1.4. Комбинаторна својства - НАСТАВАК

На самом почетку семестра радили смо теорему Минковског, а на претходна два часа Каратеодоријеву, Радонову, Хелијеву и Кирхбергерову теорему (са применама). Од теорије из главе 1.4. преостаје да урадимо теорему Красносельског и теорему Јунга, које ћемо урадити „данас" ☺

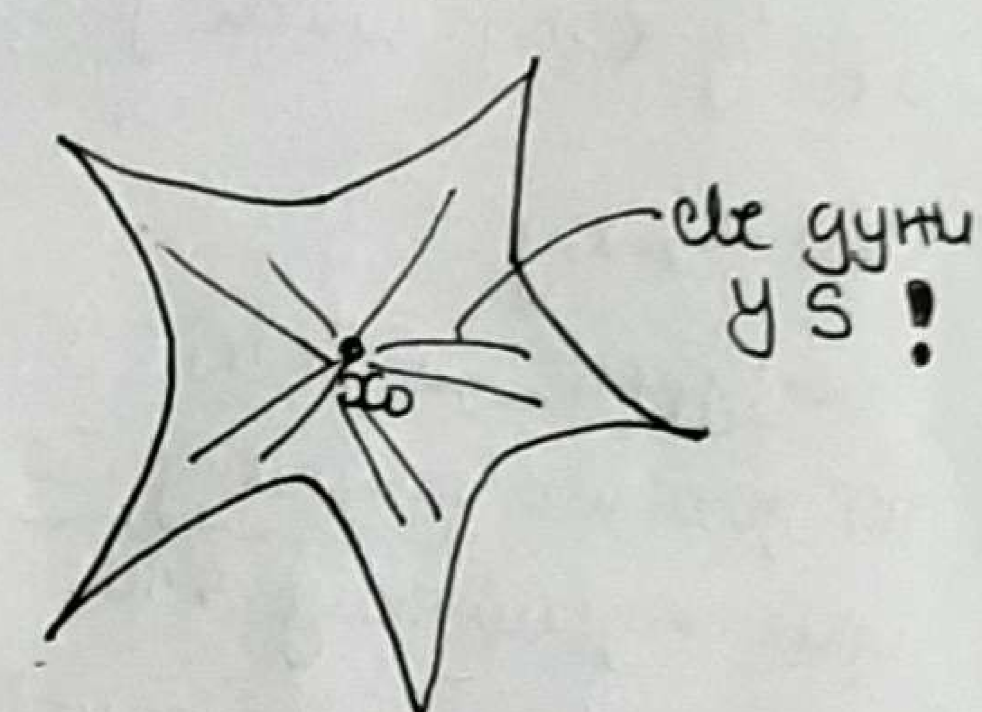
За бисмо формулисали теорему Красносельског, потребан нам је појам „звездоликих" скупова који даје следећа дефиниција:

Деф. 4.9. скуп $S \subset \mathbb{R}^n$ је ЗВЕЗДОЛИК у односу на тачку $x_0 \in S$ ако за сваку тачку $x \in S$ важи да цела дуж $[x, x_0]$ припада S:

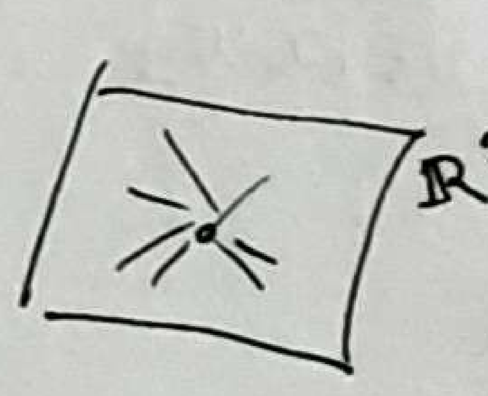
$$[x_0, x] = \{(1-\lambda)x_0 + \lambda x \mid \lambda \in [0,1]\} \subset S.$$

Скуп свих $x \in S$ у односу на које је S звездолик назива се ЈЕЗГРО скупа S.

