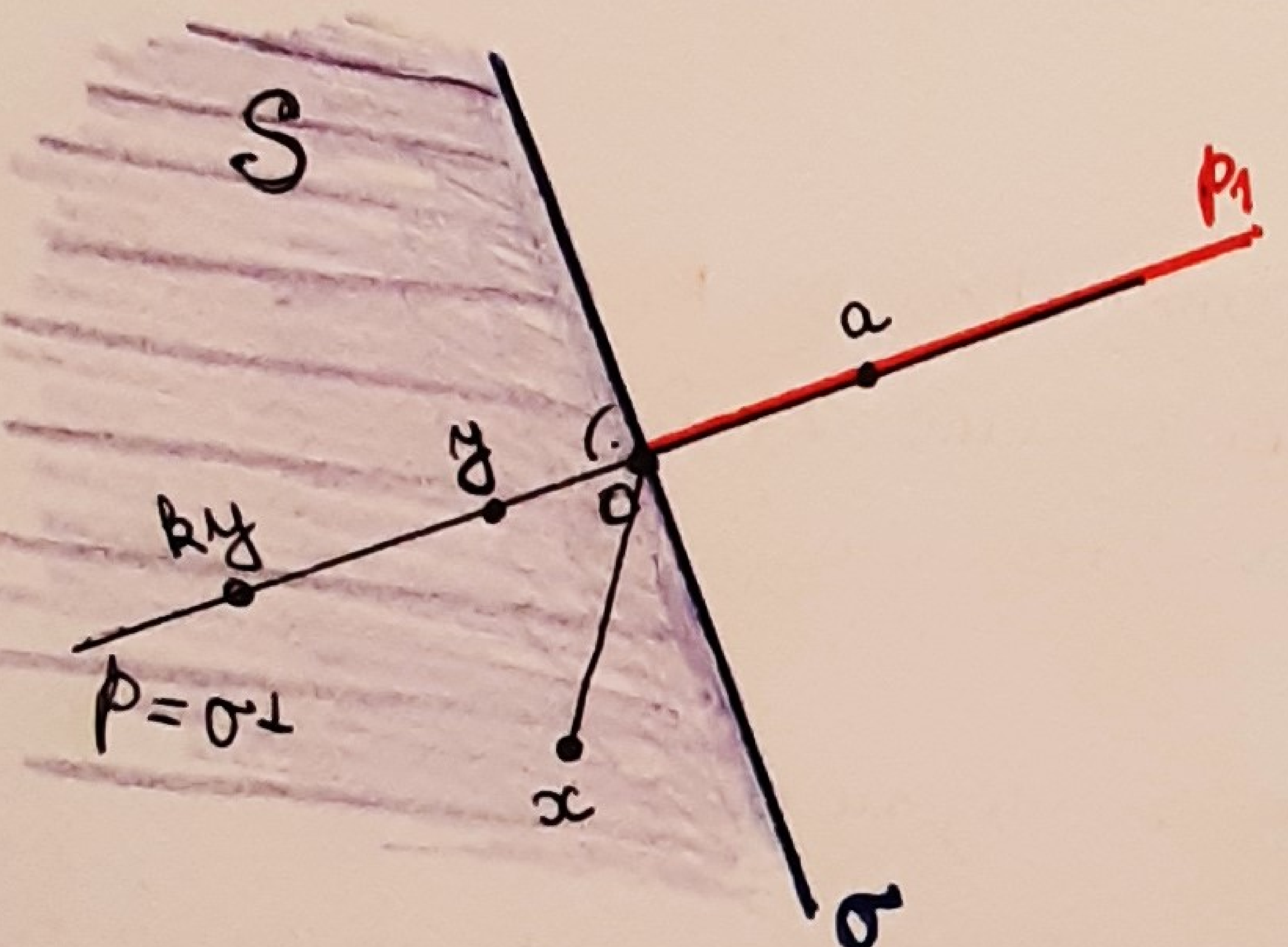
Имамо један пример и једну лему, а затим ћемо радити задатке из књиге на крају главе 1.5.

Пример 1: S - затворен полупростор у $\mathbb{R}^n$ такав да 0 припада граничној хиперравни од S. Одредити S^*

Нека је σ хиперраван која ограничава S → $0 \in \sigma$

σ је потпростор у $\mathbb{R}^n$, па на основу примера из књиге $\Rightarrow \boxed{\sigma^* = \sigma^\perp}$

$\sigma^\perp$ је заправо права p која је $\perp$ на σ, и садржи 0



$\sigma \subset S \xRightarrow{\text{TB. 5.3.}} S^* \subset \sigma^*$

$\Rightarrow \boxed{S^* \subset p}$ (1)

Докажимо да је S^* полуправа из тачке 0 на правој p, која није садржана у S:

$p_1 = \{\lambda a \mid \lambda \geq 0\}$ за неко (произв.) $a \in p \setminus S$

полуправа за коју тврдимо да је S^* (на слици црвена)

(тачка $a \in p \setminus S$ је произвољно изабрана, само да бисмо лакше записали p_1 ☺)

- $p_1 \overset{?}{\subset} S^*$: уочимо произв. тачку са p_1 → облика је $\lambda \cdot a$, за неко $\lambda > 0$
  нека је $x \in S$ произвољна
  тада $\langle x, \lambda a \rangle \leq 0 < 1$ јер је $\measuredangle \langle x, \lambda a \rangle$ туп или прав $\Rightarrow \boxed{p_1 \subset S^*}$ (2)

- докажимо да тачке $y \in p \setminus p_1$ нису у S^*:
  $y \in p \setminus p_1$ произв.
  изаберимо $k > \frac{1}{\|y\|^2}$, $k \in \mathbb{N}$
  пошто $k > 0$, $y \in S \Rightarrow ky \in S$

  $\langle \underbrace{ky}_{\in S}, y \rangle = k \cdot \|y\|^2 > 1$

  $\Rightarrow y \notin S^*$ (по дефиницији S^*, јер са неком тачком из S, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ је > 1)

  $\Rightarrow \boxed{S^* \cap (p \setminus p_1) = \emptyset}$ (3)

(1), (2), (3) $\Rightarrow \boxed{S^* = p_1}$

II НАЧИН (елегантнији, ако смо учили теорију :))

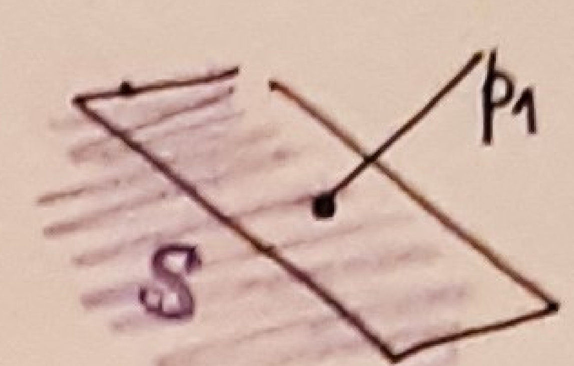
Знамо да ако је q полуправа која садржи 0, онда је

q^* = затворени полупростор коме је гранична хиперраван $\perp$ на q кроз 0, а не садржи q

(последњи пример на почетку главе 1.5.)

