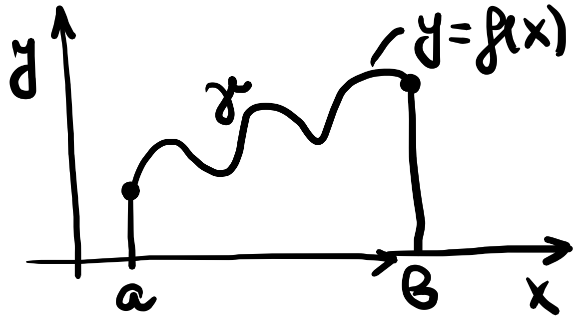
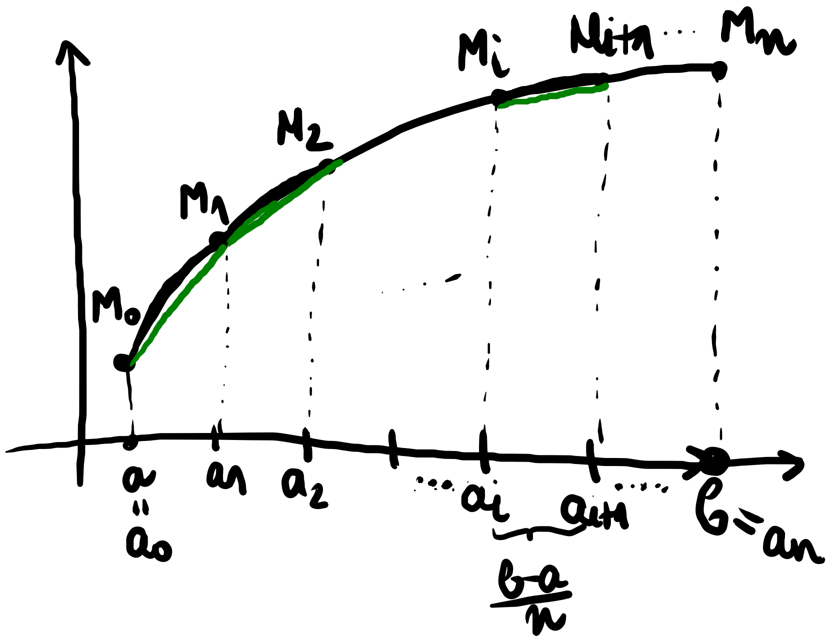
Дужина лука криве



$|\gamma|$ - дужина криве γ

$|\gamma| = ?$

$\boxed{y=f(x)}$ $x\in[a,b]$



$a=a_0<a_1<a_2<\dots<a_{n-1}<a_n=b$

$a_i = a + i\cdot\frac{b-a}{n}$

$[a,b]=[a_0,a_1]\cup[a_1,a_2]\cup\dots\cup[a_{n-1},a_n]$

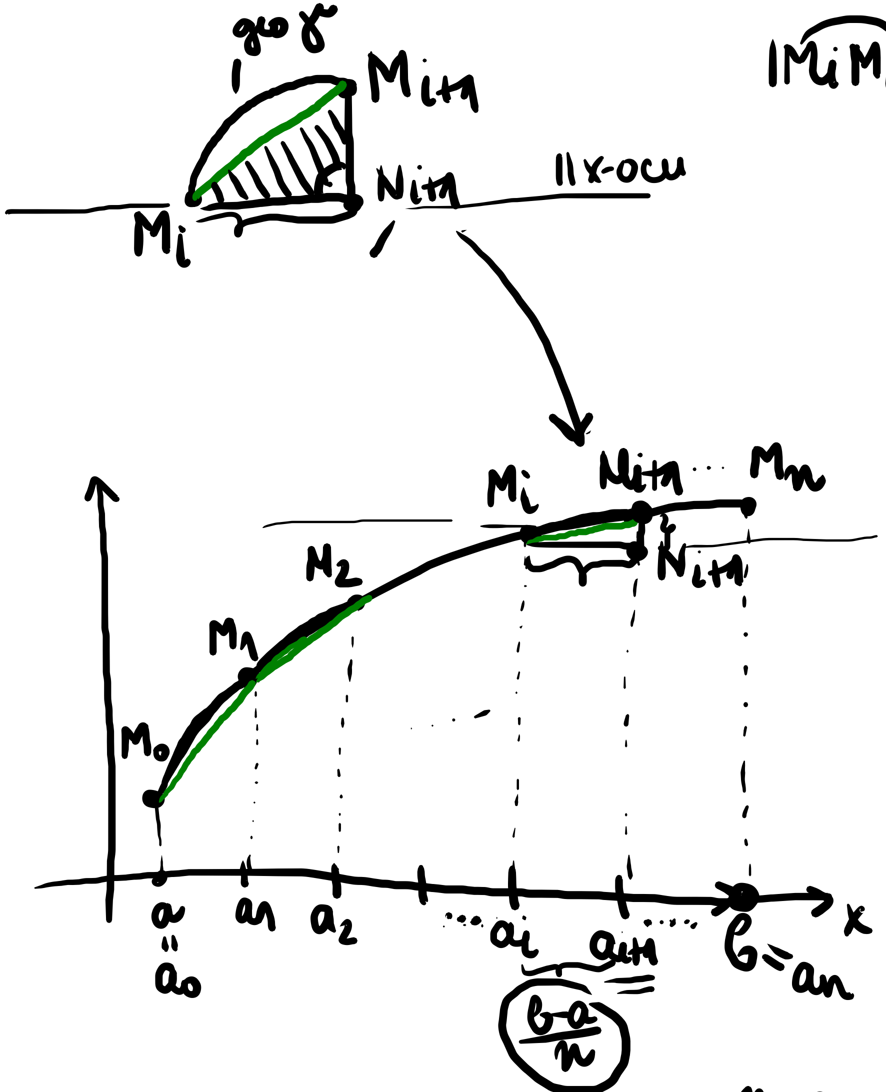
$M_i(a_i, f(a_i))$

$\gamma = \overset{\frown}{M_0M_1}\cup\overset{\frown}{M_1M_2}\cup\dots\cup\overset{\frown}{M_{n-1}M_n}$

$|\overset{\frown}{M_iM_{i+1}}| \approx |\overline{M_iM_{i+1}}|$

део криве дуж

☺ $\sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$



$$|\overset{\frown}{M_iM_{i+1}}| \approx |\overline{M_iM_{i+1}}| = \sqrt{|\overline{M_iN_{i+1}}|^2 + |\overline{N_{i+1}M_{i+1}}|^2}$$

$$= \sqrt{(a_{i+1}-a_i)^2 + (\underbrace{f(a_{i+1})}_{\text{y-коорд. тачке } M_{i+1}} - \underset{\text{y-коорд } N_{i+1}}{f(a_i)})^2} = \underbrace{\sqrt{(a_{i+1}-a_i)^2}}_{\underbrace{|a_{i+1}-a_i|}_{=a_{i+1}-a_i}} \cdot \sqrt{1+\left(\frac{f(a_{i+1})-f(a_i)}{a_{i+1}-a_i}\right)^2}$$

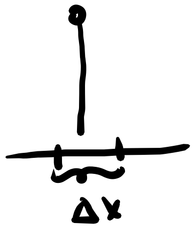
$$= (a_{i+1}-a_i)\cdot\sqrt{1+\left(\frac{f(a_{i+1})-f(a_i)}{a_{i+1}-a_i}\right)^2}$$

Лагранжова теорема
f непрекидно диференц.

$$= (a_{i+1}-a_i)\cdot\sqrt{1+(f'(c_i))^2} \quad c_i\in[a_i,a_{i+1}] \quad \frac{f(a_{i+1})-f(a_i)}{a_{i+1}-a_i} = f'(c_i)$$

$$|\gamma| = \sum_{i=0}^{n-1} |\overset{\frown}{M_iM_{i+1}}| \approx \sum_{i=0}^{n-1} |\overline{M_iM_{i+1}}|$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1}-a_i)\cdot\sqrt{1+(f'(c_i))^2}$$



$n\to\infty$

$$|\gamma| = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{1+(f'(c_i))^2}}_{\text{одређени инт. } \sqrt{1+(f'(x))^2}}$$

Теорема: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ непрекидно диференцијабилне

$y=f(x)$ $|\gamma|=$ дужина лука криве графика $y=f(x)$ $x\in[a,b]$

$$|\gamma|=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

функција задата параметарски - сличан доказ

Теорема: $x=x(t)$, $y=y(t)$ $t\in[\alpha,\beta]$ x,y - непр. диф. функције по t

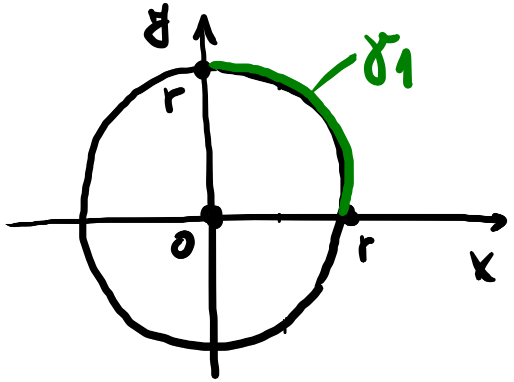
γ - лук криве графика $(x(t),y(t))$ $t\in[\alpha,\beta]$

$$|\gamma|=\int_\alpha^\beta\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt.$$

Пример 1: Обим круга полупречника r

☺ $|\gamma| = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$

1° „експлицитно"



$$|\gamma| = 4\cdot|\gamma_1|$$

$|\gamma_1| = ?$ γ_1: $x\in[0,r]$

$y = f(x)$

$y = \sqrt{r^2-x^2}$

круг: $x^2+y^2=r^2$

$y^2 = r^2 - x^2 \to \sqrt{r^2-x^2}$

$\to -\sqrt{r^2-x^2}$

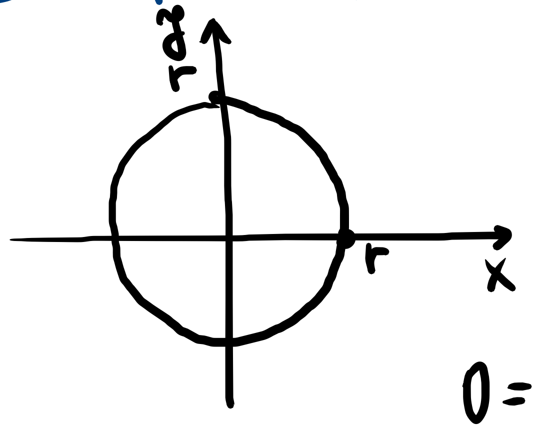
$$\underline{\underline{|\gamma_1|}} = \int_0^r \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = \int_0^r \sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\cdot -2x\right)^2}\,dx$$

$$= \int_0^r \sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx = \int_0^r \sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}\,dx \underset{\substack{\uparrow\\ r>0}}{=} r\cdot\int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}}$$ — ТАБЛИЦА

$$= r\cdot \arcsin\frac{x}{r}\Big|_0^r = r\cdot(\underbrace{\arcsin 1}_{\pi/2} - \underbrace{\arcsin 0}_{0}) = \frac{r\pi}{2}$$

$$O = |\gamma| = 4\cdot|\gamma_1| = 4\,\frac{r\pi}{2} = \boxed{2r\pi}$$

② параметарски



$x^2+y^2=r^2$

$x = r\cos t$

$y = r\sin t$ $\quad t\in[0,2\pi]$

☺ $\int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$

$x'(t) = r\cdot(-\sin t)$ $\quad y'(t) = r\cdot\cos t$

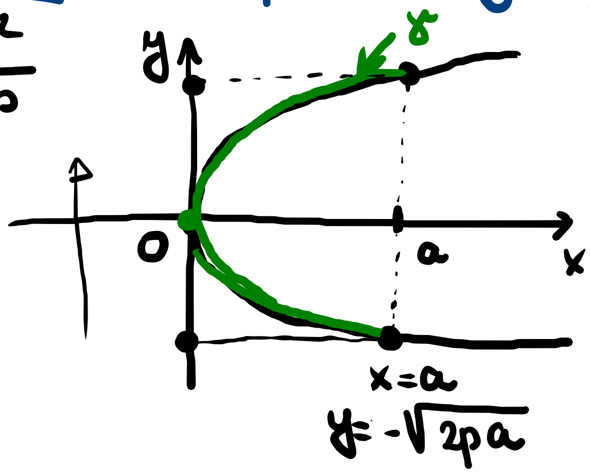
$$O = |\gamma| = \int_0^{2\pi}\sqrt{r^2\cdot\sin^2 t + r^2\cdot\cos^2 t}\,dt = \int_0^{2\pi}\sqrt{r^2}\,dt \overset{r>0}{=} \int_0^{2\pi} r\,dt = r\cdot t\Big|_0^{2\pi}$$

$+ \quad =1$

$= \boxed{r\cdot 2\pi}$

Пример 2: парабола $y^2=2px$ $\quad |\gamma| = ?$ $\quad \gamma$-део параболе за $x\in[0,a]$ $(a,p>0)$

$x=\frac{y^2}{2p}$



$x=f(y)=\frac{y^2}{2p}$ $\quad |\gamma| = \int_?^? \sqrt{1+(f'(y))^2}\,dy$

$y^2=2px$ $\quad x=a \to y_1=\sqrt{2pa}$

$\quad\quad\quad\quad \to y_2=-\sqrt{2pa}$

$f'(y)=\frac{2y}{2p}=\frac{y}{p}$

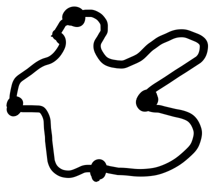
$$|\gamma| = \int_{-\sqrt{2pa}}^{\sqrt{2pa}}\sqrt{1+\frac{y^2}{p^2}}\,dy = 2\cdot\int_0^{\sqrt{2pa}}\frac{\sqrt{p^2+y^2}}{\sqrt{p^2}}\,dy \overset{p>0}{=} \frac{2}{p}\int_0^{\sqrt{2pa}}\sqrt{p^2+y^2}\,dy$$

таблице

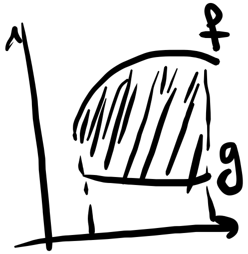
$$|\gamma| = \frac{2}{p}\cdot\int_0^{\sqrt{2pa}} \sqrt{p^2+y^2}\,dy = \frac{2}{p}\cdot\left(\frac{y}{2}\sqrt{p^2+y^2}+\frac{p^2}{2}\cdot\ln\left(y+\sqrt{y^2+p^2}\right)\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2pa}} = \dots$$ рачун

Примена интеграла у геометрији

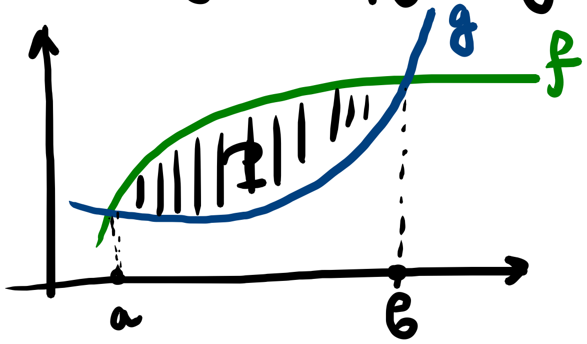
у равни:



површина



између две функције:



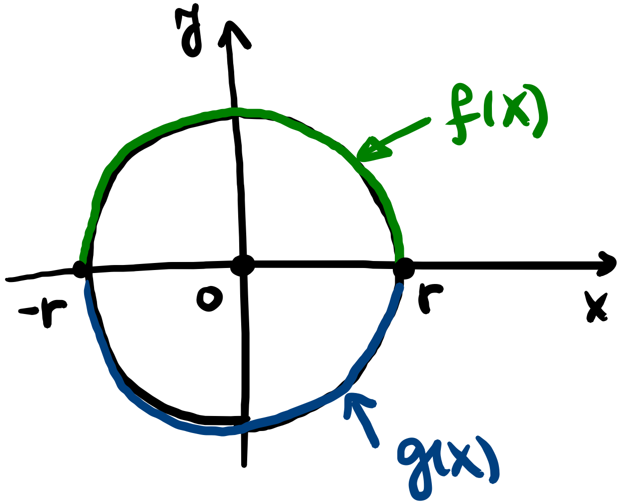
f,g - ограничавају P

$g(x) \le f(x),\ \forall x \in [a,b]$

$$\boxed{P = \int_a^b (f(x)-g(x))\,dx}$$

Пример 1: P(круг полупречника r) = ?