☺ Назив је потпуно природан јер тачку x_0 која припада језгру можемо замислити као "једну од средишњих" тачака „звезде" (неформално говорећи)



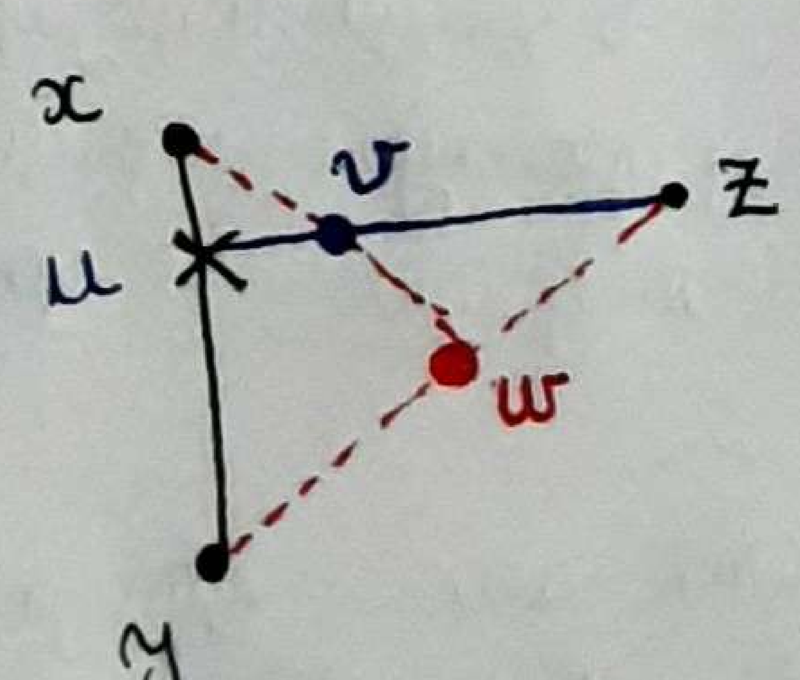
☺ Можда мало разочаравајуће, али звездолик скуп уопште не мора „личити на звезду", нпр. раван је звездолик скуп у односу на сваку своју тачку



- Ако $\exists$ тачка у односу на коју је скуп звездолик, можемо само рећи да је скуп ЗВЕЗДОЛИК (без истицања тачке).
- S није звездолик $\Rightarrow$ језгро $= \emptyset$

Потребна нам је једна једноставна геометријска лема (доказ за вежбу, лако):

ЛЕМА 4.10. $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ три различите тачке
Нека $u \in (x, y)$ и $v \in [z, u]$
Тада постоји тачка $w \in [z, y]$ таква да важи $v \in [x, w]$