Дакле, за наш S уочимо полуправу p_1 као у првом делу и знамо да важи:

$$p_1^* = S$$



p_1 је затворен скуп, конвексан, $0 \in p_1$

тврђење 5.6. (i) $\Rightarrow (p_1^*)^* = p_1$

тј. $\boxed{S^* = p_1}$ □

* А шта се дешава ако гранична хиперраван полупростора не садржи 0 :) ?
Ако $0 \in \operatorname{int} S$, одговор даје следећа лема:

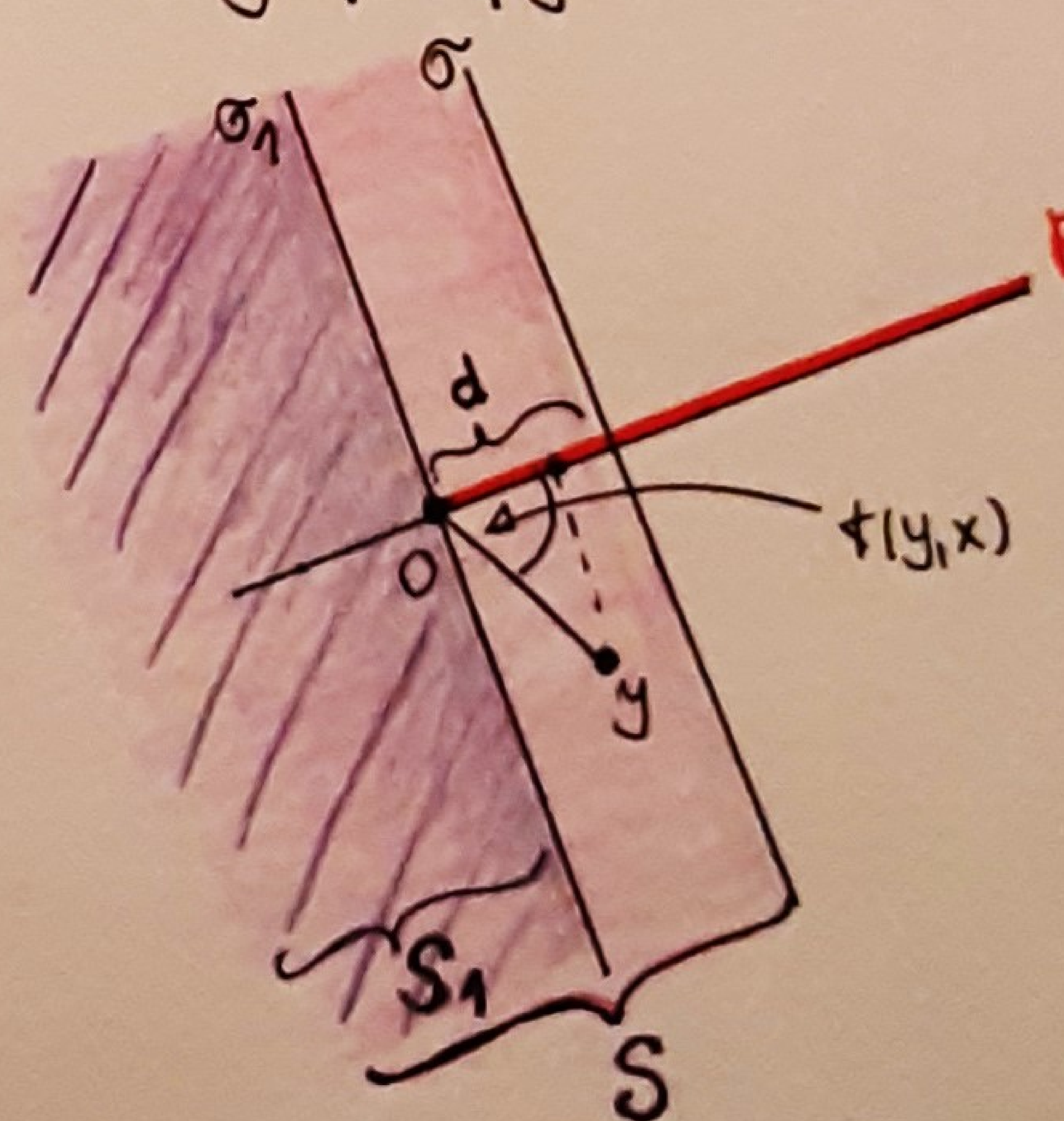
Лема 2 S - затворен полупростор, $0 \in \operatorname{int} S$
σ - гранична хиперраван од S, на растојању $d>0$ од коорд. почетка
тада је S^* дуж $[0,A]$ где је A тачка нормале из 0 на σ, на растојању $\frac{1}{d}$ од 0 ($\|A\|=\frac{1}{d}$) (као на слици)

Скица доказа (нећемо све детаље :))

- нека је S_1 затв. полупр. чија гранична хиперраван σ_1 садржи 0, и $\sigma_1 \parallel \sigma$

$S \supset S_1$ знамо да је $S_1^* = p_1$ где је p_1 полуправа као у примеру 1

$S \supset S_1 \Rightarrow S^* \subset S_1^*$ тј. $\boxed{S^* \subset p_1}$



- докажимо да за $x \in p_1$ важи:

(1) ако $\|x\| \le \frac{1}{d} \Rightarrow x \in S^*$

(2) ако $\|x\| > \frac{1}{d} \Rightarrow x \notin S^*$

(1): $\|x\| \le \frac{1}{d}$: уочимо произвољно $y \in S$

$$\langle y,x\rangle = \|y\|\cdot \cos\sphericalangle(y,x)\cdot\|x\|$$

- уколико $y \in S_1$ $\sphericalangle(y,x)$ је туп или прав па му је $\cos \le 0$, одакле $\langle y,x\rangle \le 0 < 1$ ✓
- уколико $y \in S\setminus S_1$ (као на слици десно)

$$\underbrace{\|y\|\cos\sphericalangle(y,x)}_{\le d \text{ јер је то пројекција на дуж која је } \le d}\cdot\underbrace{\|x\|}_{\le\frac{1}{d}} \le d\cdot\frac{1}{d} = 1 \ ✓ \qquad \Rightarrow \langle y,x\rangle \le 1 \ \ \forall y\in S \Rightarrow \underline{x \in S^*} \ ✓$$

(2): $\|x\| > \frac{1}{d}$

довољно је узети $y=b$ – пресечна тачка p_1 и σ, као на слици $\rightarrow \|b\| = d$

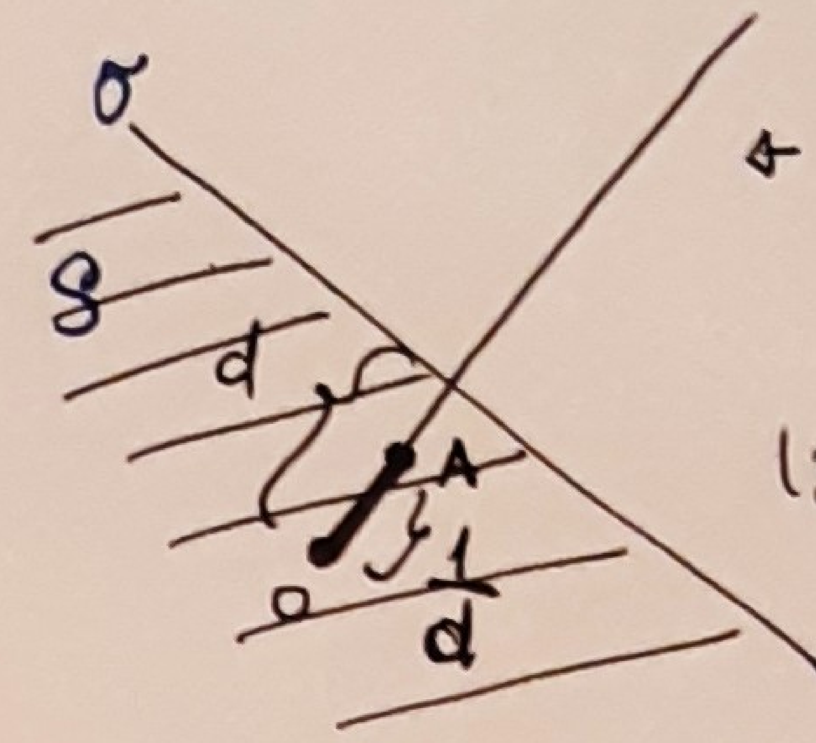
$$\langle x, b\rangle = \underbrace{\underbrace{\|x\|}_{>\frac{1}{d}} \cdot \underbrace{\cos\measuredangle(x,b)}_{0} \cdot \underbrace{\|b\|}_{d}}_{1} > \frac{1}{d} \cdot d = 1$$

$\Rightarrow$ $x \notin S^*$

Сада из $S^* \subset p_1$, (1) и (2) $\Rightarrow$ $\boxed{S^* = [0, A]}$

$(A \in p_1, \|A\| = \frac{1}{d})$

$\square$



← ово је слика за $d>1$ па $\frac{1}{d}<d$ (за $d<1$ важи $\frac{1}{d}>d$)

Сада прелазимо на задатке из књиге.

1. Одредити скуп у равни поларан троуглу коме су темена у тачкама $(1,0), (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

ВЕОМА ВАЖАН

Означимо овај троугао са T, лако се види да је T једнакостраничан.

представимо:

$$T = conv\{A, B, C\}$$

темена:

$A = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}),\ B = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}),\ C = (0,1)$

$$T = conv(\{A\} \cup \{B\} \cup \{C\})$$

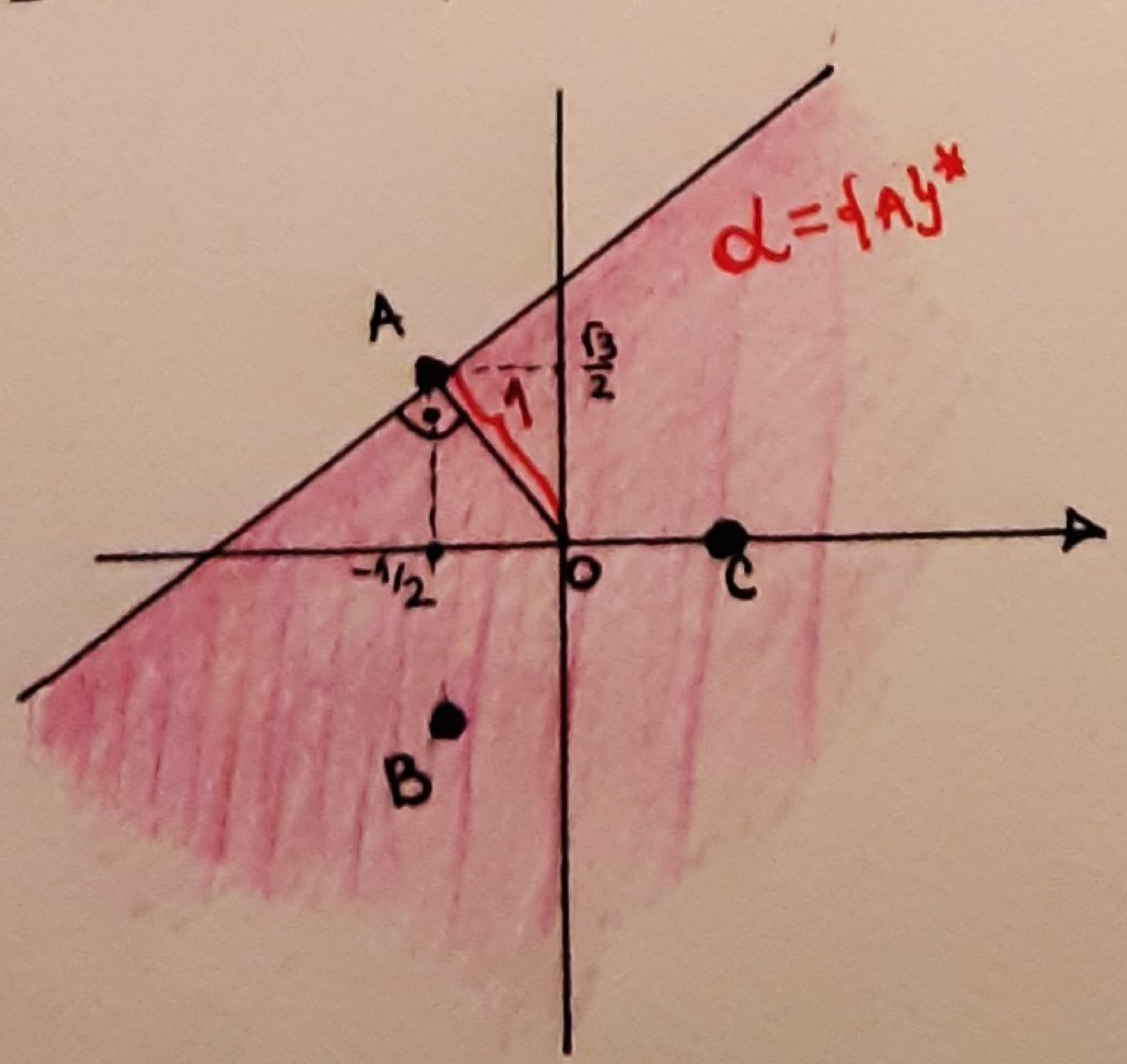
тврђење 5.3.

