Задаци за вежбу из главе 1.4. (књига)

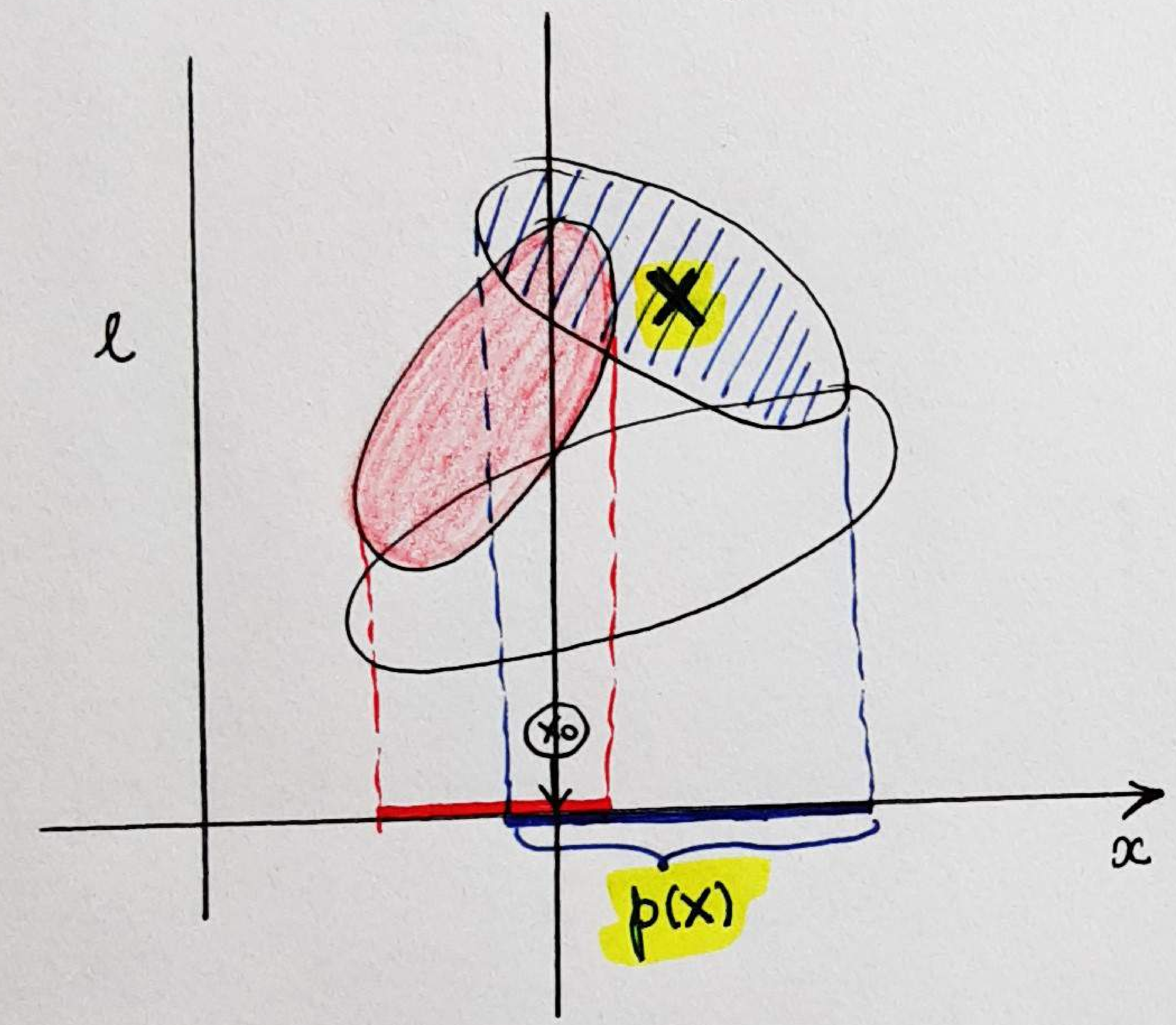
(књига, глава 1.4.)
задатак $\boxed{6.}$

$\mathcal{F}$ - фамилија компактних конвексних подскупова равни $\mathbb{R}^2$ од којих се свака два секу.