☺ $\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx = P$



$x^2+y^2=r^2$ $\quad y=\underline{\underline{f}}(x)=\sqrt{r^2-x^2}\quad \boxed{y \geq 0}$

$y=\underline{\underline{g}}(x)=-\sqrt{r^2-x^2}\quad \boxed{y \leq 0}$

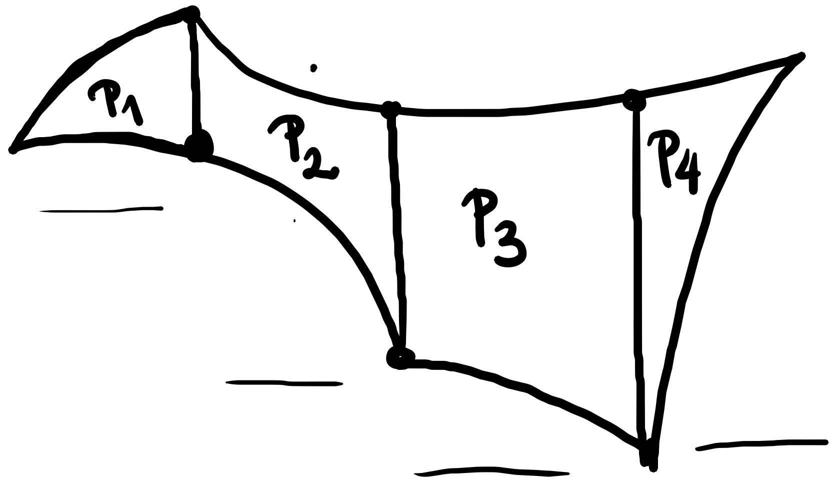
P(круга) = P(између f и g)

$$= \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2-x^2} - \left(-\sqrt{r^2-x^2}\right)\right) dx$$

$$= 2\cdot \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\,dx \leftarrow \text{таблица}$$

$$= 2\cdot\left(\frac{r^2}{2}\cdot \arcsin\frac{x}{r} + \frac{x}{2}\sqrt{r^2-x^2}\right)\Bigg|_{-r}^{r}$$

$$= 2\cdot\left(\frac{r^2}{2}\cdot \underbrace{\arcsin 1}_{\frac{\pi}{2}} + 0 - \frac{r^2}{2}\cdot \underbrace{\arcsin(-1)}_{-\frac{\pi}{2}} - 0\right) = \frac{r^2\pi}{2} + \frac{r^2\pi}{2} = \boxed{r^2\pi}$$



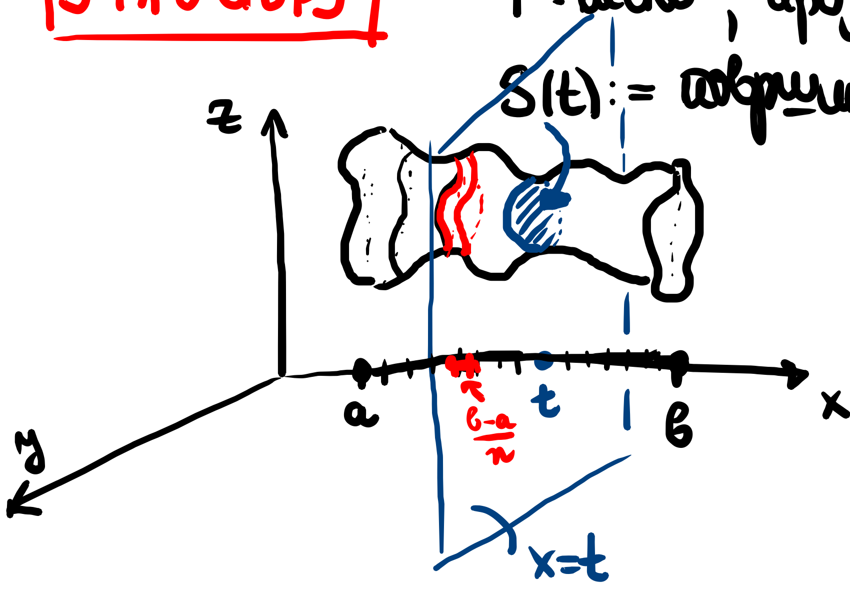
$P = ?$

У ПРОСТОРУ

T - тело, пројекција од T на x-осу је $[a,b]$

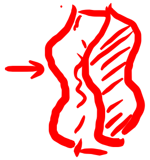
$S(t) :=$ површина површи која се добија у пресеку T и равни $x=t$

$t \in [a,b]$



$$\boxed{V(T) = \int_a^b S(t)\,dt}$$

парче: →

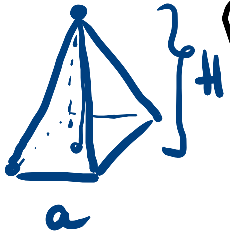


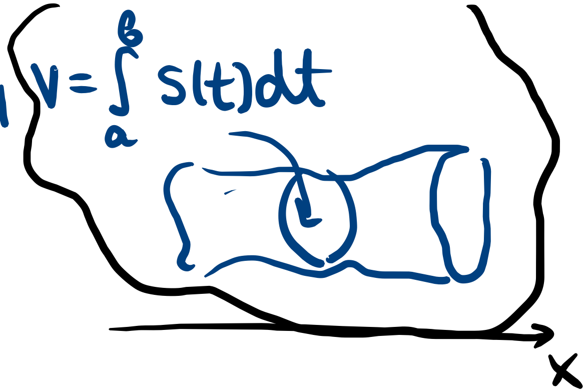
$(b-a)/n$

$V(\text{парчета}) \approx \frac{b-a}{n} \cdot S(t_i)$

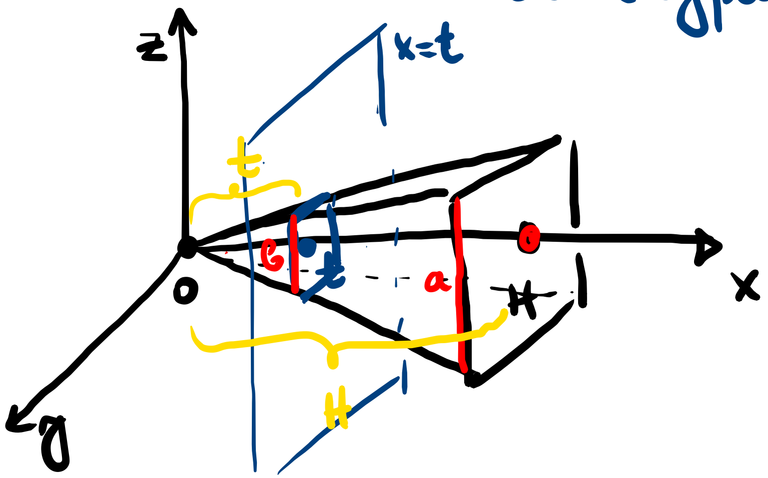
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} S(t_i) = \int_a^b S(t)\,dt$$

Пример 1 T = четворострана пирамида висине H основа квадрат странице a





$$V=\int_a^b S(t)\,dt$$

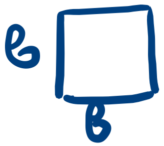


← Висина пирамида на x-оси
врх - коорд. почетак

пр. T на x-осу: $[0,H]$

$S(t)=?$

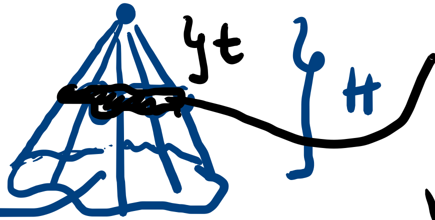
S(t) = површина квадрата странице b



$b=?$ $\quad \frac{b}{a}=\frac{t}{H}$ $\quad \boxed{b=\frac{a\cdot t}{H}}$ (пропорција)

$$S(t)=b^2=\frac{a^2t^2}{H^2} \Rightarrow V=\int_0^H \frac{a^2t^2}{H^2}dt=\frac{a^2}{H^2}\cdot\frac{t^3}{3}\Big|_0^H=\frac{a^2}{H^2}\cdot\frac{H^3}{3}=\boxed{\frac{a^2\cdot H}{3}}$$

Пример 2 - општије:



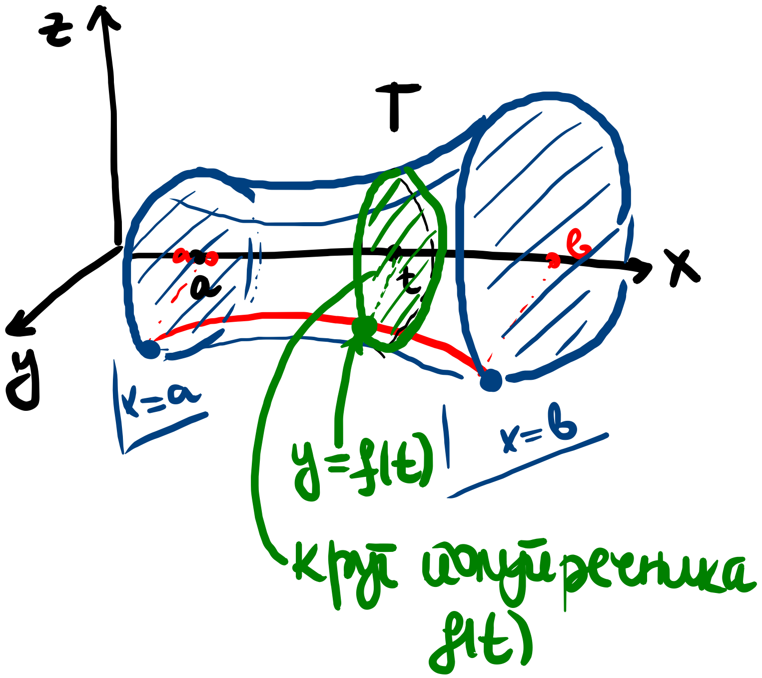
база B

$$\boxed{S(t)=B\cdot\frac{t^2}{H^2}}$$

$$V(T)=\int_0^H B\frac{t^2}{H^2}dt=\frac{B}{H^2}\cdot\int_0^H t^2dt=\frac{B}{H^2}\cdot\frac{t^3}{3}\Big|_0^H=\boxed{\frac{B\cdot H}{3}}$$

Дефиниција: $y=f(x),\ x\in[a,b]$

Ротационо тело задато са f је T ограничено са површи која се добија ротацијом графика $y=f(x)$ око x-осе, и са равнима $x=a$ и $x=b$



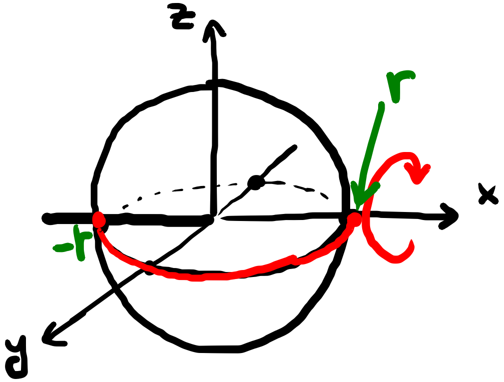
$$V(T)=?$$

$$V(T)=\int_a^b \underbrace{S(t)}_{\substack{\parallel \\ (f(t))^2\pi}}dt=\int_a^b (f(t))^2\pi\, dt$$

запремина ротационог тела

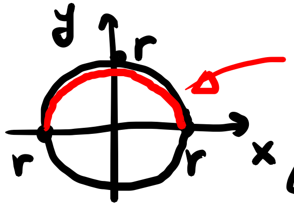
$$V(t)=\pi\cdot\int_a^b (f(t))^2 dt$$

Пример: V(сфере полупр. r) = ?



„коју фју вртимо" ?

$\underline{\underline{r}}$



$x^2+y^2=r^2$

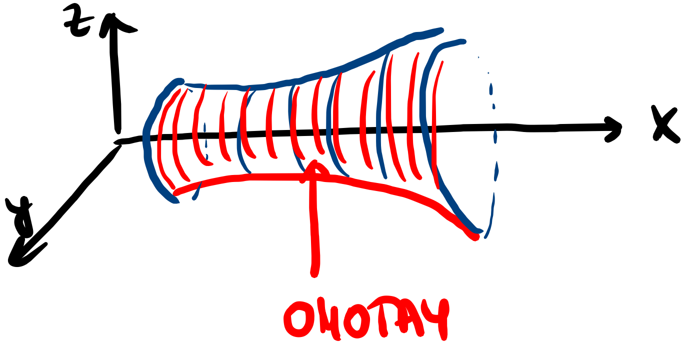
$y>0$

$$\boxed{y=\sqrt{r^2-x^2}=f(x)}$$

$$V=\pi\cdot\int_{-r}^{r}(f(x))^2dx=\pi\cdot\int_{-r}^{r}\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2dx=\pi\cdot\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)dX=\pi\cdot\left(r^2\cdot x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-r}^{r}$$

$$=\pi\cdot\left(r^3-\frac{r^3}{3}-(-r)^3-\left(-\frac{(-r)^3}{3}\right)\right)=\boxed{\frac{4}{3}r^3\pi}$$ □

Површина ротационог тела



Теорема $y = f(x),\ x \in [a, b]$

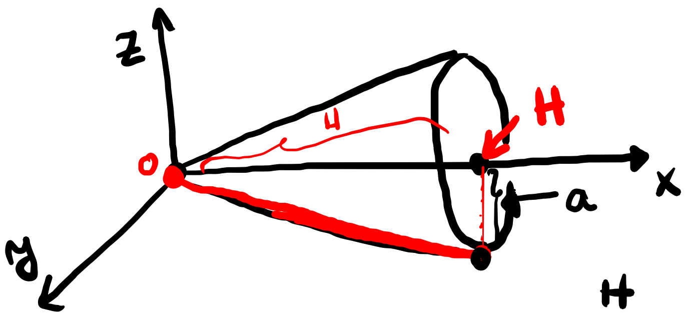
f - непр. диференцијабилна

P(омотача рот. тела које се добија ротацијом графика f око x-осе)

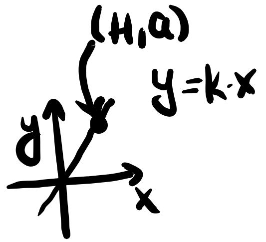
$$= 2\pi \cdot \int_a^b |f(x)| \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Пример 1: K - купа висине H и полупр. основе a

P(омотача K) = ?