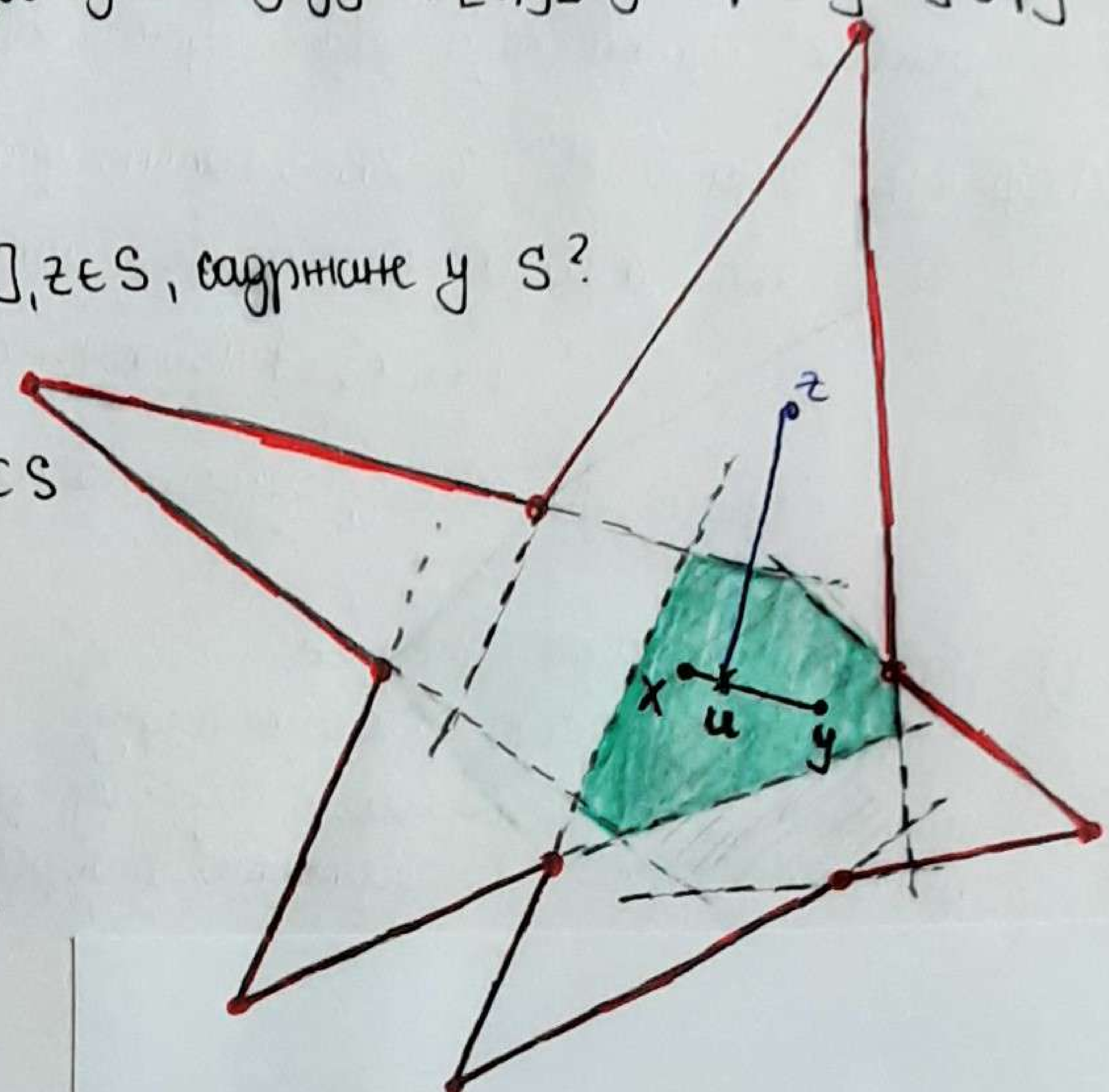


☺ ову лему је најлакше видети преко слике
заправо само тврдимо да права xv сече дуж zy у некој тачки w

Сада можемо доказати да језгро звездоликог скупа увек изгледа „лепо“ :)

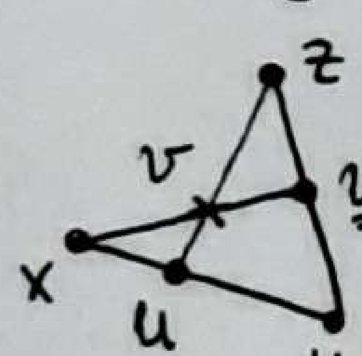
ТВРЂЕЊЕ 4.11. $S \subset \mathbb{R}^n$ звездолик скуп
K - језгро S
$\Rightarrow$ K је конвексан скуп.

<u>ДОКАЗ</u>: Нека су $x, y \in K$ произвољне тачке језгра.
Желимо да покажемо да $[x,y] \subset K$,
па је довољно доказати за произвољну тачку дужи $[x,y]$ да припада језгру:
$\alpha \in (0,1)$
$u = \alpha \cdot x + (1-\alpha) \cdot y$
$u \overset{?}{\in} K$ тј. да ли су све дужи $[u,z], z \in S$, садржане у S?



Нека је $z \in S$ произвољна.

- ако $z = x$ или $z = y$, јасно је да $[z,u] \subset S$ јер су x и y тачке језгра. ✓
- ако $z \neq x, y$
  доказујемо да $[z,u] \subset S$
  па уочимо произвољну тачку $v \in [z,u]$
  примењујемо лему 4.10:
  $\exists\, w \in [z,y],\ v \in [x,w]$



$\underset{\text{језгро}}{y \in K}, z \in S \Rightarrow [y,z] \subset S \Rightarrow w \in S$

затим:
$x \in K, w \in S \Rightarrow [x,w] \subset S \Rightarrow v \in S$

v је била произвољна $\Rightarrow$ цела дуж $[u,z] \subset S$, па пошто је z произвољна из S
$\Rightarrow u \in K$
$\overset{(\forall \alpha \in (0,1))}{\Rightarrow} [x,y] \subset K$ тј. језгро K је заиста конвексан скуп $\square$

:) У примеру смо уцртали један звездаст скуп - нека је S звезда са унутрашњошћу. Језгро K овог скупа је зелени многоугао добијен у пресеку унутрашњости свих углова добијених из кракова звезде. За вежбу пробајте да покажете да је тачно ово језгро, и ништа више!

(Напомињем да за пример уопште није релевантно како S изгледа, само на конкретној слици желим да вам дам задатак за размишљање).

Сада можемо формулисати теорему Красносељског (највалтија особина звездоликих скупова)

један назив: ако $[a,b] \subset S$ кажемо да се ТАЧКА a ВИДИ ИЗ ТАЧКЕ b КРОЗ СКУП S.

Овде неће бити наведен доказ теореме, већ само прва идеја за примену Хелијеве теореме, а након тога следе технички детаљи (ни претходне године нисам то причала на часу, јер одузима доста времена, а сада бих само „преписивала" из књиге, јер ту нема ништа да се дода).