Ако је l произвољна права у равни, доказати да постоји права паралелна са l која сече све скупове фамилије $\mathcal{F}$.

Без умањења општости можемо претпоставити да је l y-оса.

Дакле, желимо да докажемо да постоји права $\parallel y$-оси, тј. нормална на x-осу, која сече све скупове из $\mathcal{F}$.



За сваки скуп $X \in \mathcal{F}$ посматрајмо пројекцију $p(X)$ скупа X на x-осу, и посматрајмо фамилију свих тих пројекција:

$$\mathcal{C} = \{ p(X) \mid X \in \mathcal{F} \}$$

X - компактан и конвексан у $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ $p(X)$ комп. и конв. у $\mathbb{R}$

па $p(X)$ мора бити затв. дуж

$\forall X_1, X_2 \in \mathcal{F}$ $\quad X_1 \cap X_2 \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad p(X_1) \cap p(X_2) \supset p(X_1 \cap X_2) \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ свака два елемента фамилије $\mathcal{C}$ се секу

како су у питању дужи (сви затв, конв., комп.)

можемо применити Хелијеву теорему за праву ($n=1$) на $\mathcal{C}$

$\Rightarrow \quad \bigcap \mathcal{C} \neq \emptyset$

$\Rightarrow \quad \exists x_0 \quad x_0 \in p(X)$ за $\forall X \in \mathcal{F}$

$\Rightarrow$ нормала у тачки x_0 на x-осу сече сваки скуп $X \in \mathcal{F}$!

крај доказа $\square$

(књига, глава 1.4.)

задатак 5.

$\mathcal{F}$-коначна фамилија од бар $n+1$ полупростора у $\mathbb{R}^n$ који покривају $\mathbb{R}^n$

Доказати да постоји неких $n+1$ елемената фамилије $\mathcal{F}$ који покривају $\mathbb{R}^n$.

* Посматрајмо фамилију комплемената полупростора из $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F}_1=\{X^c \mid X\in\mathcal{F}\}$$

* Да видимо шта знамо за $\mathcal{F}_1$:

- $|\mathcal{F}|\geq n+1 \Rightarrow |\mathcal{F}_1|\geq n+1$
- елементи $\mathcal{F}$ покривају $\mathbb{R}^n$; нека $\mathcal{F}=\{X_1,\dots,X_k\}$ $k\geq n+1$

$$\Rightarrow X_1\cup\dots\cup X_k=\mathbb{R}^n \quad /^c \text{ (комплемент)}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{X_1^c\cap\dots\cap X_k^c}_{\text{елементи } \mathcal{F}_1}=(\mathbb{R}^n)^c=\emptyset$$

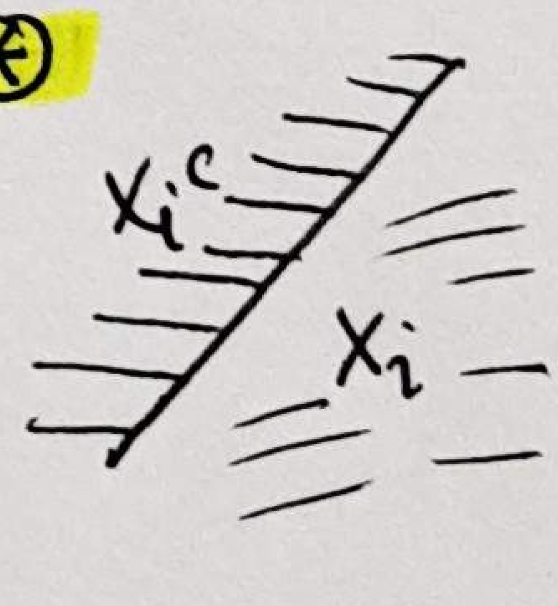
$\Rightarrow$ пресек фамилије $\mathcal{F}_1$ је празан скуп: $\boxed{\bigcap\mathcal{F}_1=\emptyset}$ (1)