K - поставимо тако да x-оса садржи висину



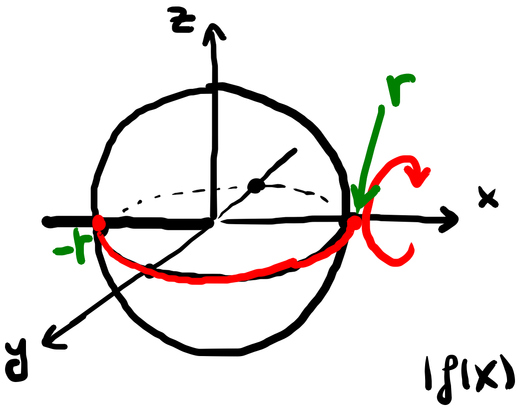
$y = f(x)\ ,\ x \in [0, H]$

$y = f(x) = \boxed{\frac{a}{H} \cdot x}$ $\qquad f'(x) = \frac{a}{H}$

$$P(\text{омотачK}) = 2\pi \cdot \int_0^H \Big|\underbrace{\frac{a}{H} \cdot x}_{\geq 0}\Big| \cdot \sqrt{1 + \frac{a^2}{H^2}}\, dx = 2\pi \cdot \frac{a}{\cancel{H}} \cdot \sqrt{1 + \frac{a^2}{H^2}} \cdot \boxed{\int_0^H x\, dx} = \boxed{a\pi \sqrt{a^2 + H^2}}\ \blacksquare$$

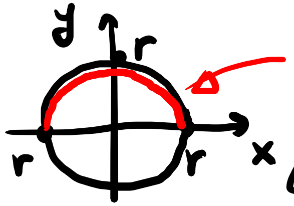
$$\frac{x^2}{2}\Big|_0^H = \frac{H^{\cancel{2}}}{2}$$

Пример 2 P (сфере полупр. r) $=?$



„коју фју вртимо" ?

r



$x^2+y^2=r^2$

$y>0$

$$\boxed{y=\sqrt{r^2-x^2}=f(x)}$$

$$P=2\pi\cdot\int_{-r}^{r}\overbrace{\sqrt{r^2-x^2}}^{|f(x)|}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{-\cancel{2}x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}\,dx=2\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\cdot\sqrt{\boxed{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}}\,dx$$

$$\boxed{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}=\frac{r^2}{r^2-x^2}$$

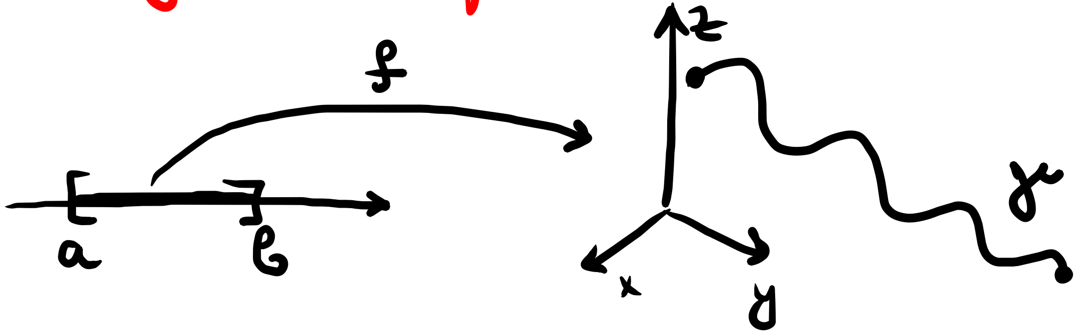
$$=2\pi\int_{-r}^{r}\cancel{\sqrt{r^2-x^2}}\cdot\frac{\boxed{\sqrt{r^2}}}{\cancel{\sqrt{r^2-x^2}}}\,dx=2\pi\int_{-r}^{r}r\,dx=2\pi\cdot r\,\boxed{x\Big|_{-r}^{r}}$$

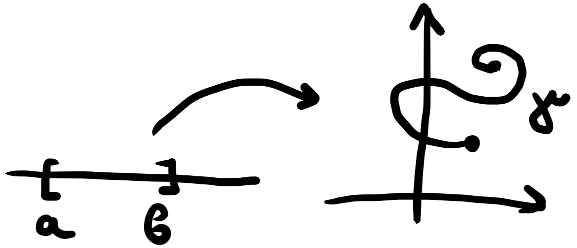
$$\sqrt{r^2}=|r|=r \qquad x\Big|_{-r}^{r}=2r$$

$$=\boxed{4r^2\pi}\ \square$$

(2.15.) Криволинијски интеграл

γ: крива





$g(t) = (x(t), y(t), z(t))$ - параметризација криве у $\mathbb{R}^3$

$g(t) = (x(t), y(t))$ парам. криве у $\mathbb{R}^2$

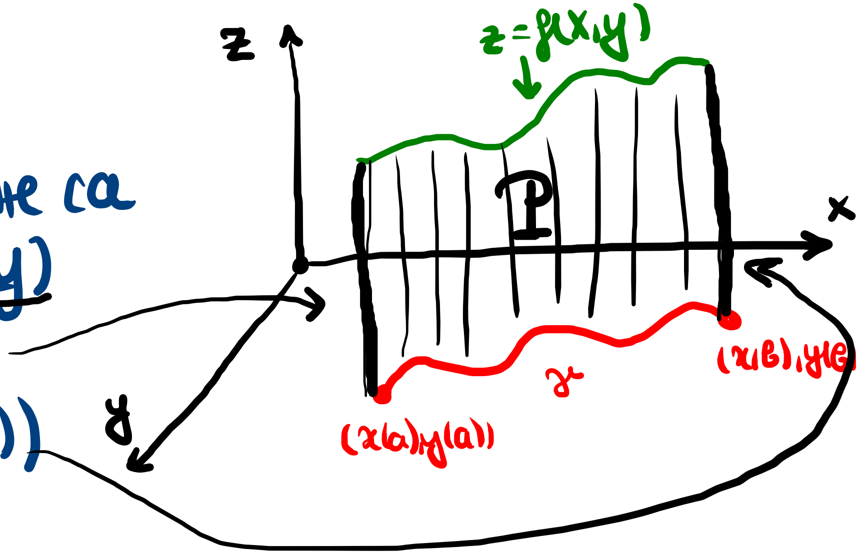
Деф γ-крива у $\mathbb{R}^2$ задата: $x = x(t), y = y(t), t \in [a,b]$, $x(t)$ и $y(t)$ - непр. диф. фје

$f : \gamma \to \mathbb{R}$ непр. фја

КРИВОЛИНИЈСКИ ИНТЕГРАЛ I ВРСТЕ фје f по γ

$$\int_\gamma f(x,y)\, ds \quad :=$$

површина површи P ограничене са γ, графиком фје $z = f(x,y)$ и правама $(x = x(a), y = y(a))$ и $(x = x(b), y = y(b))$



Став (услови...) $\int_\gamma f(x,y)\,ds = \int_a^b f(x(t),y(t))\cdot\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$ $\circledast$

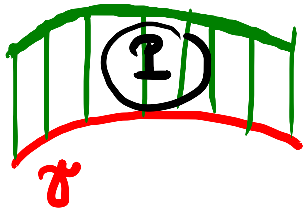
Специјални случајеви:

1° ако је γ график фје $y=h(x)$

$x=x$
$y=h(x)$ (x=параметар t)

$$\circledast \quad \int_\gamma f(x,y)\,ds = \int_a^b f(x,h(x))\cdot\sqrt{1+(h'(x))^2}\,dx$$

2° Ако је $f\equiv 1$ (const)



$P = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{висине}}}{1}\cdot|\gamma| = \int_\gamma f(x,y)\,ds$

$P=|\gamma|$

$$\circledast \quad \int_\gamma f(x,y)\,ds = \underbrace{\int_a^b \overset{f}{1}\cdot\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt}_{\text{дужине } \gamma}$$

Деф: $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ – крива параметризована помоћу непр диф фја $x=x(t), y=y(t), z=z(t)$, $t\in[a,b]$

$f:\gamma\to\mathbb{R}$ непр фја

криволинијски интеграл фје f по кривој γ :

$$\int_\gamma f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\cdot\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt$$

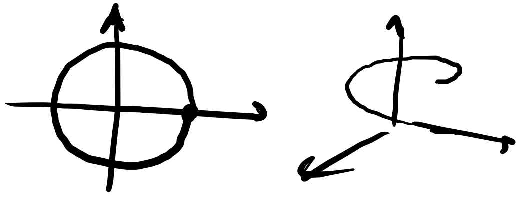
Пример 1: γ: $x(t)=a\cdot\cos t$

$y(t)=a\cdot\sin t$

$z(t)=b\cdot t$

$(a,b>0)$ $t\in[0,2\pi]$

$$I=\int_\gamma \overbrace{(x^2+y^2+z^2)}^{f(x,y,z)}ds=?$$



део хеликса

(завојница)

helix

$$I=\int_0^{2\pi}(\underbrace{a^2\cos^2t+a^2\sin^2t}_{a^2}+b^2t^2)\cdot\sqrt{\underbrace{a^2(\sin t)^2+a^2\cos^2t+\overset{z'}{b^2}}_{a^2+b^2}}\,dt \quad =1$$

$$=\int_0^{2\pi}(a^2+b^2t^2)\cdot\sqrt{a^2+b^2}\,dt = a^2\sqrt{a^2+b^2}\cdot t\Big|_0^{2\pi}+b^2\sqrt{a^2+b^2}\cdot\frac{t^3}{3}\Big|_0^{2\pi}=\boxed{a^2\sqrt{a^2+b^2}\cdot 2\pi+b^2\sqrt{a^2+b^2}\cdot\frac{8\pi^3}{3}}\ \square$$

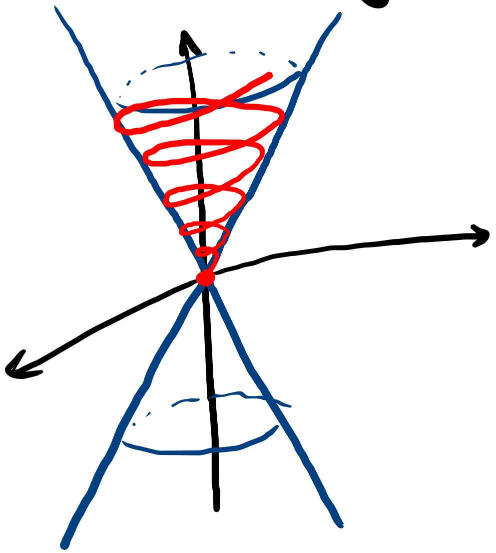
Пример 2: γ: $x(t)=t\cdot\cos t$
$y(t)=t\cdot\sin t$
$z(t)=t$
$t\in[0,a]$

$$I=\int_\gamma z\,ds=?\qquad f(x,y,z)=z$$

Како изгледа γ?

$x^2+y^2=t^2=z^2$

$x^2+y^2=z^2$ – једначина конуса



$$I=\int_0^a \overset{f}{t}\cdot\sqrt{\overset{x'(t)}{(\cos t-t\cdot\sin t)^2}+\overset{y'(t)}{(\sin t+t\cdot\cos t)^2}+\overset{z'(t)}{1}}\;dt$$

$$=\int_0^a t\cdot\sqrt{1+t^2+1}\;dt=\int_0^a\sqrt{2+t^2}\;\underbrace{t\,dt}_{\frac{d(2+t^2)}{2}}$$

$$=\int_0^a\sqrt{2+t^2}\cdot\frac{d(2+t^2)}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2+t^2)^{3/2}}{3/2}\Big|_0^a$$

$$\sqrt{y}\,\frac{dy}{2}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left((2+a^2)^{3/2}-2^{3/2}\right)\qquad\square$$

Деф γ у $\mathbb{R}^3$ задата са: $x=x(t), y=y(t), z=z(t), t\in[a,b]$ непр. диф. ф-је

три непр. ф-је на γ: $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$

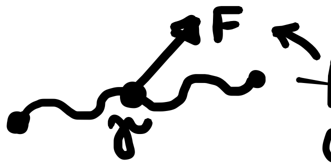
за $\mathbb{R}^2$
само нема z

КРИВОЛИНИЈСКИ ИНТЕГРАЛ II ВРСТЕ функција (P,Q,R) на кривој γ

$$\int_\gamma Pdx+Qdy+Rdz=\int_\gamma P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$

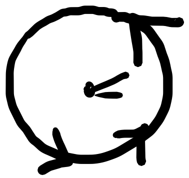
$$=\int_a^b \Big(P(x(t),y(t),z(t))\cdot x'(t)+Q(x(t),y(t),z(t))\cdot y'(t)+$$
$$+R(x(t),y(t),z(t))\cdot z'(t)\Big)\,dt$$

* мотивација:

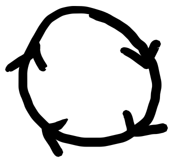


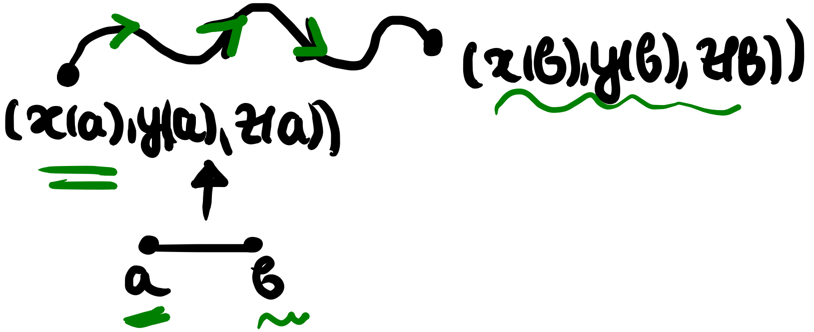
$F=(P,Q,R)$
сила врши рад дуж γ ⇝ рад: $A=\int_\gamma Pdx+Qdy+Rdz$

* оријентација криве



супр. од каз. сата





Деф γ у $\mathbb{R}^3$ задата са: $x=x(t), y=y(t), \cancel{z=z(t)}, t\in[a,b]$ непр. диф. ф-је

за $\mathbb{R}^2$
само нема
z

три непр. ф-је на γ: $P(x,y,\cancel{z}),\ Q(x,y,\cancel{z}),\ \cancel{R(x,y,z)}$

КРИВОЛИНИЈСКИ ИНТЕГРАЛ
II ВРСТЕ функција (P, Q, R)
на кривој γ

$$\boxed{\int_\gamma P\,dx+Q\,dy}+\cancel{R\,dz}=\int_\gamma P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+\cancel{R(x,y,z)\,dz}$$

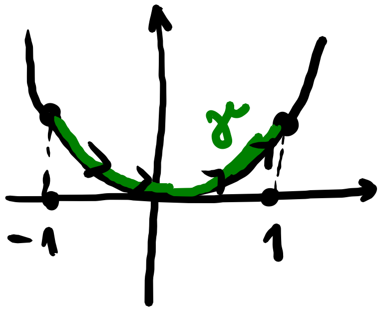
$$=\int_a^b\Big(P(x(t),y(t),\cancel{z(t)})\cdot x'(t)+Q(x(t),y(t),\cancel{z(t)})\cdot y'(t)+\cancel{R(x(t),y(t),z(t))\cdot z'(t)}\Big)\,dt$$