$\boxed{\text{ТЕОРЕМА 4.12.}}$ $S \subset \mathbb{R}^n$ S-компактан скуп од бар $n+1$ тачака.
Ако за сваких $n+1$ тачака скупа S постоји тачка скупа S из које се свих тих $n+1$ тачака види кроз скуп S,
онда је S звездолик (тј. постоји тачка скупа S из које се виде све тачке скупа S кроз скуп S).

$\boxed{\text{ДОКАЗ (СКИЦА)}}$ За сваку тачку $x \in S$ уочимо $V_x \subset S$ задат са:

$V_x := \{y \in S \mid [x,y] \subset S\}$

(то је скуп тачака из којих се x види кроз S)

из претпоставке: сваких $n+1$ елемената фамилије $\{V_x \mid x \in S\}$ има непразан пресек

Желимо да применимо Хелијеву теорему, али нам је потребна конвексност скупова, па посматрамо конвексне омотаче:

$\Rightarrow$ сваких $n+1$ елемената фамилије $\{\mathrm{conv}\, V_x \mid x \in S\}$ има непразан пресек.

Пошто је S компактан, може се показати да су сви V_x компактни, па су сви $\mathrm{conv}\, V_x$ компактни, па можемо применити Хелијеву теорему 4.7.

$\overset{4.7.}{\Longrightarrow}$ $\exists$ тачка $y \in \bigcap_{x \in S} \mathrm{conv}\, V_x$

Желимо да покажемо да $y \in \bigcap_{x \in S} V_x$ и тада ће се све тачке $x \in S$ видети из y кроз S.

Овај део се добија претпоставком да важи супротно ($\exists x,\ y \in (\mathrm{conv}\, V_x) \setminus V_x$) и локалном анализом која даје контрадикцију.
Тај део учити из књиге. $\square$

Прелазимо сада на теорему Јунга која процењује најмању могућу лопту која садржи сваки скуп заданог дијаметра.

ТЕОРЕМА 4.13. (ЈУНГ) S-скуп у $\mathbb{R}^n$, $\operatorname{diam} S \le 2$

$\Rightarrow$ S је садржан у лопти полупречника $\sqrt{\frac{2n}{n+1}}$

Такође, ако S није садржан у лопти мањег полупречника, онда његово затворење $\operatorname{cl} S$ садржи темена правилног n-dim симплекса дијаметра 2.

ДОКАЗ

- Прво ћемо показати да је тврђење довољно доказати када $\operatorname{card} S \le n+1$.

Заиста, претпоставимо да тврђење важи за све скупове кардиналности $\le n+1$.

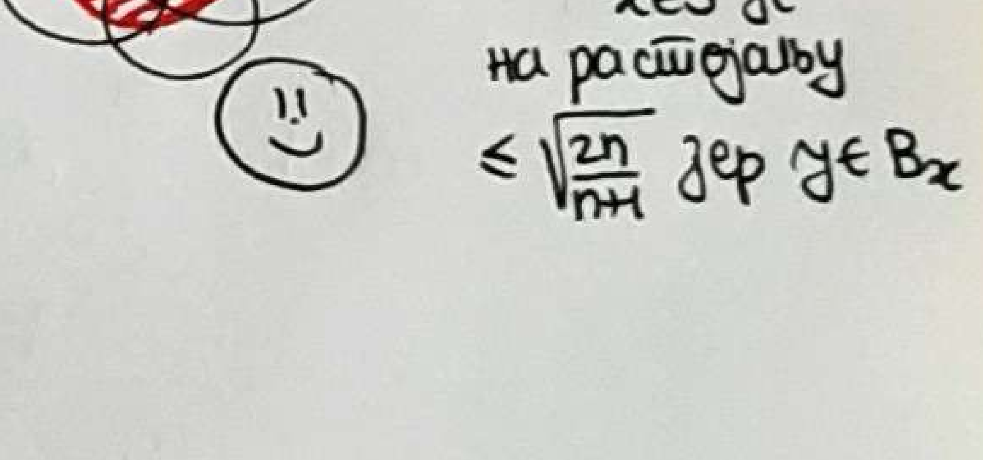
Уочимо сада произвољан скуп S такав да $\operatorname{card} S \ge n+1$, $\operatorname{diam} S \le 2$

За свако $x \in S$ посматрамо:

$$B_x = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| \le \sqrt{\tfrac{2n}{n+1}} \}$$ - лопта са центром x, полупречника $\sqrt{\frac{2n}{n+1}}$

Пошто тврђење важи за све кардиналности $\le n+1$, то значи да сваких $n+1$ лопти B_x има непразан пресек.