* Сада претпоставимо супротно - да никојих $n+1$ елемената из $\mathcal{F}$ не покрива $\mathbb{R}^n$

$$X_{i_1}\cup\dots\cup X_{i_{n+1}}\neq\mathbb{R}^n \text{ за све } i_1,\dots,i_{n+1}\in\{1,\dots,k\}$$

$$\xRightarrow{\text{комплементи}} X_{i_1}^c\cap\dots\cap X_{i_{n+1}}^c\neq(\mathbb{R}^n)^c=\emptyset$$

$\Rightarrow$ пресек сваких $n+1$ елемената $X_{i_1}^c,\dots,X_{i_{n+1}}^c$ из $\mathcal{F}_1$ (*)
није празан скуп



како су $X_1,\dots,X_k$ полупростори, и $X_1^c,\dots,X_k^c$ су полупростори, (само затворени), дакле конвексни

На основу (*) и Хелијеве теореме (4.6.) следи да:

$$\bigcap\mathcal{F}_1\neq\emptyset$$

што је у контрадикцији са (1) ↯

Дакле, мора постојати неких $n+1$ елемената $\mathcal{F}$ који покривају $\mathbb{R}^n$. □

Глава 1.4.
Задатак 9.

$S \subset \mathbb{R}^n$ $S \neq \emptyset$, $a \in S$

$x \in \operatorname{conv} S$

Доказати да постоје тачке $x_1, \dots, x_r \in S$, где $r \leq n$ такве да важи $x \in \operatorname{conv}\{a, x_1, \dots, x_r\}$.

$x \in \operatorname{conv} S$, $S \subset \mathbb{R}^n$ па из Каратеодоријеве теореме следи да се x представља као конв. комбинација $\leq n+1$ тачака из S.

- ако се може представити помоћу $\leq n$:

$x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \Rightarrow x \in \operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_n\} \Rightarrow x \in \operatorname{conv}\{a, x_1, \dots, x_n\}$ ✓
конв комб.
$x_1, \dots, x_n \in S$

- иначе: $\boxed{x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n + \alpha_{n+1} x_{n+1}}$ (*) $x_1, \dots, x_{n+1} \in S$, $\alpha_i \geq 0, \forall i$, $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1$

уколико $a \in \{x_1, \dots, x_{n+1}\}$ завршили смо, па претп. да a није ту

$x_1, \dots, x_{n+1}, a$ морају бити афино зависне ($n+2$ тачке у $\mathbb{R}^n$)

$\Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}, \lambda \in \mathbb{R}$ тд. $\lambda_1 + \dots + \lambda_{n+1} + \lambda = 0$

$\boxed{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n+1} x_{n+1} + \lambda a = 0}$

можемо претп. да $\boxed{\lambda \leq 0}$ (иначе помножимо претходне две релације са -1 и све остане задовољено)

- Сада мало „намештамо" (слично као у доказу Каратеодоријеве т.), да „уништимо" један коеф у (*):

нека је $\rho = \min\left\{ \frac{\alpha_i}{\lambda_i} \,\middle|\, \lambda_i > 0 \right\}_{i=1,\dots,n+1}$ Без умањења општости $\boxed{\rho = \frac{\alpha_1}{\lambda_1}}$ (**)
свакако је $\rho > 0$

Сада: $x = x - \rho \cdot 0 = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n + \alpha_{n+1} x_{n+1} - \rho \cdot (\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n+1} x_{n+1} + \lambda a)$

$\boxed{x = \sum_{i=1}^{n+1} (\alpha_i - \rho \cdot \lambda_i) \cdot x_i + (-\rho\lambda) \cdot a}$ (***)

збир коеф. $= \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i - \rho \cdot \left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i + \lambda \right) = 1 - \rho \cdot 0 = \mathbf{1}$