Пример 1 $I=\int_\gamma \underbrace{(x^2+y^2)}_{P(x,y)}dx+\underbrace{(x^2-y^2)}_{Q(x,y)}dy$

γ: парабола $y=x^2, x\in[-1,1]$

↳ као график: x-параметар $x\in[-1,1]$

$y=x^2$ $(x,x^2)\to x'=1$
$y'=2x$

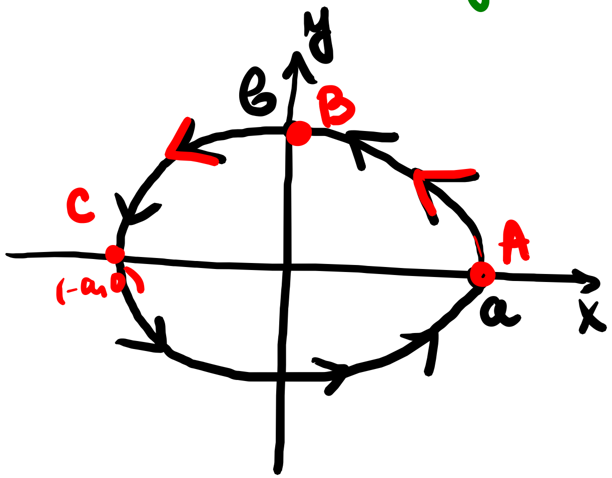


$$I=\int_{-1}^{1}\Big(\big(x^2+\overset{y^2}{x^4}\big)\cdot 1+(x^2-x^4)\cdot 2x\Big)\,dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(x^2+x^4+2x^3-2x^5)\,dx=\text{рачун}\ \ldots$$

Пример 2: $I=\int_\gamma (x+y)dx+(x-y)dy$ γ - елипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

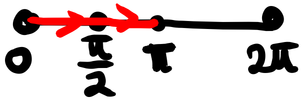
оријентисане супротно каз. сата



$x=x(t)=a\cdot\cos t$

$y=y(t)=b\cdot\sin t$

$t\in[0,2\pi]$



за $t=0$: $(a,0)$ A

за $t=\frac{\pi}{2}$: $(0,b)$ B

за $t=\pi$: $(-a,0)$ C

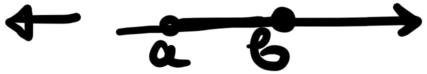
! Да ли је добра оријентација? ✓

$$I=\int_\gamma \underbrace{(x+y)}_{P}dx+\underbrace{(x-y)}_{Q}dy=\int_0^{2\pi}\Big((a\cos t+b\sin t)\cdot\overbrace{(-a\sin t)}^{x'(t)}+(a\cos t-b\sin t)\cdot\overbrace{b\cos t}^{y'(t)}\Big)dt$$

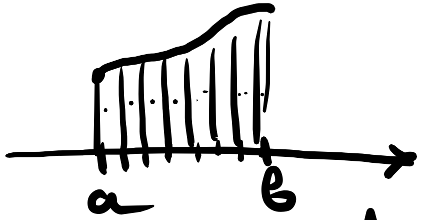
$$=\int_0^{2\pi}\left(a^2\cdot(-\sin t\cos t)-b^2\cdot\sin t\cos t\underbrace{-ab\cdot\sin^2 t+ab\cos^2 t}\right)dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{a^2+b^2}{2}\cdot\overset{\sin 2t}{\boxed{2\sin t\cos t}}+ab\cdot(\overset{\cos 2t}{\cos^2 t-\sin^2 t})\right)dt$$

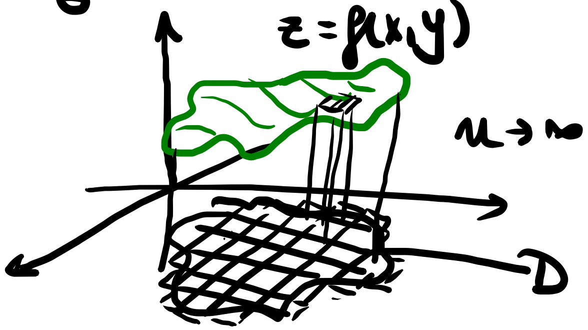
$$=-\frac{a^2+b^2}{2}\cdot-\frac{\cos 2t}{2}\Big|_0^{2\pi}+ab\cdot\frac{\sin 2t}{2}\Big|_0^{2\pi}\dots=0 \qquad \square$$

$\int_a^b f(t)\,dt \leftarrow$ 

$[a,b]\subset\mathbb{R}$



$D\subset\mathbb{R}^n \rightsquigarrow \int_D f(\dots)\,ds$



$D\subset\mathbb{R}^2$: $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ - двоструки интеграл

$D\subset\mathbb{R}^3$: $\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ - троструки интеграл

$T\subset\mathbb{R}^3$ $V(T) = \iiint dx\,dy\,dz$

запремина T

② 2.16 - разно о интегралима

Кратко о применама интеграла у физици

Пр1

0 - поч. трен.

t: v(t) - брзина
s(t) - пређени пут

$$\boxed{s'(t)=v(t)}$$

$$\rightarrow \boxed{s(t)=s(0)+\int_0^t v(x)\,dx} \longrightarrow$$

кола: $v_0=5\,m/s=v(0)$

$a=0{,}1\,m/s^2$ - убрзање (константно)

$\underbrace{5\,min}_{\overset{\shortparallel}{300s}}$ - пређени пут?

$s(300)=?$

$$v(t)=v(0)+a\cdot t=\underbrace{5+0{,}1\cdot t}$$

$$s(300)=\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{s(0)}+\int_0^{300}(5+0{,}1t)\,dt=$$

$$=\left(5t+0{,}1\cdot\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^{300}$$

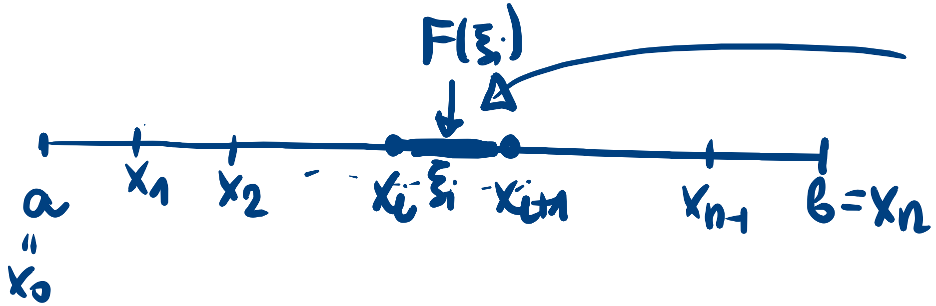
$$=5\cdot 300+0{,}1\frac{(300)^2}{2}\ldots=6000$$

$$\boxed{S=6000m}$$

Пример 2:

A - рад те силе

$A = ?$

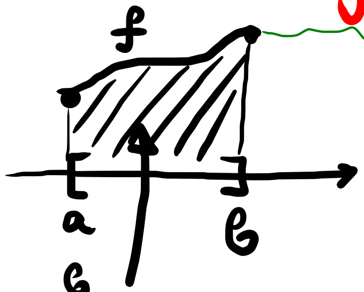


$$A_i \approx F(\xi_i)\cdot(x_{i+1}-x_i)$$

$$A = \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} F(\xi_i)\cdot(x_{i+1}-x_i)}_{\text{интегрална сума за } F \text{ на } [a,b]}$$

$n \to \infty$:
$$\boxed{A = \int_a^b F(x)\,dx}$$

Несвојствени интеграли



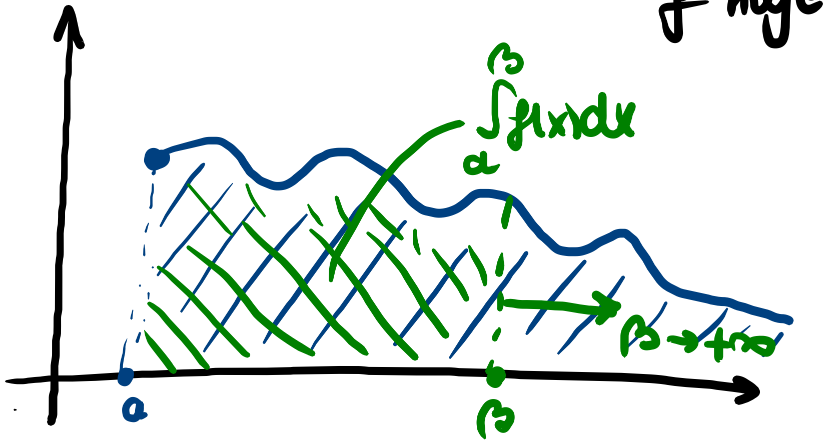
$\int_a^b f(x)dx$

- домен D неограничен
- f неограничена

Деф 1 f: $[a, +\infty) \to \mathbb{R}$ непрекидна

несвојствени интеграл (I врсте) $\int_a^{+\infty} f(x)dx := \lim_{\beta\to+\infty}\int_a^{\beta} f(x)dx$, ако лимес постоји и коначан је

(Ако лимес не постоји/бесконачан онда $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ дивергира, f није интеграбилна на $[a,+\infty)$)



Сл: $(-\infty, a]$: $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{\beta\to-\infty}\int_{\beta}^{a} f(x)dx$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{a} f(x)dx}_{\exists} + \underbrace{\int_{a}^{+\infty} f(x)dx}_{\exists}$$

Пр1 : $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{\beta\to+\infty}\int_0^{\beta} e^{-x}dx =$

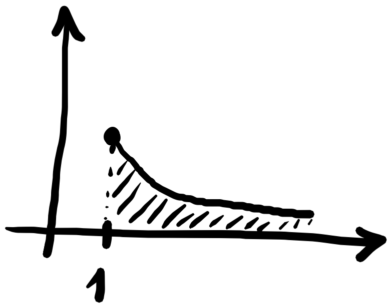
$$= \lim_{\beta\to+\infty}\left((-e^{-x})\Big|_0^{\beta}\right) = \lim_{\beta\to+\infty}\left(-e^{-\beta}+e^{0}\right) = \lim_{\beta\to+\infty}\left(1-\underbrace{e^{-\beta}}_{\downarrow\, 0}\right) = \boxed{1}$$

Пр2 : $\int_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^2} = \lim_{\beta\to-\infty}\int_{\beta}^{-1}\frac{dx}{x^2} = \lim_{\beta\to-\infty}\left(\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{\beta}^{-1}\right) = \lim_{\beta\to-\infty}\left(1+\underbrace{\frac{1}{\beta}}_{\to 0}\right) = \boxed{1}$

Важен пример: $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx$ – кога $\exists$?

$\alpha>0$

$\Longleftrightarrow \alpha>1$



$\alpha\in(0,1)$ $\neg\exists\int^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx$

$\alpha>1$: $\exists\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx$

$\boxed{\alpha=1}$: $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx = \lim_{\beta\to+\infty}\left(\int_1^{\beta}\frac{1}{x}dx\right) = \lim_{\beta\to+\infty}\left((\ln x)\Big|_1^{\beta}\right) = \lim_{\beta\to+\infty}\left(\ln\beta-\underbrace{\ln 1}_{0}\right) = \lim_{\beta\to+\infty}\ln\beta = +\infty$

$\neg\exists$

не конвергира!

$\alpha>0, \alpha\neq1$: $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx = \lim_{\beta\to+\infty}\left(\int_1^{\beta}x^{-\alpha}dx\right) = \lim_{\beta\to+\infty}\left(\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_1^{\beta}\right) = \lim_{\beta\to+\infty}\left(\frac{\beta^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}\right)$

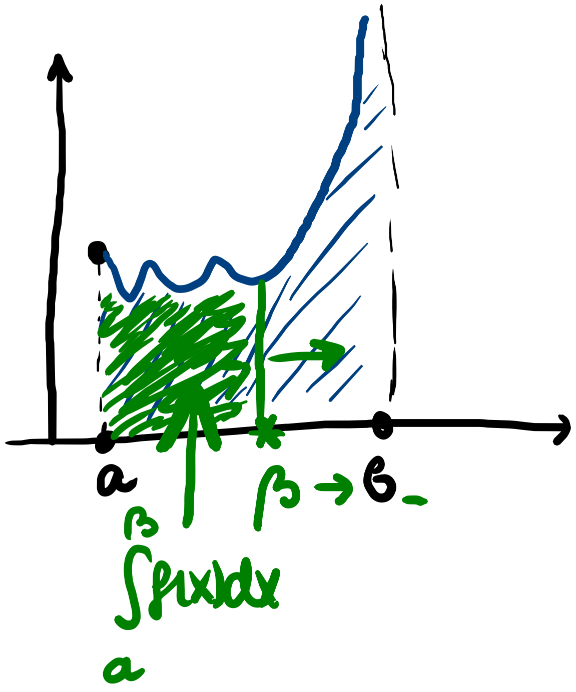
→ за $1-\alpha>0$ $\neg\exists$

→ за $1-\alpha<0$: $\frac{1}{\alpha-1}$

Деф2 $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ непр. ф-ја

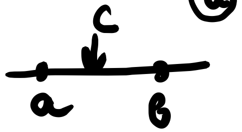
f неограничена у околини b

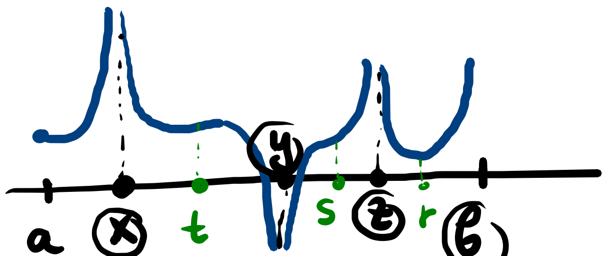
НЕСВОЈСТВЕНИ ИНТЕГРАЛ II ВРСТЕ: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\beta\to b_-}\int_a^\beta f(x)dx$, ако лимес ∃ и коначан је



* аналогно: $\int_b^a f(x)dx = \lim_{\beta\to b_+}\int_\beta^a f(x)dx$

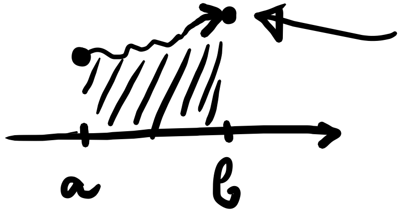
* $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$





$$\int_a^b = \int_a^x + \int_x^y + \int_y^z + \int_z^b = \int_a^x + \int_x^t + \int_t^y + \int_y^s + \int_s^z + \int_z^r + \int_r^b$$

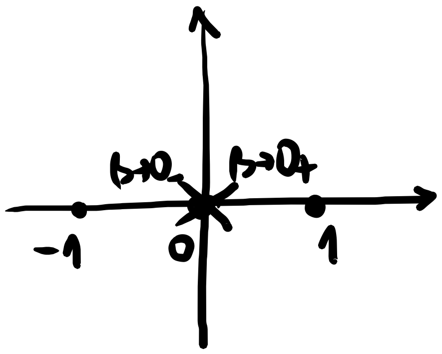
* ако $\exists \lim_{x\to b_-} f(x) = B$



додефинишемо f у b

$f(b) := B$

Пример: $I=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int_{-1}^{\textcircled{0}}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \int_{\textcircled{0}}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\beta\to0_-}\int_{-1}^{\beta}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \lim_{\beta\to0_+}\int_{\beta}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$