Хелијева теорема 4.7. (компактни сл.) $\Rightarrow$ фамилија $\{B_x \mid x \in S\}$ има непразан пресек, па било које $y \in \bigcap_{x \in S} B_x$ је центар кугле полупречника $\sqrt{\frac{2n}{n+1}}$ која садржи цео скуп S.



- Дакле, треба само доказати тврђење теореме када $\operatorname{card} S \le n+1$

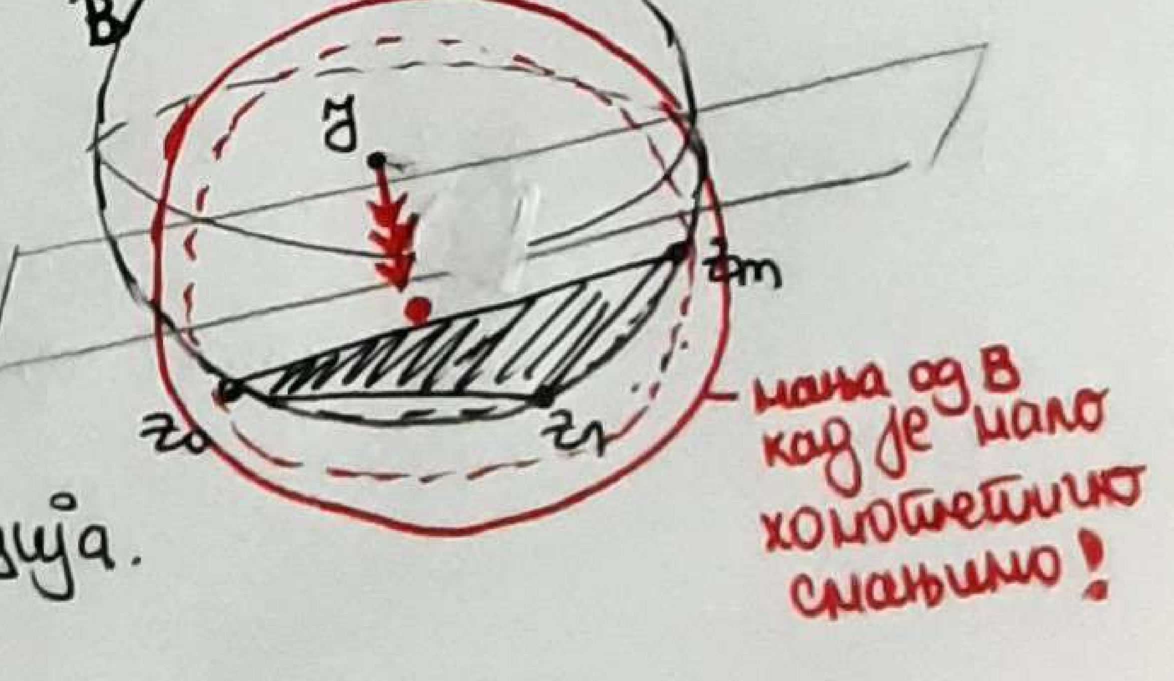
Нека је **B** најмања лопта која садржи скуп S, **y** - њен центар, а **r(S)** полупречник B.

Уочимо тачке скупа S које се налазе на самој граници лопте B:

$$\{z_0, z_1, \dots, z_m\} = \{x \in S \mid \|y - x\| = r(S)\}$$

* (свакако постоји бар 1 таква тачка јер би иначе постојала мања лопта која $\supset S$)
* $m \le n$ јер $\operatorname{card} S \le n+1$

Такође мора важити да $y \in \operatorname{conv}\{z_0, z_1, \dots, z_m\}$ јер кад то не би био случај, малим транслирањем B ортогонално према хиперравни која раздваја y и $\operatorname{conv}\{z_0, \dots, z_m\}$ бисмо добили лопту која садржи S у својој унутрашњости, па бисмо могли да је „мало смањимо" и добијемо лопту мању од B која садржи S, што је контрадикција.