сви коеф. су ≥ 0: ♦ $\underbrace{-\rho}_{<0} \cdot \underbrace{\lambda}_{\leq 0} \geq 0$ ✓ ♦ ако $\lambda_i \leq 0$: $\underbrace{\alpha_i}_{\geq 0} - \underbrace{\rho}_{>0} \cdot \underbrace{\lambda_i}_{\leq 0} \geq \alpha_i \geq 0$ ✓ ♦ ако $\lambda_i > 0$: $\alpha_i - \rho \lambda_i \geq \alpha_i - \frac{\alpha_i}{\lambda_i} \cdot \lambda_i = 0$ ✓
овај је $\leq \frac{\alpha_i}{\lambda_i}$

Дакле, (***) је конвексна комбинација $x_1, \dots, x_{n+1}, a$

Како важи (**), коеф. уз x_1 је $= \alpha_1 - \rho \cdot \lambda_1 = \alpha_1 - \frac{\alpha_1}{\lambda_1} \lambda_1 = 0$,

па је (***) заправо конв. комб. $x_2, \dots, x_{n+1}, a$

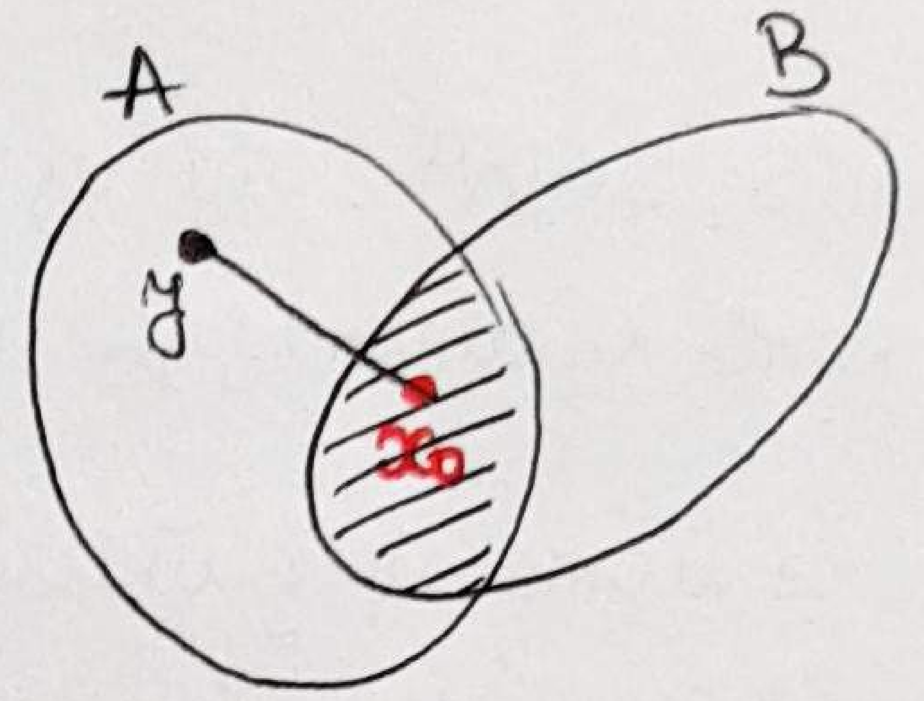
$\Rightarrow \boxed{x \in \operatorname{conv}\{a, \underbrace{x_2, \dots, x_{n+1}}\}}$ n елемената S, што смо желели ✓ □

глава 1.4.
задатак $\boxed{10.}$

$A, B \subset \mathbb{R}^n$ конвексни, $A \cap B \neq \emptyset$

Доказати да језгро скупа $A \cup B$ садржи скуп $A \cap B$.

Морају ли ти скупови бити једнаки?



- Нека је K језгро скупа $A \cup B$.

  $A \cap B \overset{?}{\subset} K$

  $x_0 \in A \cap B$ произвољна ; нека $y \in A \cup B$ произв.