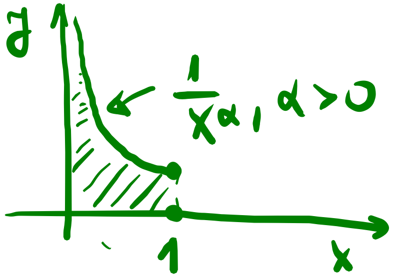
$$=\lim_{\beta\to0_-}\left(\frac{x^{2/3}}{2/3}\right)\Bigg|_{-1}^{\beta} + \lim_{\beta\to0_+}\left(\frac{x^{2/3}}{2/3}\right)\Bigg|_{\beta}^{1}$$

$$=\lim_{\beta\to0_-}\left(\frac{\cancelto{0}{\beta^{2/3}}}{2/3}-\frac{1}{2/3}\right)+\lim_{\beta\to0_+}\left(\frac{1}{2/3}-\frac{\cancelto{0}{\beta^{2/3}}}{2/3}\right)$$

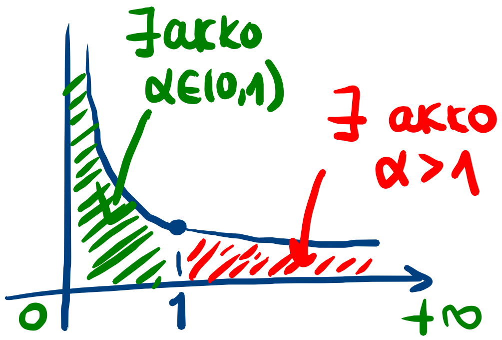
$$= -\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=\textcircled{0}$$

Важен пример $\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^{\alpha}}$

$\alpha>0$



конвергира $\Leftrightarrow$ $\alpha\in(0,1)$



$\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx$ $\textcircled{$\nexists$}$

~ Диференцијалне једначине ~

Основни појмови: $\underline{\underline{x}}$ – нез. пром. $\underline{y}(x)$ $y', y'', \ldots$

$$⊛ \quad \boxed{F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0}$$ – диференцијална једначина (ДЈ)

n – највећи извод ← **РЕД**

било која $y=f(x)$ која задовољава ⊛ ← РЕШЕЊЕ ДЈ

Пр

(1) $y^3 + y'' - 7x^2 + \sin x \cdot y' = 0$ ← ДЈ реда 2

(2) $y''' - y' + 2y = 0$ реда 3

(3) $y^{(n)} = 0$ реда n

(4) $\boxed{y' - f(x) = 0}$ реда 1

$$y' = f(x)$$

$$y = \underbrace{\int f(x)dx}_{\varphi(x) \text{ прим фја}} + C$$

(5) $\boxed{x\cdot y'+y=0}$ $\iff (x\cdot y)'=0$

$\uparrow$

$x\cdot y'+1\cdot y=(x\cdot y)'$ $\iff x\cdot y=C$ - const

$$\boxed{y(x)=\frac{C}{x}}$$

Решити ДЈ : наћи све ф-је $y(x)$ које задовољавају ту ДЈ

Напомена: $\boxed{F(x,y,y',\dots,y^{(n)})=0}$ ← по једној пром. x

ОБИЧНА ДЈ

$z(x,y)$: парцијални изводи $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, \dots$

пр. $x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\cdot\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+z=0$ ← ПАРЦИЈАЛНА ДЈ реда 2

$u(x,y,t)$: $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}-u=0$

Диференцијалне једначине првог реда

$n=1$: (1) $F(x,y,\underline{\underline{y'}})=0$

ако можемо да представимо ДЈ (1) у облику

$$y'=f(x,y) \qquad (2)$$

1) да ли ∃ решење (1) (тј. (2)) ?

2) Ако ∃, да ли је јединствено?

Теорема Посматрамо ДЈ (2): $y'=f(x,y)$ такву да су $\underline{\underline{f(x,y)}}$ и $\underline{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}$ дефинисане и непрекидне на области $D\subset\mathbb{R}^2$. Тада за сваку тачку $(x_0,y_0)\in D$ постоји јединствено решење $y=\varphi(x)$ једн. (2) које задовољава $y(x_0)=y_0$.

$$y=\varphi(x)$$
$$\boxed{y(x_0)=y_0}$$

(2) има бесконачно много решења (у општем сл.)

← ПОЧЕТНИ УСЛОВ $y|_{x=x_0}=y_0$, $y(x_0)=y_0$

Деф: (2) ДЈ. $y'=f(x,y)$ & (1) ДЈ. $F(x,y,y')=0$

ОПШТЕ РЕШЕЊЕ ДЈ: фамилија фја $y=\varphi(x,C)$ зависе од C-const

за почетни услов: $y(x_0)=y_0 \xrightarrow{\exists 1} y=\varphi(x,C_0)$ - ПАРТИКУЛАРНО РЕШЕЊЕ које задовољава $y(x_0)=y_0$

Пример (1) $y'-3x^2=0$ почетни услов $y(x_0)=y_0$

$y'=3x^2 \ /\int \quad y=\int 3x^2dx \quad \boxed{y=x^3+C}$ ОПШТЕ РЕШЕЊЕ

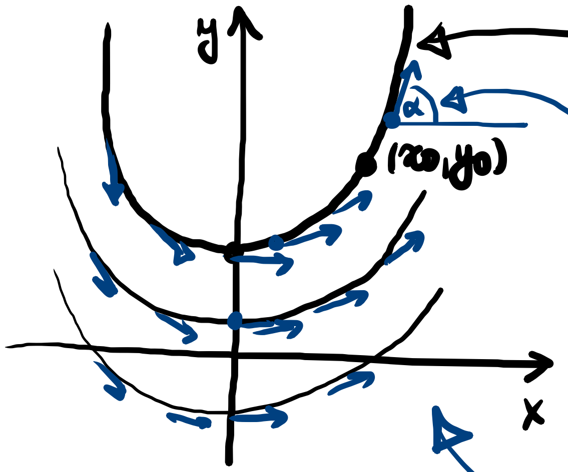
$y(x_0)=y_0 \quad y_0=x_0^3+C_0 \Rightarrow C_0=y_0-x_0^3$ ПАРТИКУЛАРНО РЕШ. $\boxed{y=x^3+y_0-x_0^3}$

(2) $\boxed{x\cdot y'+y=0} \xrightarrow{\text{пр 5)}} \boxed{y(x)=\frac{C}{x}}$ О.Р.

поч. услов: $y(1)=5 \rightarrow 5=\frac{C_0}{1} \Rightarrow C_0=5 \rightarrow$ партикуларно решење $\boxed{y=\frac{5}{x}}$

мало о геом. интерпретацији:

$\boxed{y' = 2x}$ $\int$ $y = \int 2x\,dx$ $\boxed{y = x^2 + C}$ о.р.



$y = \varphi(x, C)$ - интегрална крива ДЈ. $y' = f(x,y)$

$tg\alpha = y' = f(x,y)$

ПОЉЕ ПРАВАЦА
ДЈ $y' = f(x,y)$

Једначине са раздвојеним променљивим

$$\boxed{f(x)dx + g(y)dy = 0}$$

dx\

$$f(x) + g(y)\cdot \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{y'} = 0$$

$$g(y)dy = -f(x)dx \quad /\int$$

$$\int g(y)dy = -\int f(x)dx + C$$

...

II начин:

$$\boxed{y' = f(x)\cdot g(y)}$$

$\frac{dy'}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(y)$$

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \quad /\int$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$$

...

Пример: $y' = (1+y^2)e^x$ - наћи опште решење и наћи парт. реш. за $(x_0, y_0) = (1, 1)$

$y(1) = 1$

ДЈ која раздваја пром.

$$\frac{dy}{dx} = (1+y^2)e^x$$

$$\frac{dy}{1+y^2} = e^x dx \quad /\int$$

$$\Rightarrow \operatorname{arctg} y = e^x + C \quad /\operatorname{tg}$$

$$\boxed{y = \operatorname{tg}(e^x + C)}$$

опште решење

$C_0 = ?$ $x_0 = 1$ $y_0 = 1$

$$\underbrace{\operatorname{arctg} 1}_{\frac{\pi}{4}} = e^1 + C_0$$

$$\Rightarrow \boxed{C_0 = \frac{\pi}{4} - e}$$

ПАРТ. РЕШЕЊЕ

$$\boxed{y = \operatorname{tg}\left(e^x + \frac{\pi}{4} - e\right)}$$

Хомогена ДЈ

$\underline{y=\varphi(x)}$ $f(x,y)$ – хомогена ако: $(\forall k\in\mathbb{R})\ f(kx,ky)=f(x,y)$

$f(x,y)$ – хомогена функција $\rightsquigarrow$ $\boxed{y'=f(x,y)}$ хомогена ДЈ

Други облик: $\underline{f(x,y)=f(kx,ky)} \overset{k=\frac{1}{x}}{=} f\left(\frac{1}{x}\cdot x,\ \frac{1}{x}\cdot y\right)=f\left(1,\frac{y}{x}\right)=g\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\boxed{y'=g\left(\frac{y}{x}\right)} \quad ⊛$$

Како решавамо: смена $u=\frac{y}{x}$ $u=u(x)$ $y=y(x)$ $u'=\frac{du}{dx}$ $y'=\frac{dy}{dx}$

$y=u\cdot x \rightarrow y'=u'\cdot x+u\cdot 1=\underline{u'x+u}$

⊛ постаје: $u'\cdot x+u=g(u)$

$\frac{du}{dx}$ " $u'=\frac{g(u)-u}{x}$ раздваја променљиве!

$\frac{du}{g(u)-u}=\frac{dx}{x}\ /\int \ \dots \rightarrow u \dots \rightarrow$ вратимо $u=\frac{y}{x} \rightarrow y=\dots$

Пример: решити ДЈ $\boxed{x\cdot y' = y + x\cdot e^{-\frac{y}{x}}}$, и наћи п.р. за $y(1)=0$

$\boxed{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)}$

поделимо са x : $\boxed{y' = \frac{y}{x} + e^{-\frac{y}{x}}}$ хомогена ДЈ ✓

смена: $\boxed{u = \frac{y}{x}}$ $\quad y = u\cdot x \quad y' = u'\cdot x + u$

$\rightarrow \quad u'\cdot x + \cancel{u} = \cancel{u} + e^{-u}$

$\boxed{u'\cdot x = e^{-u}}$

$\frac{du}{dx}\cdot x = e^{-u}$

$e^{u}\cdot du = \frac{dx}{x}$ - раздваја променљиве $/\int$

$\int e^{u} du = \int \frac{dx}{x}$

$\underline{e^{u} = \ln|x| + C} \leftarrow (y)$

$u = \frac{y}{x}$

$e^{y/x} = \ln|x| + C \quad / \ln$

$\frac{y}{x} = \ln(\ln|x| + C) \quad \leftarrow$ када $\ln|x| + C > 0$

$\ln|x| > -C$

$|x| > e^{-C}$

$$\boxed{y = x\cdot\ln(\ln|x| + C)}$$

ОПШТЕ РЕШЕЊЕ

партикуларно: $y(1)=0$

$0 = 1\cdot\ln(\underbrace{\overset{0}{\ln|1|} + C}_{1}) \Rightarrow C = 1$

$\boxed{y = x\cdot\ln(\ln|x| + 1)}$

$|x| > e^{-1} = \frac{1}{e}$

Линеарна ДЈ првог реда

$\boxed{y'+P(x)\cdot y=Q(x)}$ Како изгледа опште решење? (ЛДЈ)

тражимо y у облику: $y(x)=u(x)\cdot v(x)$ – „намештамо" u и v

$$y'=u'\cdot v+u\cdot v'$$

$$(\text{ЛДЈ}):\quad u'\cdot v+\underline{\underline{u}}\cdot v'+P\cdot\underline{\underline{u}}\cdot v=Q$$

$$u\cdot\underbrace{(v'+P\cdot v)}_{\overset{\shortparallel}{0}}+\underbrace{v\cdot u'}=Q$$

бирамо v тако да

$\textcircled{I}$ $v'+P\cdot v=0$ и $v\cdot u'=Q$ $\textcircled{II}$

$\textcircled{I}$: $v'+P\cdot v=0$

$$\frac{dv}{dx}=-P\cdot v$$

$$\frac{dv}{v}=-Pdx \quad /\int$$

$$\ln|v|=-\int Pdx$$

ми бирамо v:

$$\ln v=-\int Pdx \quad /e$$

$$\boxed{v=e^{-\int Pdx}}$$

Још бирамо u тако да важи $\textcircled{II}$:

$$v\cdot u'=Q$$

$$u'=Q\cdot v^{-1}=Q\cdot e^{\int Pdx} \quad /\int$$

$$\boxed{u=\int Q\cdot e^{\int Pdx}dx+C}$$

$$y=u\cdot v$$

$$y(x)=e^{-\int P(x)dx}\cdot\left(C+\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}dx\right)$$

Пример: решити ДЈ $y'\cos x - 2y\sin x = \cos x$ и наћи парт. реш. које зад. $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi+2}{4}$

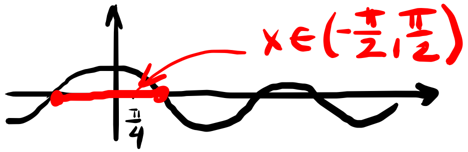
$$\cos x \setminus \quad y' \boxed{-2\cdot\frac{\sin x}{\cos x}}\, y = 1$$

линеарне ДЈ: $P(x) = -2\operatorname{tg}x \quad Q(x)=1$

$$y'+Py=Q$$

$$y=e^{-\int P dx}\cdot\left(C+\int Q e^{\int P dx}dx\right)$$

$\cos x \neq 0$



посматрамо тај скуп

$$y= e^{-\int P(x)dx}\cdot\left(C+\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}dx\right)$$

$$\int P(x)dx = -2\int \operatorname{tg}x\,dx = -2\int\frac{\overset{=-d(\cos x)}{\boxed{\sin x\,dx}}}{\cos x} = 2\cdot\ln|\cos x|+C$$

$\cos x>0$

треба нам једна прим. ф-ја: $2\ln(\cos x)$

$$y=e^{-2\ln(\cos x)}\cdot\left(C+\int 1\cdot e^{2\ln|\cos x|}dx\right) = \frac{1}{(\cos x)^2}\cdot\left(C+\int\cos^2x\,dx\right) = \frac{1}{(\cos x)^2}\cdot\left(C+\int\frac{1+\cos 2x}{2}dx\right)$$

$$\boxed{y=\frac{1}{(\cos x)^2}\cdot\left(C+\frac{1}{2}x+\frac{\sin 2x}{4}\right)}$$

опште решење

П.Р. $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi+2}{4}$

заменимо ... → $C=0$

$$y(x)=\frac{1}{(\cos x)^2}\cdot\left(\frac{1}{2}x+\frac{\sin 2x}{4}\right)$$

Бернулијева ДЈ

$n \neq 0,1$: $\boxed{y' + P(x)\cdot y = y^{n}\cdot Q(x)}$ $/ : y^{n}$

($n=0,1$ → само линеарне)

$$\underline{y'\cdot y^{-n}} + P(x)\cdot \underbrace{y^{1-n}}_{z} = Q(x)$$

смена: $z(x) = (y(x))^{1-n}$

$$z'(x) = (1-n)\cdot \underline{(y(x))^{-n}\cdot y'(x)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-n}\cdot z' + P\cdot z = Q \qquad /\cdot(1-n)$$

$$z' + \boxed{(1-n)P}\cdot z = \boxed{(1-n)\cdot Q}$$ линеарна ДЈ

$$\underline{z(x)} = e^{(n-1)\int P dx}\cdot\left(C + (1-n)\int Q\cdot e^{(1-n)\int P dx}\, dx\right)$$