$$\Rightarrow \quad T^* = \{A\}^* \cap \{B\}^* \cap \{C\}^*$$

← а дуале тачки знамо да одредимо

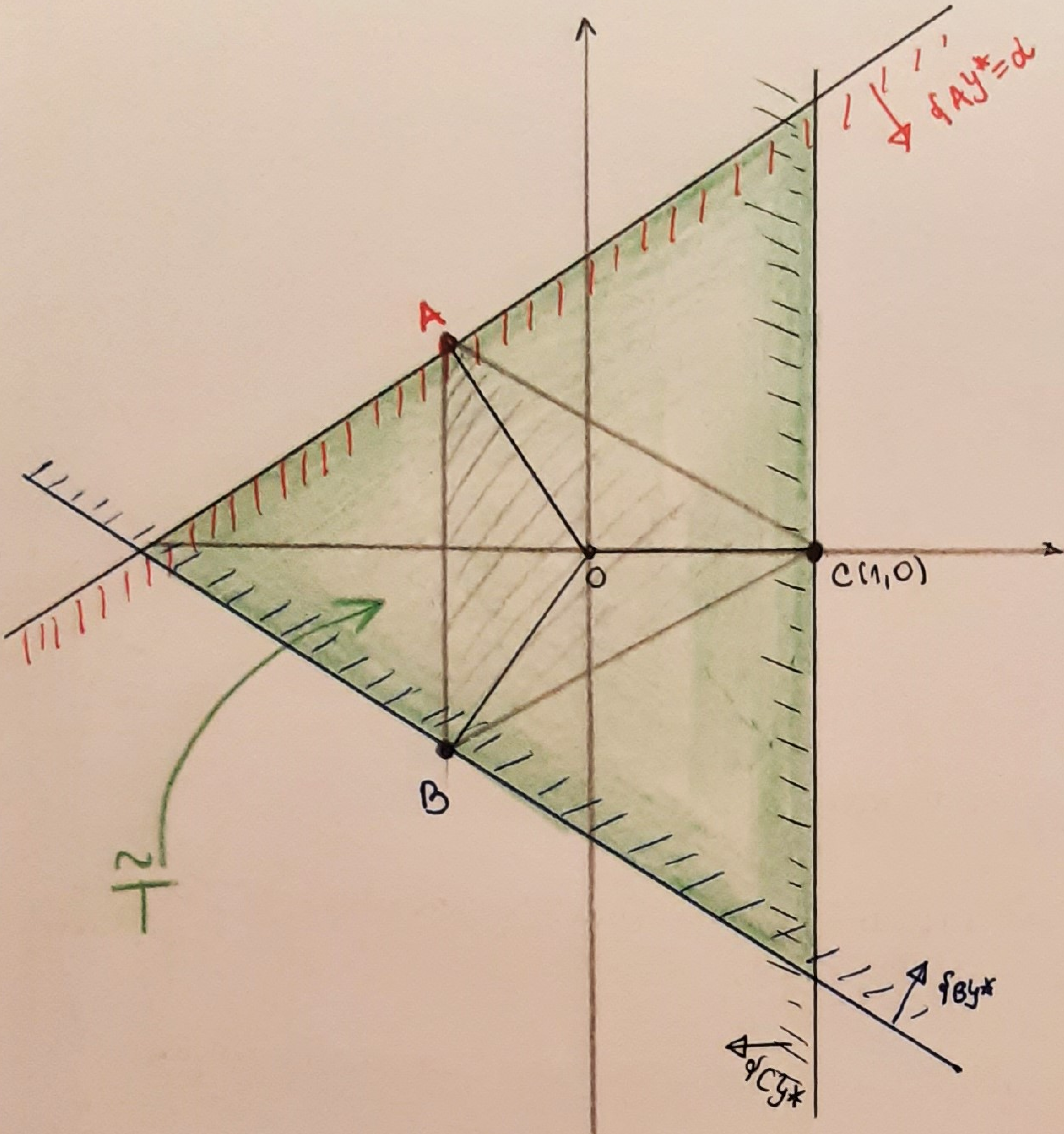
$\{A\}^*$ = полураван α која је нормална на OA (гр. права $\perp OA$) на растојању $\frac{1}{\|A\|}$ од O, садржи O

пошто $\|A\| = 1$, то је тачно полураван кроз A ☺ (само коинциденција у овом задатку, пазити $\|A\|$!)