  желимо да докажемо да важи

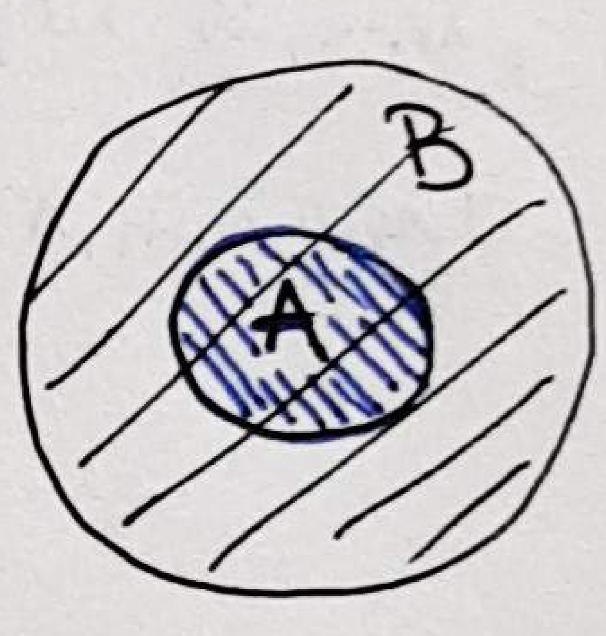
  $[x_0, y] \overset{?}{\subset} A \cup B$

  ако $y \in A$: $x_0 \in A$ па пошто је A конвексан $\Rightarrow [x_0, y] \subset A \subset A \cup B$ ✓

  ако $y \in B$: $x_0 \in B$ — || — B — || — $\Rightarrow [x_0, y] \subset B \subset A \cup B$ ✓

  $\overset{\forall x_0 \in A \cap B}{\Rightarrow} \boxed{A \cap B \subset K}$ ✓

- Да ли мора важити $A \cap B = K$?



  $\boxed{\text{НЕ}}$ пример: ако је $A \subsetneq B$ као на слици →

  тада $A \cup B = B$

  B-конвексан $\Rightarrow$ језгро је цео B
  (свака дуж је у B ☺)

  $A \cap B = A \neq K = B$ □

глава 1.4.

задатак **12.** $\mathcal{F}$-фамилија затворених интервала таква да између свака 3 постоје 2 која се секу. ← ⊛ услов.

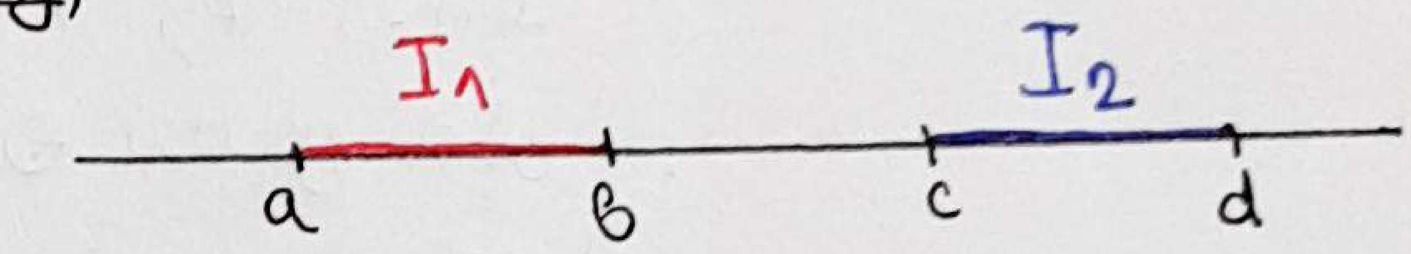
Доказати да постоје подфамилије $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ од $\mathcal{F}$ такве да је $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}$ и да је пресек интервала сваке од подфамилија непразан.

- Ако се свака два интервала из $\mathcal{F}$ секу, онда можемо применити Хелијеву теорему за $\mathbb{R}$ $(n=1)$, верзија 4.7. (произвољна фам. конвексних, сви затв. + компактни, сваких $n+1=2$ се секу)

$\overset{\text{Хели}}{\Longrightarrow} \bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$, па како год да поделимо $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ биће $\bigcap \mathcal{F}_1 \neq \emptyset$, $\bigcap \mathcal{F}_2 \neq \emptyset$ ✓

- Нека сада постоје два сегмента који се <u>не секу</u>, нека су то $I_1 = [a,b]$, $I_2 = [c,d]$, и $b < c$

$I_1, I_2 \in \mathcal{F}$



Нека је $I \in \mathcal{F} \setminus \{I_1, I_2\}$ произвољан сегмент

из услова ⊛ за $\{I_1, I_2, I\}$ пошто $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, мора важити