Дакле, $y \in \operatorname{conv}\{z_0, z_1, \dots, z_m\}$ ⊛

Додатно, без умањења општости, можемо претпоставити да важи $y=0$
(ако не важи, све само транслирамо ☺)

$y=0$, из ⊛ $\Rightarrow$ $\exists\, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m \geq 0$ тако да

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_m = 1$$

$$\alpha_0 z_0 + \alpha_1 z_1 + \dots + \alpha_m z_m = 0 \leftarrow \text{што је } y=0 \text{ ☺}$$

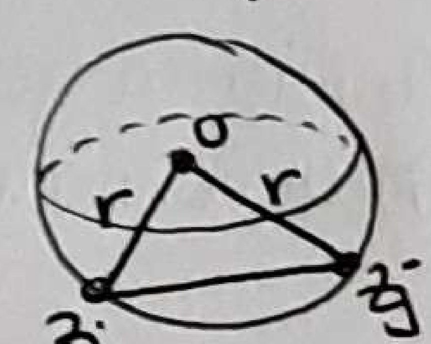
Сада ћемо мало да рачунамо и процењујемо:

обележимо $\boxed{d_{ij}} = \|z_i - z_j\| \leq 2$

јер $\operatorname{diam} S \leq 2$

Из косинусне теореме имамо:

($\Delta O z_i z_j$)



$$d_{ij}^2 = 2r^2 - 2\langle z_i, z_j \rangle$$

када фиксирамо произвољно $j \in \{0,1,\dots,m\}$:

$$1-\alpha_j = \sum_{i \neq j} \alpha_i \geq \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \cdot \frac{d_{ij}^2}{4} = \frac{r^2}{2} \cdot \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{m} \alpha_i\right)}_{=1} - \frac{1}{2} \underbrace{\left\langle \sum_{i=0}^{m} \alpha_i z_i, z_j \right\rangle}_{=0} = \frac{r^2}{2}$$

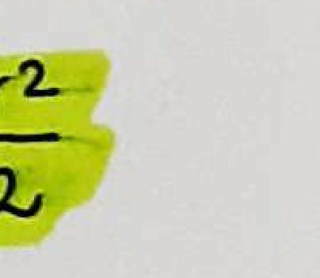
овде користимо
$d_{ij} \leq 2 \Rightarrow \frac{d_{ij}^2}{4} \leq 1$
$d_{jj} = 0$ тј. не смета

Дакле, $1-\alpha_j \geq \frac{r^2}{2}$ / $\sum_{j=0}^{m}$ сумирамо

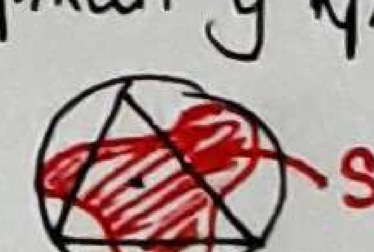
$$\underbrace{m+1-\underbrace{\sum_{j=0}^{m} \alpha_j}_{=1}}_{m} \geq \frac{m+1}{2} \cdot r^2 \Rightarrow r^2 \leq \frac{2m}{m+1} = 2 - \frac{2}{m+1} \underset{\text{јер } m \leq n}{\leq} 2 - \frac{2}{n+1} = \frac{2n}{n+1} \Rightarrow \boxed{r \leq \sqrt{\frac{2n}{n+1}}}$$

што смо желели!

Остаје да покажемо други део теореме (који је веома једноставан). Нека скуп S није садржан у лопти мањег полупречника, тј. $r = \sqrt{\frac{2n}{n+1}}$. Процена за r добијена је низом неједнакости, па у овом случају свуда важи једнакости. Закључујемо да $m=n$ и $d_{ij}=2$ за $i \neq j$ (обратити пажњу на ○ горе) па имамо $n+1$ тачака $z_0, z_1, \dots, z_n$, сваке две на растојању 2, па су то заиста темена правилног n-симплекса дијаметра 2. Доказ је завршен. □



☺ Пример: $n=2$ $S \subset \mathbb{R}^2$, $\operatorname{diam} S \leq 2$ $\Rightarrow$ S је садржан у кругу полупречника $\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$;
(што је полупречник круга описаног око једнакостр. троугла ивице $= 2$)



Након теореме Јунга следи прича о теореми Минковског коју смо прешли на првом часу, па је завршена теорија из главе 1.4.

Прелазимо на примене (престајемо да радимо теорију из књиге) :).

• (ЗАДАТАК СА КОЛОКВИЈУМА, 2018.)

Дат је коначан скуп X од n тачака у простору $\mathbb{R}^d$, $n,d\in\mathbb{N}$.