Како су и B и C норме 1, $\{B\}^*$ и $\{C\}^*$ су полуравни чије су граничне праве нормалне на OB, OC, редом, на растојању $\frac{1}{\|B\|} = 1$, $\frac{1}{\|C\|} = 1$ од O, редом

$\Rightarrow$ T^* је пресек полуравни $\{A\}^*, \{B\}^*, \{C\}^*$ као на следећој слици:



Видимо да је пресек такође троугао: $\tilde{T}$ а његова темена се добијају као пресеци одговарајућих правих (урадити за вежбу, тај рачун треба исписати на испиту!?), то су тачке

$(-2,0),\ (1,\sqrt{3}),\ (1,-\sqrt{3})$

$$\boxed{T^* = \tilde{T}}$$

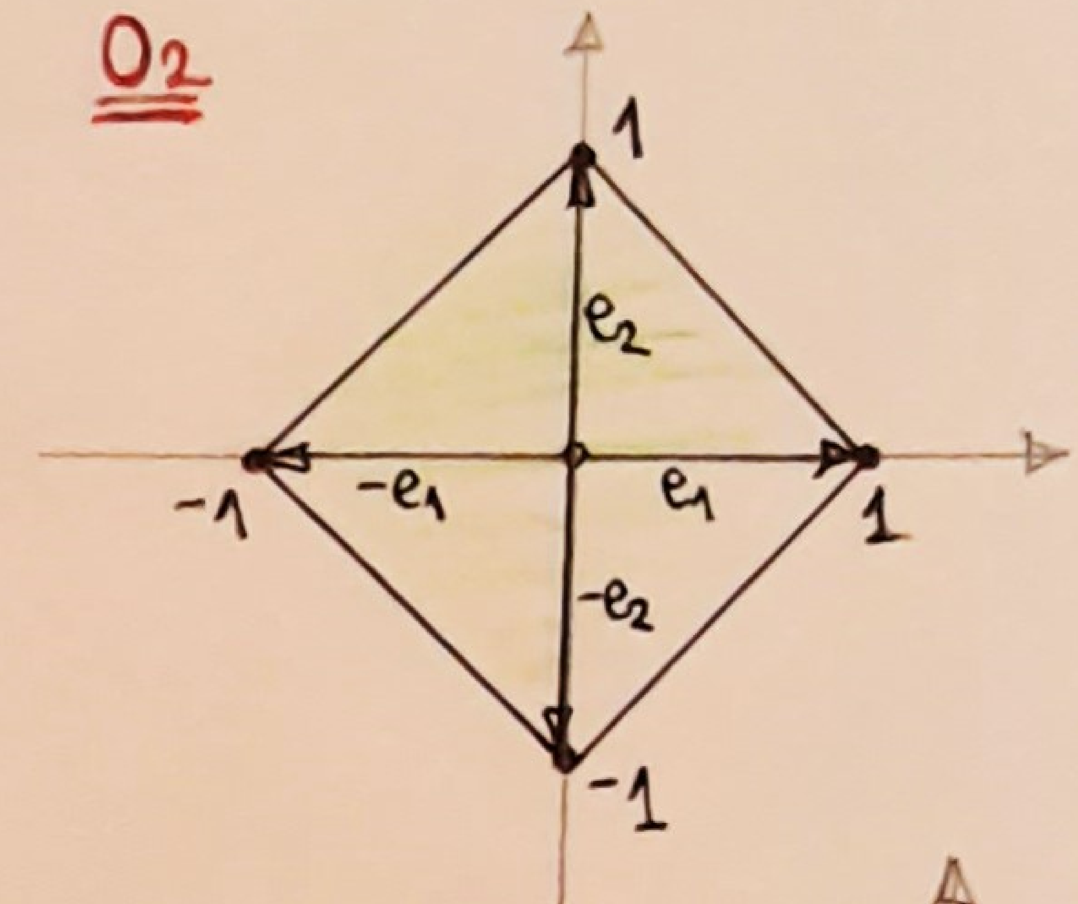
$\square$

2. Хиперкоцка $K_n = \{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid \max_{1\le i\le n}|x_i|\le 1\}$ и

хипероктаедар $O_n=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid |x_1|+\dots+|x_n|\le 1\}$

представљају пар међусобно поларних скупова у $\mathbb{R}^n$. Доказати.

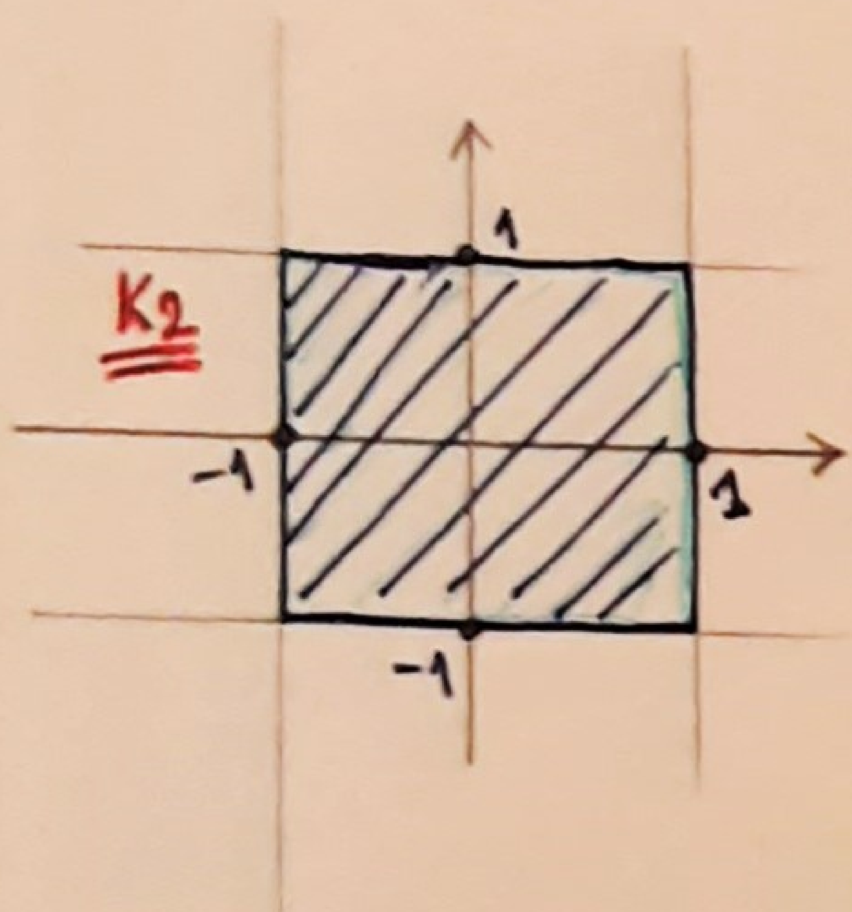
Лако се види да је:



- хипероктаедар $\boxed{O_n} = \mathrm{conv}\{e_1,-e_1,e_2,-e_2,\dots,e_n,-e_n\}$
  где су $e_1,\dots,e_n$ вектори стандардне базе:
  $e_1=(1,0,\dots,0)$, $e_2=(0,1,0,\dots,0)$, $\dots$, $e_n=(0,\dots,0,1)$

и да је:

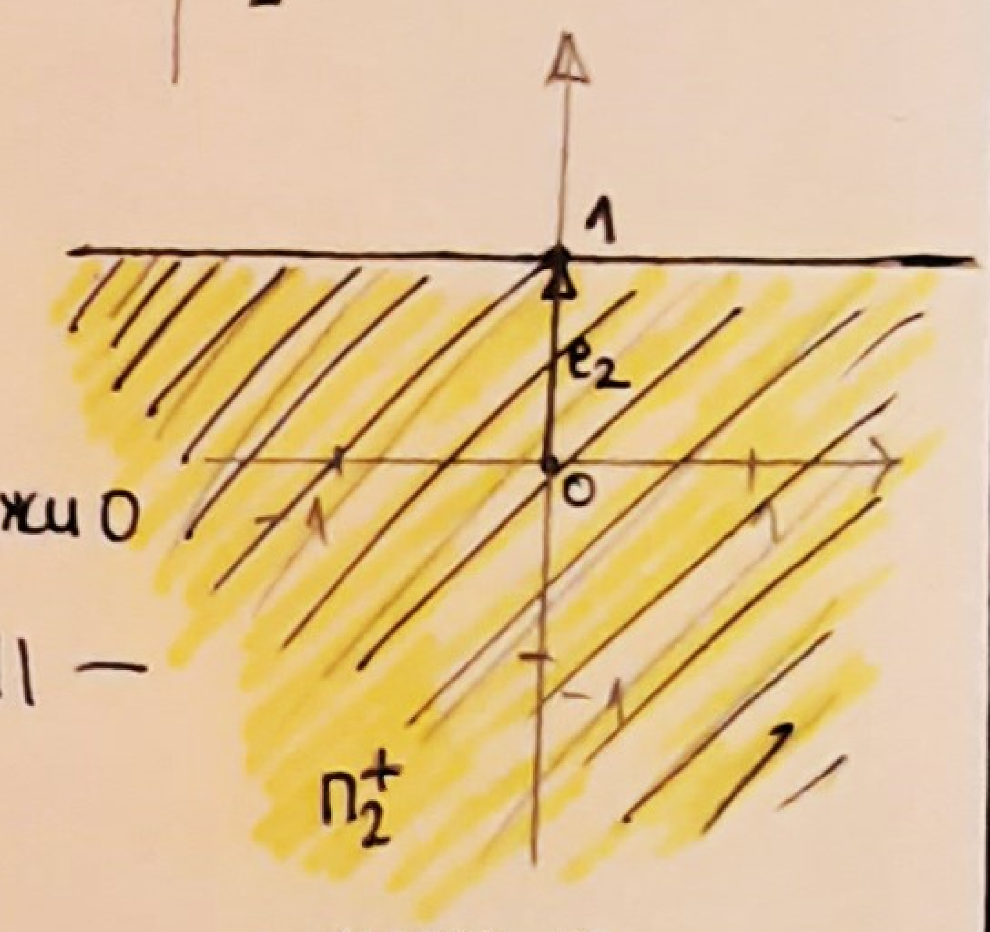
- хиперкоцка $\boxed{K_n}$ = пресек полупростора који садрже 0
  на растојању 1 од 0,
  дуж сваког од праваца $e_1,\dots,e_n$
  (дуж сваког правца имамо два полупростора:
  један који пролази кроз 1, и други кроз −1)



Π_i^+ − полупр. $\perp e_i$, кроз $(0,\dots,0,\underbrace{1}_{i\text{-то}},0,\dots,0)$ (e_i), који садржи 0

Π_i^- − −||− , кроз $(0,\dots,0,-1,0,\dots,0)$ ($-e_i$), који −||−

$$K_n = \bigcap_{i=1}^{n} (\Pi_i^+\cap\Pi_i^-)$$



слика за $\Pi_2^+ = \{e_2\}^*$

- $\{e_i\}^*$ − знамо да је полупростор, $\perp e_i$, на растојању $\frac{1}{\|e_i\|}=1$
  а $1=\|e_i\|$ − па баш пролази кроз e_i ☺

$\Rightarrow \{e_i\}^*=\Pi_i^+$

слично $\{-e_i\}^*=\Pi_i^-$

дивно!

Примењујемо (Тв. 5.3)(i):