$I \cap I_1 \neq \emptyset$ или $I \cap I_2 \neq \emptyset$ ⊛⊛

Зато $\mathcal{F}$ можемо поделити на три подфамилије:

$\mathcal{C}_1 = \{ I \in \mathcal{F} \mid I \cap I_1 \neq \emptyset,\ I \cap I_2 = \emptyset \}$ ← секу само I_1

$\mathcal{C}_2 = \{ I \in \mathcal{F} \mid I \cap I_1 = \emptyset,\ I \cap I_2 \neq \emptyset \}$ ← — || — I_2

$\mathcal{C}_3 = \{ I \in \mathcal{F} \mid I \cap I_1 \neq \emptyset,\ I \cap I_2 \neq \emptyset \}$ ← секу оба I_1, I_2

- $\mathcal{F} = \mathcal{C}_1 \sqcup \mathcal{C}_2 \sqcup \mathcal{C}_3$ (због ⊛⊛ нема других)
- важи $I_1 \in \mathcal{C}_1$, $I_2 \in \mathcal{C}_2$

Приметимо да се свака два сегмента из $\mathcal{C}_1$ секу:

заиста, ако $J_1, J_1' \in \mathcal{C}_1$, онда применимо ⊛ на $\{J_1, J_1', I_2\}$

$\Rightarrow \underline{J_1 \cap J_1' \neq \emptyset}$ јер $J_1 \cap I_2 = \emptyset$ и $J_1' \cap I_2 = \emptyset$

Дакле, свака два елемента $\mathcal{C}_1$ се заиста секу, те можемо применити Хелијеву теорему на $\mathcal{C}_1$: $\xrightarrow{4.7.} \bigcap \mathcal{C}_1 \neq \emptyset$

Слично се показује да се свака два елемента $\mathcal{C}_2$ секу $\xrightarrow{4.7} \bigcap \mathcal{C}_2 \neq \emptyset$.

Међутим, шта да радимо са $\mathcal{C}_3$? !!

Идеја је да део $\mathcal{C}_3$ додамо у $\mathcal{C}_1$, а део у $\mathcal{C}_2$, т.д. не буду нарушени претходни услови 🙂

Ево како то лепо да урадимо ☺

Нека је $I \in \mathcal{C}_3$ произвољан. Докажимо да важи следеће:

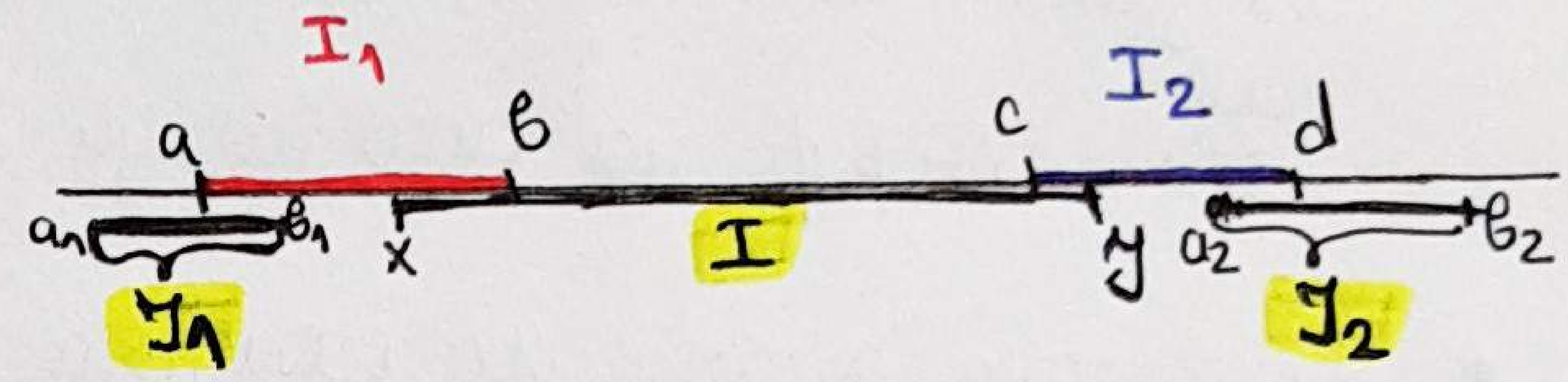
I сече све елементе $\mathcal{C}_1$ или I сече све елементе $\mathcal{C}_2$ ✿