$z = y^{1-n} \rightsquigarrow y = \dots$

Пр. $\underbrace{3x\cdot y'}- 3xy^4\cdot \ln x - y = 0 \quad /:3x$ (1) $\ln x$ дефинисано → $x>0$

Бернули:

$y' + P\cdot y = Q\cdot y^n \quad /:y^n$

$z = y^{1-n}$

$$y' - y^4\cdot\ln x - \frac{1}{3x}\cdot y = 0$$

$$y' \underbrace{- \frac{1}{3x}}_{P(x) = -\frac{1}{3x}}\cdot y = y^4 \underbrace{\ln x}_{Q(x)}$$

Бернулијева ДЈ $n=4$ $\quad /: y^4$

! тражи да $y \neq 0$
на крају проверити $y=0$

$$y'\cdot y^{-4} - \frac{1}{3x}\, y^{-3} = \ln x \quad (2)$$

СМЕНА $z(x) = y^{1-n} = y^{-3}$ $\quad \boxed{z(x) = y^{-3}} \quad \to z' = (-3)\, y^{-4}\cdot y'$

(2) → $-\frac{1}{3}\cdot z' - \frac{1}{3x}\cdot z = \ln x \quad /\cdot -3$

$$\boxed{z' + \underbrace{\frac{1}{x}}_{P(x)} z = \underbrace{-3\ln x}_{Q(x)}}$$ линеарна ДЈ

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$

$$z(x) = e^{-\int P dx}\cdot\left(C + \int Q\cdot e^{\int P dx} dx\right) = e^{-\int \frac{1}{x}dx}\cdot\left(C + \int -3\ln x\cdot e^{\int\frac{1}{x}dx} dx\right) \overset{\overset{x>0}{\downarrow}}{=} e^{-\ln x}\cdot\left(C + \int -3\ln x\cdot e^{\ln x} dx\right)$$

$$= \frac{1}{x}\cdot\left(C - 3\underbrace{\int \ln x\cdot x\, dx}_{\text{парц. инт.}}\right)$$

$$z(x) = \frac{1}{x}\left(\underline{\underline{C}} - 3\int x\ln x\,dx\right)$$

$$\int x\ln x\,dx = \begin{pmatrix} u=\ln x & dv = x\,dx \\ du = \frac{dx}{x} & v = \frac{x^2}{2}\end{pmatrix} \quad \frac{x^2}{2}\cdot\ln x - \int \underbrace{\frac{x^2}{2}\frac{dx}{x}}_{\frac{x}{2}dx} = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4}x^2 \left(+C_1\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{z(x)} = \frac{1}{x}\left(C - \frac{3}{2}x^2\ln x + \frac{3}{4}x^2\right)$$

$$z = y^{-3} \qquad y = z^{-\frac{1}{3}} \qquad \Rightarrow \boxed{y(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{C - \frac{3}{2}x^2\ln x + \frac{3}{4}x^2}}}$$

ОПШТЕ РЕШЕЊЕ ДЈ (1)

Провера за $y=0$: $\quad$ (1): $3xy' - 3xy^4\ln x - y = 0$

$y' = 0$ $\quad$ $3x\cdot 0 - 3x\cdot 0\ln x - 0 = 0$

$0 = 0$ ✓

$\Rightarrow \boxed{y=0}$ јесте решење – није део општег решења

СИНГУЛАРНО РЕШЕЊЕ

Рикатијева ДЈ

⊛ $$y' = P(x)\cdot y^2 + Q(x)\cdot y + R(x)$$

$P(x) \neq 0$ (иначе линеарна)

$R(x) \neq 0$ (иначе Бернулијева)

Не изводимо генерални начин решавања, већ само у одређеном случају

I Ако знамо једно партикуларно решење $y_1 = y_1(x)$ – задовољава ⊛

$$y_1' = P\cdot y_1^2 + Q\cdot y_1 + R$$

Смена: $\boxed{y = y_1 + \frac{1}{z}}$ $\searrow y^2$

$$y' = y_1' - \frac{1}{z^2}\cdot z'$$

⊛ постаје: $\cancel{y_1'} - \frac{1}{z^2} z' = P\cdot\left(y_1^2 + \frac{1}{z^2} + \frac{2y_1}{z}\right) + Q\cdot\left(y_1 + \frac{1}{z}\right) + R$

$$= \cancel{P y_1^2 + Q y_1 + R} + \frac{P}{z^2} + P\cdot\frac{2y_1}{z} + \frac{Q}{z}$$

$$-\frac{1}{z^2}\cdot z' = \frac{P}{z^2} + P\cdot\frac{2y_1}{z} + \frac{Q}{z} \quad / z^2$$

$$-z' = P + 2Py_1 z + Q\cdot z$$

$-z' = \underline{\underline{P}} + \underline{\underline{(2Py_1+Q)}}\cdot z$ ← линеарна по z – знамо ☺ $\therefore z = \dots$

$\rightarrow y = y_1 + \frac{1}{z}$ ✓

Пример: $x\cdot y' = y^2 - (2x+1)\cdot y + (x^2+2x)$, $x>0$ ⊛

ако знамо да постоји парт. решење облика $y_1(x)=ax+b$.

Рик: $y' = P\cdot y^2 + Qy + R$

$\underline{\underline{a,b=?}}$ $\quad y_1 = ax+b \quad y_1' = a$

⊛: $x\cdot a = (ax+b)^2 - (2x+1)\cdot(ax+b) + x^2+2x$

$$x\cdot a = a^2x^2 + b^2 + 2abx - 2ax^2 - 2bx - ax - b + x^2 + 2x$$

$$0 = (a^2-2a+1)\cdot x^2 + (2ab-2a-2b+2)x + (b^2-b)$$

$a^2-2a+1=0 \quad (a-1)^2=0 \quad \boxed{a=1}$

$2(ab-a-b+1)=0 \quad \leftarrow \quad 2(b-1-b+1)=0$ увек тачно ✓

$b(b-1)=0 \quad \underline{\underline{b=0}} \vee \underline{\underline{b=1}} \qquad y_1=x$ или $y_1=x+1$

има парт. решење $\underline{\underline{y_1=x}}$.

Смена: $\boxed{y = \overset{y_1}{x} + \frac{1}{z}} \qquad y' = 1 - \frac{1}{z^2}\cdot z'$

⊛: $x - \frac{x}{z^2}\cdot z' = \overset{\downarrow\,2}{x^2} + \frac{1}{z^2} + 2x\cdot\frac{1}{z} - (2x+1)\cdot\left(x+\frac{1}{z}\right) + (x^2+2x)$

$= \cancel{x^2} + \frac{1}{z^2} + \cancel{2x\cdot\frac{1}{z}} - \cancel{2x^2} - \cancel{\frac{2x}{z}} - x - \frac{1}{z} + \cancel{x^2} + 2x$

$\boxed{-\frac{x}{z^2}\cdot z' = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z}} \;/\cdot z^2$

$$-x\cdot z' = 1 - z \qquad /:-x$$

$$\boxed{z' = \frac{z}{x} - \frac{1}{x}}$$

$$z' \underbrace{- \frac{1}{x}}_{P} z = \underbrace{-\frac{1}{x}}_{Q}$$ линеарна

(узети $x>0$)

$$z = \underbrace{e^{\overbrace{-\int -\frac{1}{x}dx}^{\ln x}}}_{x}\left(C + \int -\frac{1}{x}\cdot \underbrace{e^{\overbrace{\int -\frac{1}{x}dx}^{}}}_{\underbrace{e^{-\ln x}}_{\frac{1}{x}}} dx\right) = x\cdot\left(C + \int -\frac{1}{x^2}dx\right) = x\cdot\left(C + \frac{1}{x}\right) = Cx+1$$

$$\boxed{z = Cx+1}$$

опште решење

$$y = x + \frac{1}{z}$$

$$\boxed{y(x) = x + \frac{1}{Cx+1}}$$

II Рикатијева ДЈ: $y' = a\cdot y^2 + \frac{b}{x}\cdot y + \frac{c}{x^2}$, $(b+1)^2 \geq 4ac$ (a,b,c - константе)

могуће је да има парт реш облика $\boxed{y_1 = \frac{\alpha}{x}}$

доказ: $y_1' = -\frac{\alpha}{x^2}$

ДЈ: $-\frac{\alpha}{x^2} = a\cdot\frac{\alpha^2}{x^2} + \frac{b}{x}\cdot\frac{\alpha}{x} + \frac{c}{x^2} \;/\cdot x^2$

$-\alpha = a\alpha^2 + b\alpha + c$

$0 = a\cdot\alpha^2 + (b+1)\alpha + c$

кв. једн. по α има $\underset{\in \mathbb{R}}{\text{реш}} \Leftrightarrow D = (b+1)^2 - 4ac \geq 0$

Ⓣ

Пример: решити ДЈ $x^2 y' = x^2 y^2 + xy + 1 \;/ : x^2$

$y' = y^2 + \frac{1}{x}\cdot y + \frac{1}{x^2}$

$a=1 \quad b=1 \quad c=1$

има парт. реш. облика $y_1 = \frac{\alpha}{x}$ α решење: $0 = 1\cdot\alpha^2 + 2\alpha + 1 = (\alpha+1)^2 \quad \alpha = -1$

$\rightarrow \boxed{y_1(x) = -\frac{1}{x}}$

смена: $\boxed{y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{z}}$

$y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{z}$ $\qquad$ $\left[y' = y^2 + \frac{1}{x} \cdot y + \frac{1}{x^2} \right]$

$y' = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{z^2} \cdot z'$

заменимо: $\cancel{\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{z^2} \cdot z' = \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)^2 + \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right) + \frac{1}{x^2}$

$$= \cancel{\frac{1}{x^2}} + \frac{1}{z^2} - \frac{2}{xz} \cancel{-\frac{1}{x^2}} + \frac{1}{xz} + \cancel{\frac{1}{x^2}}$$

$$-\frac{1}{z^2} \cdot z' = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{xz} \quad / \cdot z^2$$

$$-z' = 1 - \frac{z}{x}$$

$$z' - \frac{1}{x} \cdot z = -1$$

линеарна ДЈ . . . $\to z = \ldots$

$\to$ ОР. $\boxed{y(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{z(x)}}$

Примене

I распадање радијума

Познато: брзина распадања радијума пропорционална количини радијума (1)

$t_0=0$: маса m_0 

<u>ЗАКОН ПРОМЕНЕ МАСЕ</u> у зависности од времена t

t - време → маса m

t+Δt → m+Δm

средња брзине распадања

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} < 0$$ (маса се смањује)

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{dm}{dt}$$ - брзине распадања у трен. t

$$\boxed{\frac{dm}{dt} \overset{(1)}{=} -k\cdot \underset{m(t)}{m}}$$ (k>0 коеф. проп.)

$\frac{dm}{dt} = -k\cdot m$ раздваја пром.

$\frac{dm}{m} = -k\cdot dt \quad / \int$

$\ln(m(t)) = -kt + C_1 \quad / e^{\sqcup}$

$m(t) = \underbrace{e^{C_1}}_{c>0} \cdot e^{-kt}$

$$\boxed{m(t) = c\cdot e^{-kt}}$$

C - зависи од $m_0 = m(0)$

$m_0 = C\cdot \underbrace{e^{-k\cdot 0}}_{1}$

$C = m_0$

$$\Rightarrow \boxed{m(t) = m_0\cdot e^{-kt}}$$

Како се одређује k ?

T = време потребно да $m_0 \to \frac{m_0}{2}$

време полураспада

T = 1600 година

$\underbrace{m(T)}_{\frac{m_0}{2}} = m_0\cdot e^{-k\cdot T}$

$\frac{\cancel{m_0}}{2} = \cancel{m_0}\cdot e^{-k\,1600} \quad / \frac{1}{\bigcirc}$

$2 = e^{k\cdot 1600}$

$\ln 2 = k\cdot 1600$

$\boxed{k = \frac{\ln 2}{1600}} \approx \frac{0{,}69}{1600} \approx 0{,}00043$

$m(t) = m_0\cdot e^{-0{,}00043\cdot t}$ ↙ у год.

II БРЗИНА ХЕМИЈСКЕ РЕАКЦИЈЕ

супстанца A → мономолекулска реакција

почетак $(t_0=0)$: a mol супстанце A (по литру)

t → после времена t реаговало $\underline{x(t)}$ мола супст. A.

Тражимо зависност $x(t)$ и t!

v хем. реак = промена конц. реактанта у јед. времена при сталној запремини

После t: реаговало $x(t)$ мола

$t+\Delta t$: —||— $x(t+\Delta t)$

t •—• $t+\Delta t$

↳ $\dfrac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$ $/\lim\limits_{\Delta t\to 0}$

$$v(t)=\lim_{t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=\frac{dx}{dt}$$

$$\boxed{v(t)=\frac{dx}{dt}}$$

закон о дејству маса: $\boxed{\underset{\uparrow \atop \frac{dx}{dt}}{v(t)} = k\cdot\left(\underbrace{\overset{\text{почетак}}{a} - x(t)}_{\text{преостало}}\right)}$

$$\frac{dx}{dt} = k\cdot(a-x)$$

$$\frac{dx}{a-x} = k\,dt \quad / \int$$

$$\ln(a-x) = kt + C_1 \quad / e^{\square}$$

$$a-x = \underbrace{e^{C_1}}_{C}\cdot e^{kt}$$

$$a-x = C\cdot e^{kt}$$

$$\boxed{x = a - C\cdot e^{kt}}$$

знамо:

$t=0 \quad x(0)=0$

$$0 = a - C\cdot\underbrace{e^{k\cdot 0}}_{1}$$

$$\Rightarrow C = a$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = a\left(1-e^{k\cdot t}\right)}$$

III ЈЕДНАЧИНА БИМОЛЕКУЛСКЕ ХЕМИЈСКЕ РЕАКЦИЈЕ

2 реактанта: $\left.\begin{matrix} \text{I} & a \text{ мола} \\ \text{II} & b \text{ мола} \end{matrix}\right\}$ на почетку $t_0 = 0$

$x(t)$: после времена $\boxed{t}$ од оба у реакцију ушла иста количина $\underline{\underline{x(t)}}$

остаје: I: $a - x$
II: $b - x$

Једначина: $\dfrac{dx}{dt} = v(t) \overset{\uparrow}{=} k \cdot (a-x)(b-x)$ $\quad \underline{\underline{k}}$ - коеф $\in \mathbb{R}$

закон о дејству масе

$$\frac{dx}{dt} = k \cdot (a-x)(b-x)$$

$$\frac{dx}{(a-x)(b-x)} = k\,dt \;/\int$$

$$\int \frac{dx}{(a-x)(b-x)} = \int \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{a-x} - \frac{1}{b-x}\right) dx$$

$$= \frac{1}{b-a}\left(\ln|\underbrace{a-x}_{>0}| - \ln|\underbrace{b-x}_{>0}|\right)$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \ln\frac{a-x}{b-x}$$

$$\frac{1}{b-a} \ln\frac{a-x}{b-x} = kt + C_1$$

$$\boxed{\frac{1}{b-a}\cdot\ln\frac{a-x}{b-x}=k\cdot t+C_1}$$

$x(t)=\dots$

C_1 из нач. условия: $t=0$ $x(0)=0$

$$\boxed{\frac{1}{b-a}\cdot\ln\frac{a}{b}=C_1}$$

$$\frac{1}{b-a}\cdot\ln\frac{a-x}{b-x}=k\cdot t+\frac{1}{b-a}\ln\frac{a}{b}\qquad /\,(b-a)$$

$$\ln\frac{a-x}{b-x}=(b-a)kt+\ln\frac{a}{b}\qquad /\,e^{\omega}$$

$$\frac{a-x}{b-x}=\frac{a}{b}\cdot e^{(b-a)kt}$$

$$a-x=(b-x)\frac{a}{b}e^{(b-a)kt}\longrightarrow\boxed{x(t)=ab\cdot\frac{1-e^{(b-a)\cdot k\cdot t}}{b-a\cdot e^{(b-a)\cdot k\cdot t}}}$$

Диференцијалне једначине вишег реда

реда n: $F(x,y,y',y'',\dots,\underset{\approx}{y^{(n)}})=0$ $\sin(y^{(n)})\cdot \ln(y+y^{(n)})=x^3$

Занимају нас ДЈ реда n облика:

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)}) \qquad (1)$$

Тв. о егзистенцији и јединствености решења

ДЈ (1), $f, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'},\dots,\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ непрекидне ф-је у области D која садржи тачку: $x=x_0, y=y_0, y'=y_0',\dots,y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)}$.