(а) Нека је C фамилија свих отворених полупростора γ таквих да важи

$$|X\cap\gamma| > \frac{d}{d+1}\cdot n$$

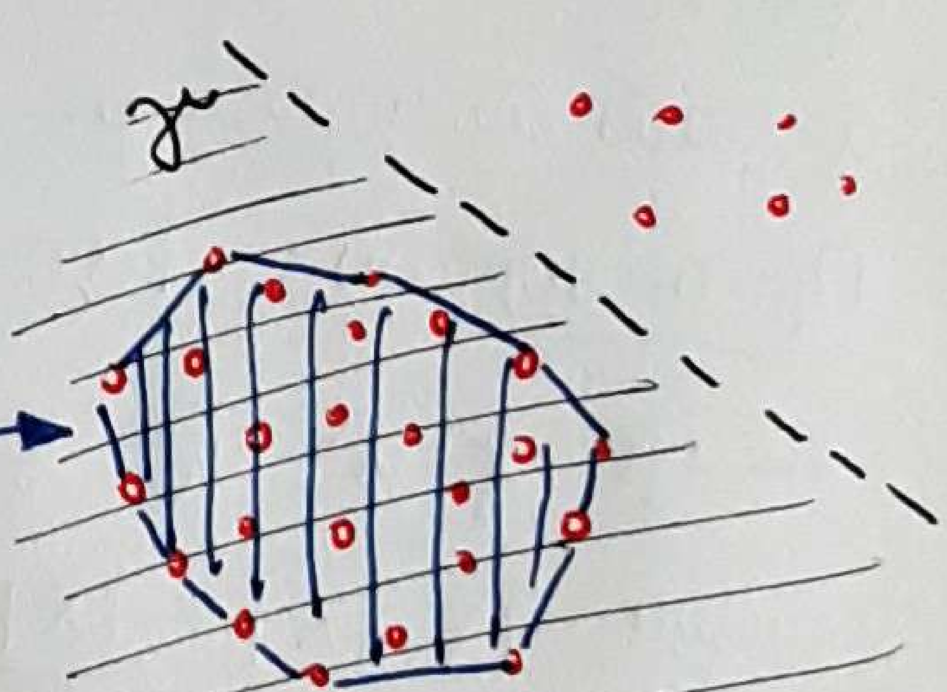
Доказати да фамилија C има непразан пресек.

(б) Доказати да постоји централна тачка скупа X, тј. тачка $\tilde{x}\in\mathbb{R}^d$ са својством да сваки затворени полупростор који садржи $\tilde{x}$, садржи бар $\frac{n}{d+1}$ тачака скупа X.

(а) Желимо да применимо Хелијеву теорему па да буде довољно да покажемо да сваких $d+1$ полупростора из C има непразан пресек.
Међутим, C је бесконачна, а скупови γ нису затворени ☹ не можемо применити Хелијеву т. 4.7.
Зато ћемо посматрати мало модификовану фамилију:
нека је:

$$C_1 = \{\operatorname{conv}(X\cap\gamma) \mid \gamma\in C\} \overset{\text{тј.}}{=} \{\operatorname{conv}(X\cap\gamma) \mid \gamma\text{-отв. полупр.}, |X\cap\gamma| > \tfrac{d}{d+1}\cdot n\}$$

☺ шта је ово геометријски и зашто смо то узели?
па, γ је полупростор (отворен) такав да садржи више од $\frac{d}{d+1}\cdot n$ тачака из X
уочимо све те тачке из X које су у γ: $X\cap\gamma$
и узмемо конв. омотач $\operatorname{conv}(X\cap\gamma)$
што је неки полиедар
(у равни полигон)



X-црвене тачке

сада смо постигли да су елементи фамилије C_1 компактни, па на C_1 можемо применити Т4.7.

$\operatorname{conv}(X\cap\gamma)\subset\gamma$ $\forall\gamma$ па је довољно доказати да $\bigcap C_1\neq\emptyset$ и следиће $\bigcap C\neq\emptyset$.

Т4.7. на C_1: треба показати да сваких $d+1$ има непразан пресек:

$$\gamma_1,\dots,\gamma_{d+1}\in C \overset{?}{\Longrightarrow} \operatorname{conv}(X\cap\gamma_1)\cap\dots\cap\operatorname{conv}(X\cap\gamma_{d+1})\neq\emptyset$$

довољно је показати да важи

$$(X\cap\gamma_1)\cap\dots\cap(X\cap\gamma_{d+1})\neq\emptyset \quad \circledast$$

Претпоставимо супротно, да важи

$(X\cap\gamma_1)\cap\dots\cap(X\cap\gamma_{d+1})=\emptyset$ / уочимо комплемент у X $\quad (X\cap\gamma)^c = X\setminus\gamma$

← користимо: $(A_1\cap\dots\cap A_{d+1})^c = A_1^c\cup\dots\cup A_{d+1}^c$

$\Rightarrow (X\setminus\gamma_1)\cup\dots\cup(X\setminus\gamma_{d+1}) = X$

међутим, знамо да $\gamma_i\in C$ за $\forall i$, па $|X\cap\gamma_i|>\frac{d}{d+1}n$

$$\underbrace{(X\cap\gamma_i)}_{>\frac{d}{d+1}n \text{ тачака}}{}^c = \underbrace{X\setminus\gamma_i}_{\text{зато овде има } <\frac{1}{d+1}\cdot n \text{ тачака}}$$