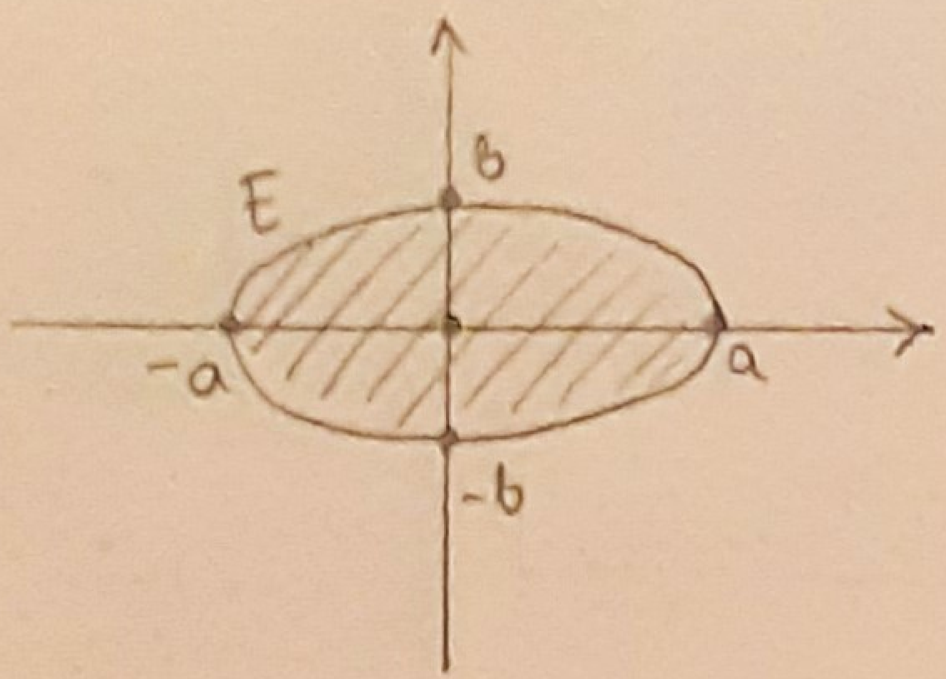
$$O_n^* = (\mathrm{conv}\{e_1,-e_1,e_2,-e_2,\dots,e_n,-e_n\})^* = \{e_1\}^*\cap\{-e_1\}^*\cap\dots\cap\{e_n\}^*\cap\{-e_n\}^*$$
$$= \Pi_1^+\cap\Pi_1^-\cap\dots\cap\Pi_n^+\cap\Pi_n^-$$
$$= K_n$$

$\Rightarrow \boxed{O_n^*=K_n}$

За обрнуто можемо доказати рачунајући K_n^* као ($\cap$ полупростора)* па примењујући лему 2, али можемо и много лакше:

$\boxed{\text{Посл. 5.6.}}$ (i)
O_n − затв. конв., садржи 0 $\Big\}$ $\Rightarrow$ $O_n^{**}=O_n$ тј. $(\underbrace{O_n^*}_{K_n})^*=O_n$ $\Rightarrow$ $\boxed{K_n^*=O_n}$ □

$\boxed{3.}$ Одредити скуп поларан елипси $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1\} =$
$= conv\{(a\cos\varphi, b\sin\varphi) \mid 0\leq\varphi\leq 2\pi\}$



$E^* = ?$

Нека $(x,y)\in E^*$:

$$\underbrace{\langle (x,y), (a\cos\varphi, b\sin\varphi)\rangle}_{\parallel} \leq 1, \quad \forall\varphi\in[0,2\pi]$$

$$x\cdot a\cos\varphi + y\cdot b\sin\varphi \leq 1, \quad \forall\varphi\in[0,2\pi]$$

Приметимо да ако важи:

$x\cdot a = \cos\theta$
$y\cdot b = \sin\theta$ за произвољно $\theta\in[0,2\pi]$

онда само треба да буде испуњено:

$$\underbrace{\cos\theta\cdot\cos\varphi + \sin\theta\cdot\sin\varphi}_{\cos(\theta-\varphi)} \leq 1, \quad \forall\varphi\in[0,2\pi]$$

$\cos(\theta-\varphi)\leq 1$

$\boxed{T}$ увек!

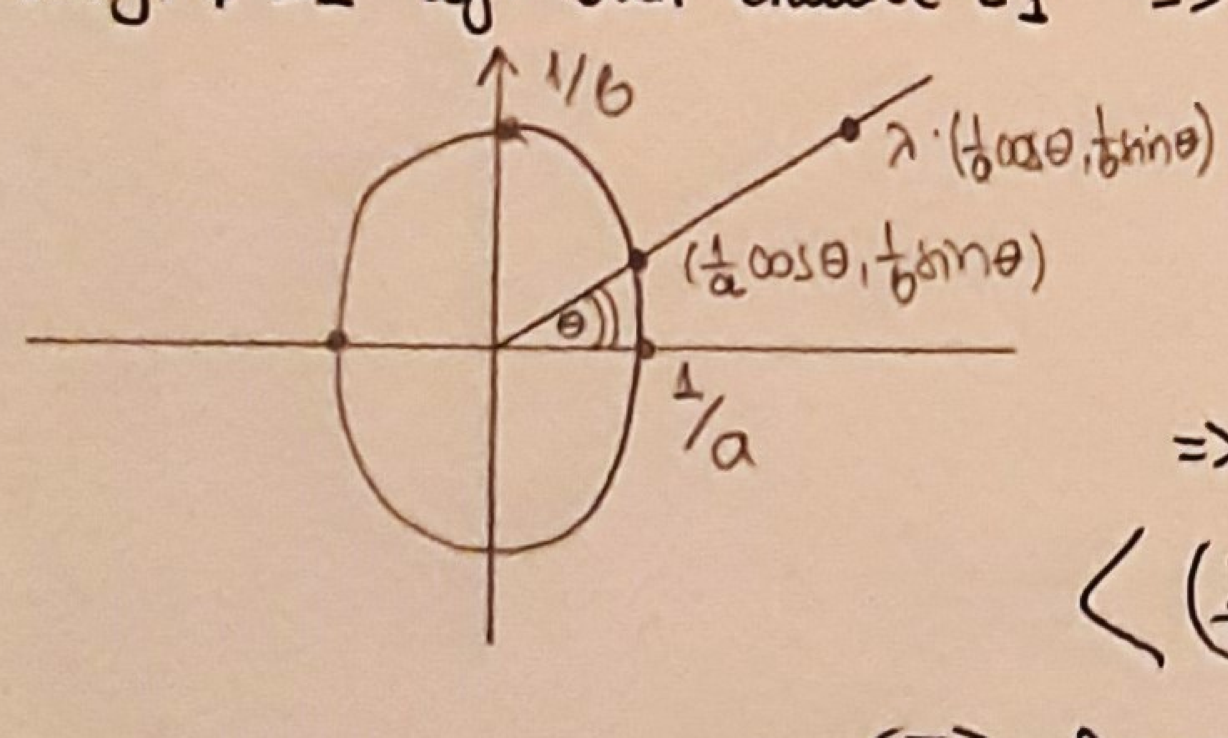
$\Rightarrow$ $x=\frac{1}{a}\cdot\cos\theta$, $y=\frac{1}{b}\cdot\sin\theta$ $\}$ све овакве тачке $(x,y)\in E^*$ за све $\theta\in[0,2\pi]$