⇒ Постоји јединствено решење ДЈ(1) које задовољава услове

$$x_0: \left.\begin{aligned} &y(x_0)=y_0\\ &y'(x_0)=y_0'\\ &\vdots\\ &y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)} \end{aligned}\right\}$$ ПОЧЕТНИ УСЛОВИ

ОПШТЕ РЕШЕЊЕ: $y=\varphi(x,C_1,\dots,C_n)$ - фам. функција која даје решење за било који избор $C_1,\dots,C_n$

ПАРТИКУЛАРНО РЕШЕЊЕ - добија се из <u>О.Р.</u> избором $C_1^0, C_2^0,\dots,C_n^0$

Пример: $y'''=0$ ДЈ реда (3)

$y'''=(y'')'$ / $\int$

$\int (y'')'\,dx = \int 0\,dx$

$y''=C_1$ / $\int$

$\int y''\,dx = \int C_1\,dx$

$y' = C_1x + C_2$ / $\int$

$$\boxed{y = C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3}$$

ОПШТЕ РЕШЕЊЕ $\underbrace{y(x)=C_1x^2+C_2x+C_3}$

поч. услови: $\underline{x_0}$

$y(x_0)=y_0$

$y'(x_0)=y_0'$

$y''(x_0)=y_0''$

$\underbrace{C_1^0, C_2^0, C_3^0 = ?}$

$y(x_0)=C_1^0x_0^2+C_2^0x_0+C_3^0=y_0$

$y'(x_0)=2C_1^0x_0+C_2^0=y_0'$

$y''(x_0)=2C_1^0=y_0''$

$\boxed{C_1^0}=\frac{y_0''}{2}$ $\boxed{C_2^0}=y_0'-x_0y_0''$

$C_3^0=y_0-\frac{y_0''}{2}\cdot x_0^2-y_0'\cdot x_0+x_0^2y_0''$

$\boxed{C_3^0}=y_0-y_0'x_0+\frac{1}{2}x_0^2y_0''$

ДЈ код којих се ред може снизити

интеграцијом/сменом

① $y^{(n)} = f(x) \quad /\int$

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1 \quad /\int$$

$$y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)dx\right)dx + C_1x + C_2 \quad /\int$$

$$\vdots$$

$$y(x) = \underbrace{\int dx \int dx \int \cdots \int}_{n \text{ пута}} f(x)dx + C_1 \cdot x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \dots + C_{n-1}X + C_n$$

$\boxed{\text{П.Р}}$ $y(x) = \cos x + x^2 + x$

Пример: $y''' = \sin x$ наћи О.Р. и П.Р. за $x_0 = 0$ $y(0) = 1, y'(0) = 1, y''(0) = 1$

$$\Rightarrow y(x) = \int dx \underbrace{\int dx \underbrace{\int \underbrace{\sin x dx}_{-\cos x}}_{-\sin x}}_{\cos x} + C_1X^2 + C_2X + C_0$$

$\boxed{\text{О.Р.}}$ $y(x) = \cos x + C_1X^2 + C_2X + C_0$

$\boxed{\text{П.Р.}}$ $x = 0: \; y(0) = 1 = 1 + 0 + 0 + C_0$

$\Rightarrow \boxed{C_0 = 0}$

$y'(x) = -\sin x + 2C_1X + C_2$

$y'(0) = 1: \; 0 + 0 + C_2 = 1 \Rightarrow \boxed{C_2 = 1}$

$y''(0) = 1: \; y''(x) = -\cos x + 2C_1 \quad 1 = -1 + 2C_1 \; \boxed{C_1 = 1}$

② $y'' = f(x, y')$ ← у се не појављује експлицитно

СМЕНА: $z = y' \to y'' = z'$

$\boxed{z' = f(x, z)}$ ДЈ реда 1 ... $\rightsquigarrow \underset{y'}{z} = \varphi(x, C_1)$ $/\int$

$$\boxed{y(x) = \int \varphi(x, C_1)\,dx + C_2}$$

Пример: $x \cdot \ln x \cdot y'' - y' = 0$

$z = y' \to y'' = z'$

$x \cdot \ln x \cdot \underset{\frac{dz}{dx}}{z'} = z$

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x \ln x} \quad /\int$$

...

③ $y'' = f(y, y')$ ← x се не појављује експлицитно

смена $p = y'$ ← посматрамо као ф-ју по y

„p по y, y по x“

$$y'' = (y')' = \frac{dp}{dx} \underset{\uparrow}{=} \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p$$

извод сложене функције

„$y' = p$“

$$\boxed{\frac{dp}{dy} \cdot p = f(y, p)}$$

ДЈ реда 1 $p(y)$ $\rightsquigarrow$ $p = \varphi(y, C_1)$

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1) \;/ : \sqcup$$

$$\frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = dx \;/\int$$

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C \rightarrow y =$$

Пример: $3y'y'' - e^y = 0$ наћи парт. решење за: $x_0 = -3$, $y(-3) = 0$, $y'(-3) = 1$

смена $p = y' \to y'' = \frac{dp}{dy} \cdot p$

$$3p \cdot \frac{dp}{dy} p - e^y = 0$$

$$3p^2 dp = e^y dy \;/\int$$

$$p^3 = e^y + C_1$$

$y(-3) = 0$, $y'(-3) = 1$ $y = 0$ и $p = 1$: $1^3 = e^0 + C_1 \Rightarrow \boxed{C_1 = 0}$

$$\boxed{p^3 = e^y}$$

$$p = e^{y/3}$$

$$y' = e^{y/3}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{y/3}$$

$$e^{-y/3} dy = dx \;/\int$$

$$(-3) e^{y/3} = x + C_2$$

за $x = -3$ $y = 0$

$$(-3) \cdot e^0 = -3 + C_2 \Rightarrow \boxed{C_2 = 0}$$

$$e^{y/3} \cdot (-3) = x \quad / : -3, \ln$$

$$\frac{y}{3} = \ln\left(-\frac{x}{3}\right)$$

$$\boxed{y(x) = 3 \cdot \ln \frac{-x}{3}}$$

~ Линеарно независне функције ~

(a,b) $\qquad \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x) \qquad (1)$

нису све нула

Ф-је (1) су <u>ЛИНЕАРНО ЗАВИСНЕ</u> на (a,b) ако $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ тд. $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0)$ тд.

$$\alpha_1 \cdot \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x) + \dots + \alpha_n \cdot \varphi_n(x) = 0 \quad , \forall x \in (a,b).$$

Ако нису линеарно зависне, кажемо да су (1) <u>ЛИНЕАРНО НЕЗАВИСНЕ</u> на (a,b)

Пр1 $\sin x$ и $\cos x$

$\alpha \cdot \sin x + \beta \cdot \cos x = 0, \boxed{\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})}$?

тј. $\alpha \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = -\beta$ $\quad \boxed{\alpha \cdot \operatorname{tg} x = -\beta}$ — НЕМОГУЋЕ

$\Rightarrow$ $\sin x$ и $\cos x$ лин. независне на $(0, \frac{\pi}{2})$

Пр2

$\varphi_1(x) = \cos^2 x$

$\varphi_2(x) = \sin^2 x$

$\varphi_3(x) = -5$

$$\underset{\alpha_1}{\underset{\parallel}{1}} \cdot \cos^2 x + \underset{\alpha_2}{\underset{\parallel}{1}} \cdot \sin^2 x + \underset{\alpha_3}{\underset{\parallel}{\boxed{\frac{1}{5}}}} \cdot (-5) = 1 + (-1) = \underline{\underline{0}}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$

$\cos^2 x, \sin^2 x, -5$ лин. зависне на $\mathbb{R}$.

~ Линеарно независне функције ~

(a,b) $\qquad \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x) \qquad (1)$

Ф-је (1) су <u>ЛИНЕАРНО ЗАВИСНЕ</u> на (a,b) ако $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ тд. $\underbrace{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0)}$ тд.

нису све нула

$$(2) \qquad \underbrace{\alpha_1 \cdot \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x) + \dots + \alpha_n \cdot \varphi_n(x) = 0}, \quad \forall x \in (a,b).$$

Став Ф-је (1) су линеарно зависне $\overset{\text{акко}}{\Longleftrightarrow}$ се једна од њих може написати као <u>линеарна комбинација</u> осталих

$$\exists k: \ \varphi_k(x) = \beta_1 \varphi_1(x) + \dots + \beta_{k-1} \cdot \varphi_{k-1}(x) + \beta_{k+1} \cdot \varphi_{k+1}(x) + \dots + \beta_n \cdot \varphi_n(x)$$

Доказ: $(\Rightarrow)$ из (2) $\exists k \ \alpha_k \neq 0$

$$\boxed{\forall x \in (a,b)} \quad -\alpha_k \cdot \varphi_k(x) = \alpha_1 \varphi_1(x) + \dots + \alpha_{k-1} \cdot \varphi_{k-1}(x) + \alpha_{k+1} \cdot \varphi_{k+1}(x) + \dots + \alpha_n \varphi_n(x) \ / : (-\alpha_k)$$

$$\varphi_k(x) = \underbrace{\frac{-\alpha_1}{\alpha_k}}_{\beta_1} \varphi_1(x) + \dots + \underbrace{\frac{-\alpha_{k-1}}{\alpha_k}}_{\beta_{k-1}} \cdot \varphi_{k-1}(x) + \underbrace{\frac{-\alpha_{k+1}}{\alpha_k}}_{\beta_{k+1}} \varphi_{k+1}(x) + \dots + \underbrace{\frac{-\alpha_n}{\alpha_k}}_{\beta_n} \varphi_n(x)$$

$(\Leftarrow)$ $\quad \varphi_k(x) = \beta_1 \varphi_1(x) + \dots + \beta_n \varphi_n(x) \rightarrow 0 = \beta_1 \varphi_1(x) + \dots + (-1) \cdot \varphi_k(x) + \dots + \beta_n \varphi_n(x)$

↑ сви сем φ_k

лин. зависне ✓ □

$n=2$: $\alpha_1 \cdot \varphi_1(x) + \alpha_2 \cdot \varphi_2(x) = 0$, $\forall x \in (a,b)$ $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0$

$\alpha_1 \cdot \varphi_1(x) = \alpha_2 \cdot \varphi_2(x)$

„пропорционалност"

Последица: φ_1 и φ_2 су линеарно независне на (a,b) ако и само ако

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} \neq const \quad \text{за } x \in (a,b)$$

($\leftarrow$ кад $\varphi_2(x) \neq 0$)

Пример: $\varphi_1(x) = e^x$
$\varphi_2(x) = e^{2x}$
$\varphi_3(x) = 2e^x$

$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = \frac{e^x}{e^{2x}} = e^{-x} \neq const \Rightarrow \varphi_1$ и φ_2 лин. нез. на $\mathbb{R}$

$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_3(x)} = \frac{e^x}{2e^x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi_1$ и φ_3 лин. зависне на $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$

сл. φ_2 и φ_3 лин. нез.

$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$
ф-је на (a,b)

(функционална det)

$$W(y_1,y_2,\dots,y_n)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

$(n \times n)$

Вронскијева детерминанта

(Вронскијан)

Став ДЈ ⊛: $y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} \cdot y' + a_n y = 0$, $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

Нека су $y_1(x), \dots, y_n(x)$ решења ДЈ ⊛ за $x \in (a,b)$

Тада: $W(y_1, \dots, y_n)(x) = W(y_1(x_0), \dots, y_n(x_0)) \cdot e^{(x_0 - x) \cdot a_1}$ $\quad (x_0, x \in (a,b))$

Доказ: $\boxed{\text{за } n=2}$ доказујемо: $\underbrace{W(y_1,y_2)(x)}_{W(x)} = \underbrace{W(y_1(x_0), y_2(x_0))}_{W(x_0)} \cdot e^{(x_0-x)a_1}$

y_1, y_2 - решења ⊛:
$$\left.\begin{aligned} y_1'' + a_1 \cdot y_1' + a_2 y_1 &= 0 \\ y_2'' + a_1 \cdot y_2' + a_2 y_2 &= 0 \end{aligned}\right] \begin{aligned} &\cdot y_2 \\ &\cdot (-y_1) \end{aligned} + : \quad \boxed{y_1'' y_2 - y_2'' y_1 + a_1 (y_1' \cdot y_2 - y_1 \cdot y_2') = 0} \ (**)$$

- дио доказа описан
- да би крај био овде

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2 \leftarrow \text{ф-ја од } x$$

$$W' = \cancel{y_1' y_2'} + y_1 y_2'' - \cancel{y_1' y_2'} - y_1'' y_2 = y_1 \cdot y_2'' - y_1'' y_2$$

$(**)$: $-W' + a_1 \cdot (-W) = 0$ $\quad \boxed{W' = -a_1 \cdot W}$

$W = C \cdot e^{-a_1 \cdot x}$

$x = x_0$: $W(x_0) = C \cdot e^{-a_1 \cdot x_0} \Rightarrow C = W(x_0) \cdot e^{a_1 x_0}$

$\Rightarrow \boxed{W = W(x_0) \cdot e^{a_1 \cdot (x_0 - x)}}$ □

Последица Ако за неку тачку x_0 важи: $W(y_1(x_0),\dots,y_n(x_0))=0$
онда за $\forall x\in(a,b)$ важи: $W(y_1(x),\dots,y_n(x))=0$. □

$$\left\{\begin{array}{l}\underset{1}{\alpha}\cdot 0+0\cdot \underline{y_2}=0\end{array}\right.$$

⊛ ДЈ: $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\dots+a_{n-1}y'+a_ny=0$ $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$

Став Рјешења $y_1(x),\dots,y_n(x)$ једн ⊛ су линеарно зависне $((a,b))$ $\Longleftrightarrow$ $\forall x\in(a,b)$ $W(y_1(x),\dots,y_n(x))=0$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}=y_1y_2'-y_1'y_2$$

доказ: $\boxed{\text{за } n=2}$ $y''+a_1y'+a_2y=0$ y_1,y_2 лин.зав. $\Longleftrightarrow$ $(\forall x\in(a,b))$ $W(y_1(x),y_2(x))=0$

($\Rightarrow$) y_1,y_2 лин. зависне $\Rightarrow$ $\exists$ конст. c $y_2(x)=c\,y_1(x)$ $\forall x\in(a,b)$

$$W(y_1,y_2)=y_1y_2'-y_1'y_2=y_1\cdot c\,y_1'-y_1'c\,y_1=0\ \checkmark$$

($\Leftarrow$) претп. $0=W(y_1,y_2)=y_1y_2'-y_1'y_2$

* Ако $\overset{i=1 \text{ или } i=2}{y_i}\equiv0$ $\Rightarrow$ лин зависне

y_1 и y_2 нису идентички $\equiv0$

* ако за $x_0\in(a,b)$ $y_1(x_0)\neq0$
доказујемо да $y_2(x_0)\neq0$

јер: ппс. $y_2(x_0)=0$

$$0=\underbrace{y_1(x_0)}_{\neq0}\cdot y_2'(x_0)-y_1'(x_0)\cdot \underbrace{y_2(x_0)}_{=0}$$

$\Rightarrow y_2'(x_0)=0$

због т. о е!з. и јед. рјешења
$\Rightarrow y_2\equiv0$ ↯

$y_1(x_0)\neq 0 \Rightarrow y_2(x_0)\neq 0$

$\Leftarrow$

$W = y_1\cdot y_2' - y_1'\cdot y_2 = 0$

$y_1 y_2' = y_1'\cdot y_2$

$\int \Big| \dfrac{y_2'}{y_2} = \dfrac{y_1'}{y_1}$

за $x\in(a,b)$
за које $y_1(x)\neq 0$
$y_2(x)\neq 0$

$\ln|y_2| = \ln|y_1| + c_1 \quad /e$

$|y_2| = \underbrace{e^{c_1}}_{=c}\cdot|y_1|$

$|y_2| = c\cdot|y_1|$

доказује се из непрекидности...