поново погледајмо:

$$\underbrace{\underbrace{(X\setminus\gamma_1)}_{<\frac{1}{d+1}\cdot n}\cup\dots\cup\underbrace{(X\setminus\gamma_{d+1})}_{<\frac{1}{d+1}\cdot n}}_{<n \text{ тачака}} = \underbrace{X}_{n \text{ тачака}}$$

контрадикција
$\Rightarrow$ важи ⊛
па је пресек сваких $d+1$ из C_1 непразан, па из Хелијеве т. 4.7. важи $\cap C_1\neq\emptyset$

$\Rightarrow \boxed{\cap C\neq\emptyset}$ ✓✓

(б) Докажимо да произвољно $\tilde{x}$ из $\cap C\neq\emptyset$ задовољава тражено својство, тј. сваки затв. полупростор који садржи $\tilde{x}$, садржи бар $\frac{n}{d+1}$ тачака X:

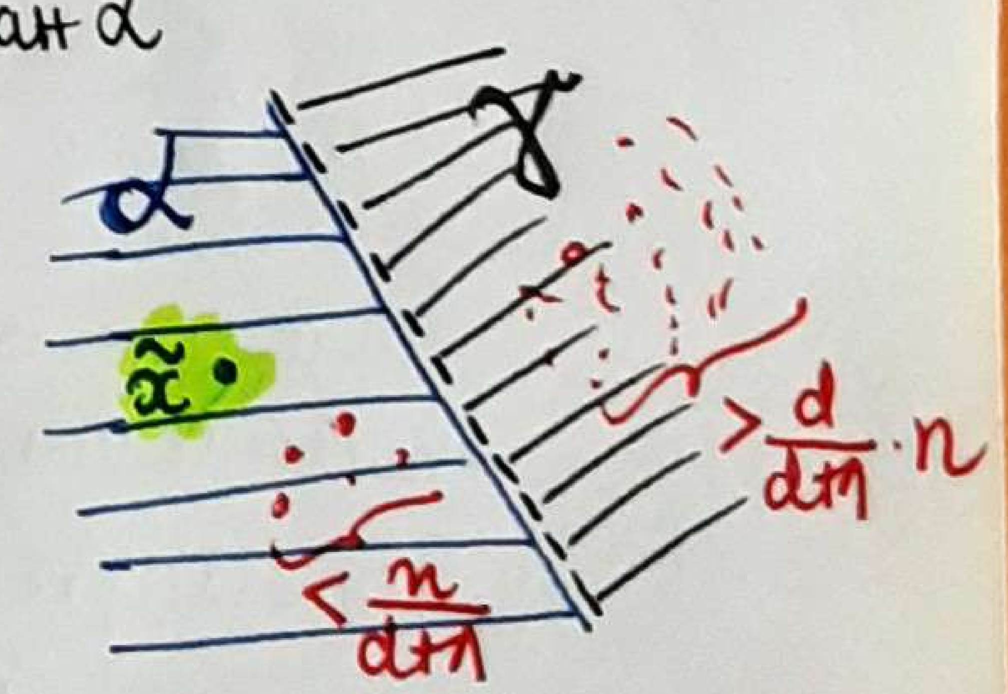
$\tilde{x}\in\cap C$

α - затв. полупростор, $\alpha\ni\tilde{x}$

Претп. супротно: $|\alpha\cap X|<\frac{n}{d+1}$

нека је $\gamma=\alpha^c$ тј. γ је отворен полупростор комплементаран α

тада $|\gamma\cap X| = \underbrace{|X|}_{n} - \underbrace{|\alpha\cap X|}_{<\frac{n}{d+1}} > n-\frac{n}{d+1} = \frac{d}{d+1}\cdot n$



$\Rightarrow \gamma\in C \Rightarrow \tilde{x}\in\gamma$ али то је контрадикција јер $\tilde{x}\in\alpha$

$\Rightarrow$ тачка $\tilde{x}$ задовољава својство централне тачке ✓

КРАЈ РЕШЕЊА □

Тиме би вежбе посвећене комбинаторним својствима (1.4.) биле завршене. Међутим, пошто је ово јако важна област (и важно научити за испит), додатно предлажем да провежбате задатке из књиге за домаћи, на пр. пример: 5., 6., 9., 10. и 12. (страна 32.) - за њих су окачили детаљна решења да можете проверити да ли сте добро урадили.