доказ ✿: претп. супротно (нити сече све из $\mathcal{C}_1$, нити све из $\mathcal{C}_2$):

$$(\exists J_1 \in \mathcal{C}_1)(\exists J_2 \in \mathcal{C}_2)\ I \cap J_1 = \emptyset,\ I \cap J_2 = \emptyset$$

$I \in \mathcal{C}_3$ знам да $I \cap I_1 \neq \emptyset$, $I \cap I_2 \neq \emptyset$

• нека је $I = [x, y]$, $J_1 = [a_1, b_1]$, $J_2 = [c_1, d_1]$



• обратимо пажњу на $\{I, J_1, J_2\}$

$I \cap J_1 = \emptyset$, $I \cap J_2 = \emptyset$

због услова ⊛, морало би важити $J_1 \cap J_2 \neq \emptyset$

међутим, пошто J_1 сече I_1 (јер $J_1 \in \mathcal{C}_1$), а J_1 не сече I,

J_1 мора бити лево од I, тј. $b_1 < x$

слично, пошто $J_2 \cap I_2 \neq \emptyset$, $J_2 \cap I = \emptyset$,

J_2 мора бити десно од I, тј. $a_2 > y$

$\Rightarrow J_1 \cap J_2 = \emptyset$, што је ↯ са ⊛ !

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{важи ✿}}$

Дакле, за произв. $I \in \mathcal{C}_3$ важи ✿, па се $\mathcal{C}_3$ може поделити на:

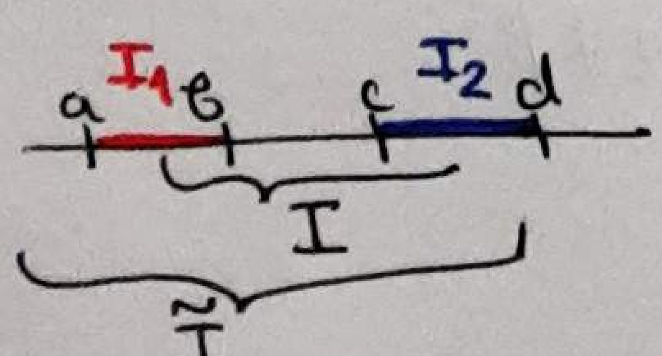
$$\mathcal{C}_3 = \underbrace{\mathcal{C}_{31}}_{\text{секу све елементе } \mathcal{C}_1} \sqcup \underbrace{\mathcal{C}_{32}}_{\text{секу све из } \mathcal{C}_2}$$

(они који секу све елементе из и $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$, било где могу бити)

Сада узимамо: $\boxed{\mathcal{F}_1} := \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_{31}$, $\boxed{\mathcal{F}_2} := \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_{32}$ $\rightarrow$ $\boxed{\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2}$

свака два елемента $\mathcal{F}_1$ се секу јер:

* свака два из $\mathcal{C}_1$ се секу (знамо од пре) ✓
* сваки из $\mathcal{C}_{31}$ сече сваки из $\mathcal{C}_1$ ✓✓
* произв. два из $\mathcal{C}_{31}$: $I, \tilde{I} \in \mathcal{C}_{31}$



како $I \cap I_1 \neq \emptyset$, $I \cap I_2 \neq \emptyset \Rightarrow I \supset [b, c]$

слично $\tilde{I} \supset [b, c] \Rightarrow I \cap \tilde{I} \neq \emptyset$ ✓✓

Хели 4.7. за $\mathcal{F}_1$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\bigcap \mathcal{F}_1 \neq \emptyset}$

Аналогно: $\boxed{\bigcap \mathcal{F}_2 \neq \emptyset}$ крај □