E^* конвексан $\Rightarrow$ $\underbrace{conv\{(\frac{1}{a}\cos\theta, \frac{1}{b}\sin\theta) \mid \theta\in[0,2\pi]\}}_{\text{ово је елипса } E_1 \text{ са полуосама } \frac{1}{a} \text{ и } \frac{1}{b}} \subset E^*$

$\boxed{E_1\subset E^*}$

Докажимо да $E_1 = E^*$ тј. да нема других тачака у E^*:

$(x,y)\notin E_1$ тј. ван елипсе E_1 $\Rightarrow$ (x,y) се представља у облику:



$(x,y)=\lambda\cdot(\frac{1}{a}\cos\theta, \frac{1}{b}\sin\theta)$ за неко $\lambda>1$ и неко $\theta\in[0,2\pi]$
$\lambda>1 \downarrow (x,y)\notin E_1$

ппс. $(x,y)\in E^*$

$\Rightarrow$ за свако $\varphi\in[0,2\pi]$ важи:

$$\langle (\frac{\lambda}{a}\cos\theta, \frac{\lambda}{b}\sin\theta), (a\cos\varphi, b\sin\varphi)\rangle \leq 1$$

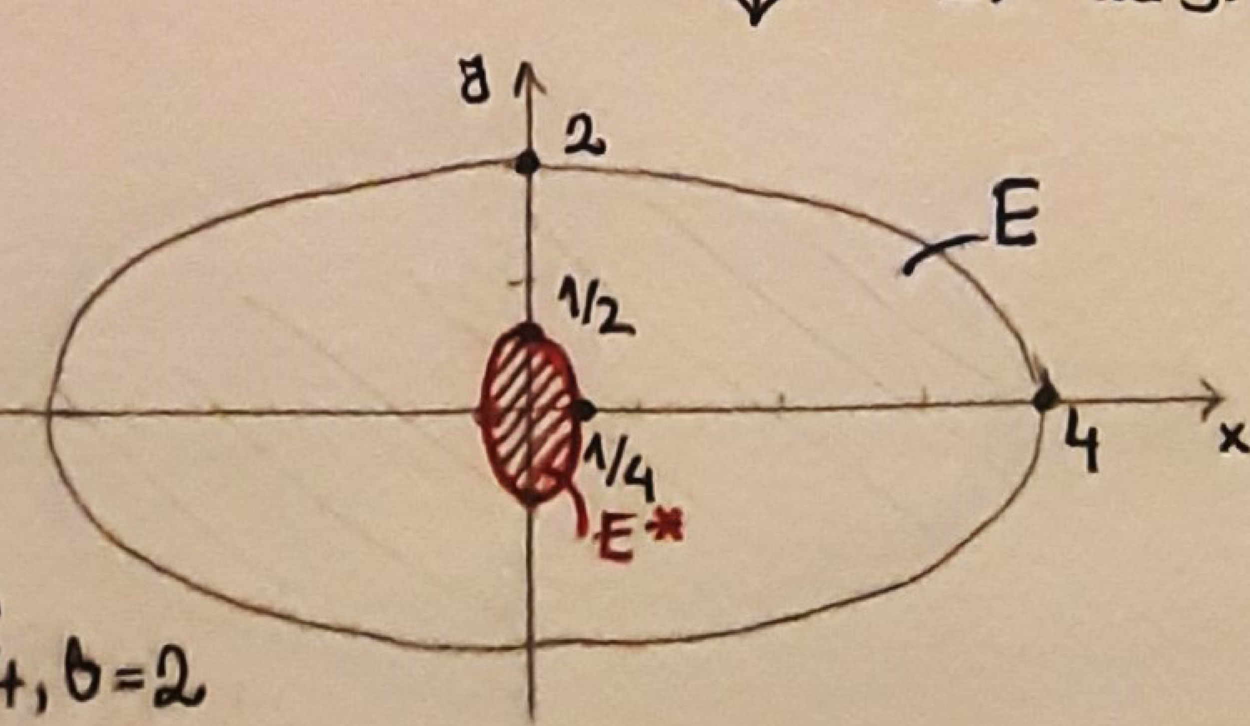
$\Leftrightarrow$ $\lambda\cos\theta\cos\varphi + \lambda\sin\theta\sin\varphi \leq 1$

$\Leftrightarrow$ $\lambda\cdot(\cos(\theta-\varphi))\leq 1$

међутим, можемо изабрати $\varphi=\theta$ $\Rightarrow$ $\cos(\underbrace{\theta-\varphi}_{0})=1$

$\Leftrightarrow$ $\lambda\leq 1$ ↯ $\Rightarrow$ $(x,y)\notin E^*$ $\Rightarrow$ $\boxed{E^*\subset E_1}$

Дакле,
$\boxed{E^* = E_1}$



пр.
$a=4, b=2$

5 Доказати да је јединична лопта једини скуп C у $\mathbb{R}^n$ са својством $C^* = C$.

Нека $C^* = C \Rightarrow \forall x, y \in C \quad \langle x, y \rangle \leq 1$

спец. $x = y \rightarrow \langle x, x \rangle \leq 1$

$\|x\|^2 \leq 1$

$\Rightarrow \|x\| \leq 1, \ \forall x \in C \quad \Rightarrow \boxed{C \subset K[0,1]} \quad (1)$

Докажимо да $K[0,1] \subset C^*$

$x \in K[0,1]$ прозв. тачка

$a \in C$

$$\langle x, a \rangle = \underbrace{\|x\|}_{\substack{\leq 1 \\ \text{јер} \\ x \in K[0,1]}} \cdot \underbrace{\|a\|}_{\substack{\leq 1 \\ \text{јер} \\ a \in C \subset K[0,1]}} \cdot \underbrace{\cos \measuredangle(x, a)}_{\leq 1} \leq 1 \quad , \ \forall a \in C$$

$\Rightarrow x \in C^*$

$\Rightarrow K[0,1] \subset C^* = C$

$\Rightarrow \boxed{K[0,1] \subset C} \quad (2)$

$(1), (2) \Rightarrow \boxed{C = K[0,1]}$

$\square$