$y_2 = c\cdot y_1$

y_1 и y_2 су лин. зависне. ∎

Пример: $y''' - y' = 0$

јесу решења: $y_1 = e^x,\ y_2 = e^{-x},\ y_3 = 1$

$$W(y_1,y_2,y_3) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & 1 \\ e^x & -e^{-x} & 0 \\ e^x & e^{-x} & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} e^x & -e^{-x} \\ e^x & e^{-x} \end{vmatrix} = \boxed{2} \neq 0$$

$\Rightarrow y_1, y_2, y_3$ су лин. независне.

Хомогене линеарне ДЈ другог реда са константним коеф.

$$(1)\quad \underbrace{y'' + p\cdot y' + q\cdot y}_{L(y)} = 0 \qquad p,q\in\mathbb{R}$$

Став y_1, y_2 - решења (1) $\Rightarrow \forall C_1,C_2\in\mathbb{R}$ $\;C_1\cdot y_1+C_2y_2$ је такође решење (1)

Доказ: $L(y_1)=0=L(y_2)$

$$L(C_1y_1+C_2y_2) = (C_1y_1+C_2y_2)'' + p\cdot(C_1y_1+C_2y_2)' + q\cdot(C_1y_1+C_2y_2) = C_1y_1''+C_2y_2''+pC_1y_1'+pC_2y_2' + qC_1y_1+qC_2y_2$$

$$= C_1\cdot(\underbrace{y_1''+py_1'+qy_1}_{0}) + C_2(\underbrace{y_2''+py_2'+qy_2}_{0}) = 0 \quad \square$$

Хомогене линеарне ДЈ другог реда са константним коеф.

(1) $\underbrace{y''+p\cdot y'+q\cdot y}_{L(y)}=0$ $p,q\in\mathbb{R}$ $\underline{\underline{(a,b)}}$

Став y_1, y_2 - линеарно нез. решења (1) $\Rightarrow$ $y=\overbrace{C_1\cdot y_1+C_2 y_2}^{\circledast}$ опште решење (1), $C_1,C_2\in\mathbb{R}$

доказ: претпостав $\Rightarrow$ $y=C_1y_1+C_2y_2$ јесте реш. $\forall C_1,C_2\in\mathbb{R}$

$\boxed{x_0}$, $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_0'$ - нека је то неко произв. решење y једн (1)

желимо наћи C_1 и C_2 од јед. облика $\circledast$

→ фја y_1: $y_1(x_0)=:y_{10}$ фја y_2: $y_2(x_0)=:y_{20}$

$y_1'(x_0)=:y_{10}'$ $y_2'(x_0)=:y_{20}'$

из претх. дела

$$\left.\begin{aligned}\circledast&: y(x_0)=y_0=C_1\cdot y_{10}+C_2\cdot y_{20}\\ \circledast'&: y'(x_0)=y_0'=C_1\cdot y_{10}'+C_2\cdot y_{20}'\end{aligned}\right\}\qquad W=\begin{vmatrix}y_{10}&y_{20}\\y_{10}'&y_{20}'\end{vmatrix}=W(y_1(x_0),y_2(x_0))\neq 0$$

Крам. правило $\Rightarrow$ $\exists$ јединствено решење система: $\underline{\underline{C_{10},C_{20}}}$

парт. решење: $y_p=C_{10}\cdot y_1+C_{20}y_2$ → задовољава $y_p(x_0)=y_0$, $y_p'(x_0)=y_0'$

т. о егз. и јед. решења $\Rightarrow$ $\boxed{y_p\equiv y}$ → $\boxed{y=C_{10}y_1+C_{20}\cdot y_2}$ ← опште решење је ова облика □

$\underbrace{y''+py'+qy}_{L(y)}=0$ (1)   ? како наћи y_1, y_2 (лин-нез) $\rightsquigarrow$ $y=C_1y_1+C_2y_2$

парт. реш.

Тражимо y_1, y_2 у облику $\boxed{y=e^{r\cdot x}}$ $r\in\mathbb{R}$

$y'=r\cdot e^{rx}$, $y''=r^2\cdot e^{rx}$ (1): $r^2e^{rx}+pr\cdot e^{rx}+qe^{rx}=e^{rx}(r^2+pr+q)=0$

$r^2+pr+q=0$ КАРАКТЕРИСТИЧНА ЈЕДН-Ај (1)

① решења r_1, r_2 корјени реални и различити : $y_1(x)=e^{r_1\cdot x}$ | $y_2(x)=e^{r_2\cdot x}$

да ли су лин нез?

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} e^{r_1x} & e^{r_2x} \\ r_1e^{r_1x} & r_2e^{r_2x}\end{vmatrix}=(r_2-r_1)\cdot e^{(r_1+r_2)x}\neq 0 \Rightarrow \text{лин. нез} ✓$$

Опште решење: $\boxed{y(x)=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}}$

Пример: $y''-y'-6y=0$

$r^2-r-6=0$

$(r-3)(r+2)=0$

$r_1=3$ $r_2=-2$

О.Р. $y(x)=C_1\cdot e^{3x}+C_2\cdot e^{-2x}$

$\underbrace{y''+py'+qy}_{L(y)}=0$ (1)   ? Како наћи $\underset{\text{парт. реш.}}{y_1, y_2}$ (лин. нез.) $\rightsquigarrow y=C_1y_1+C_2y_2$

Тражимо y_1, y_2 у облику $y=e^{r\cdot x}$ $r\in\mathbb{R}$

$y'=r\cdot e^{rx},\ y''=r^2\cdot e^{rx}$ (1): $r^2 e^{rx}+pr\cdot e^{rx}+qe^{rx}=e^{rx}(r^2+pr+q)=0$

$r^2+pr+q=0$ КАРАКТЕРИСТИЧНА ЈЕДН. ДЈ (1)

2° Двоструко решење $s\in\mathbb{R}$ $y_1(x)=e^{sx}$ јесте решење

$y_2(x)=x\cdot e^{sx}$ - да ли је решење?

$y_2'(x)=e^{sx}+x\cdot s\cdot e^{sx}$ $y_2''(x)=se^{sx}+s\cdot e^{sx}+x\cdot s^2\cdot e^{sx}$

$(1)\to \underbrace{2se^{sx}+x\cdot s^2e^{sx}}_{y_2''}+p\cdot e^{sx}+p\cdot x\cdot s\cdot e^{sx}+q\cdot x\cdot e^{sx}=x\cdot e^{sx}(\underbrace{s^2+ps+q}_{0})+e^{sx}(2s+p)=0$

$2s=-p$ ≈ 0
Виете форм.

$\Rightarrow y_2$ јесте решење ✓

$\frac{y_2(x)}{y_1(x)}=x\neq const \Rightarrow y_1$ и y_2 су лин. нез. $\Rightarrow$ $\boxed{\text{О.Р.}}$ $y(x)=C_1\cdot e^{sx}+C_2\cdot x\cdot e^{sx}$

Пример: $y''+4y'+4y=0 \to r^2+4r+4=0$ $(r+2)^2=0$ $r_{1/2}=-2$ $\to$ О.Р. $y(x)=C_1e^{-2x}+C_2\cdot x\cdot e^{-2x}$
$=(C_1+C_2x)\cdot e^{-2x}$

$\underbrace{y''+py'+qy}_{L(y)}=0$ (1)

? Како наћи $\underset{\text{парт. реш.}}{y_1, y_2}$ (лин. нез.) $\rightsquigarrow y=C_1y_1+C_2y_2$

Тражимо y_1, y_2 у облику $\boxed{y=e^{r\cdot x}}$ $r\in\mathbb{R}$

$y'=r\cdot e^{rx}, y''=r^2 e^{rx}$ (1): $r^2 e^{rx}+pr\cdot e^{rx}+q e^{rx}=e^{rx}(r^2+pr+q)=0$

$r^2+pr+q=0$ КАРАКТЕРИСТИЧНА ЈЕДН. ДЈ (1)

③ конјуговано комплексна решења:

$r_1=\alpha+i\beta, \quad r_2=\alpha-i\beta$

$y_1=e^{(\alpha+i\beta)x}=e^{\alpha x}e^{i\beta x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)=\underbrace{e^{\alpha x}\cos\beta x}_{u}+i\cdot\underbrace{e^{\alpha x}\sin\beta x}_{v}$ - комплексно решење

$y_2=e^{(\alpha-i\beta)x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\cdot\sin\beta x)$

$w(x)=u(x)+i v(x) \to w'(x)=u'+i\cdot v'$ $\Rightarrow \boxed{u(x)=e^{\alpha x}\cos\beta x}, \boxed{v(x)=e^{\alpha x}\sin\beta x}$ су парт. реш.

$L(w)=0 \Rightarrow L(u)=0 \wedge L(v)=0$

$\frac{v(x)}{u(x)}=\frac{\sin\beta x}{\cos\beta x}=\operatorname{tg}\beta x\not\equiv 0 \Rightarrow$ лин. нез. ✓

О.Р. $\boxed{y(x)=C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x+C_2\cdot e^{\alpha x}\sin\beta x}$

$=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

Пр: $y''+2y'+2y=0 \to$ к.ј. $r^2+2r+2=0$

$D=-4$

$r_{1,2}=\frac{-2\pm i\sqrt{4}}{2}=-1\pm i$

$\alpha=-1 \quad \beta=1 \quad \Rightarrow$ О.Р.: $y(x)=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\cdot\sin x)$

Нехомогене линеарне ДЈ другог реда са константним коеф.

(1) $y''+py'+q=f(x)$ $p,q\in\mathbb{R}$ f-непр. ф-ја

хомогени део: $\underbrace{y''+py'+q}_{L(y)}=0$ (2)

Теорема $\left.\begin{array}{l} y_p\text{- партикуларно реш. (1)} \\ y_h\text{- опште реш. (2)} \end{array}\right\} \Rightarrow y=y_h+y_p$ је опште решење (1).

Доказ: $y=y_h+y_p$ јесте решење (1) јер: $L(y)=L(y_h+y_p)=\underbrace{L(y_h)}_{0}+\underbrace{L(y_p)}_{f(x)}=f(x)$ ✓

Покажимо да је опште реш.:

нека је $\bar{y}$ о.р. (1) $\underline{\bar{y}-y_p}$

$L(\boxed{\bar{y}-y_p})=L(\bar{y})-L(y_p)=f(x)-f(x)=\underline{\underline{0}}$

$\Rightarrow$ $\bar{y}-y_p$ је решење хомогеног облика (2)

$\bar{y}-y_p=y_h \Rightarrow \bar{y}=y_p+y_h$ ✓ □

Како наћи y_p ?

МЕТОДА НЕОДРЕЂЕНИХ КОЕФ.:

$$(1)\quad \underbrace{y''+py'+q(x)}_{L(y)}=f(x)$$

f(x) посебног облика

$$f(x)=e^{\alpha x}\cdot\left(P_n(x)\cdot\cos\beta x+Q_l(x)\cdot\sin\beta x\right)$$

$\deg P_n=n$
$\deg Q_l=l$

y_p тражимо у облику:

$$y_p=x^m\cdot e^{\alpha x}\cdot\Big[(a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\dots+a_0)\cos\beta x+(b_kx^k+\dots+b_0)\sin\beta x\Big)$$

$k=\max\{n,l\}$

m: ако $\alpha+i\beta$ није корен к.ј. $r^2+pr+q=0$ → $m=0$

$\alpha+i\beta$ корен реда 1: —||— → $m=1$

$\alpha+i\beta$ двоструки корен —||— → $m=2$

Заменимо у (1) $\rightsquigarrow$ нађемо $a_k,\dots,a_0,\ b_k,\dots,b_0$

Како наћи y_p ?

МЕТОДА НЕОДРЕЂЕНИХ КОЕФ.:

$$(1)\quad \underbrace{y''+py'+q(x)}_{L(y)}=f(x)$$

$f(x)$ посебног облика

$$f(x)=e^{\alpha x}\cdot\left(P_n(x)\cdot\cos\beta x+Q_l(x)\cdot\sin\beta x\right)$$

$\deg P_n=n$

$\deg Q_l=l$

y_p тражимо у облику:

$k=\max\{n,l\}$

$$y_p=x^m\cdot e^{\alpha x}\cdot\left[(a_k x^k+a_{k-1}x^{k-1}+\dots+a_0)\cos\beta x+(b_k x^k+\dots+b_0)\sin\beta x\right)$$

Пример: $y''-y=x^2-x+1$.

ОР: $y=y_h+y_p$

$\boxed{y_h}$: кј: $r^2-1=0$ $\quad r_{1,2}=\pm 1\rightarrow \boxed{y_h}=c_1\cdot e^x+c_2\cdot e^{-x}$

$\boxed{y_p}$: $f(x)=x^2-x+1=\underset{\alpha=0}{e^{0\cdot x}}\left(\underset{n=2}{(x^2-x+1)}\underbrace{\cos 0\cdot x}_{1}+\underset{\beta=0}{0\cdot\sin(0\cdot x)}\right)$

$\underline{\underline{k=2}}$

$\alpha+i\beta=0+i\cdot 0=0\leftarrow$ да ли је корен кј. $r^2-1=0$? НЕ! $\underline{\underline{m=0}}$

y_p тражимо у облику:

$$y_p(x)=x^0\cdot e^{0\cdot x}\left((a_2x^2+a_1x+a_0)\underbrace{\cos(0x)}_{1}+(b_2x^2+b_1x+b_0)\underbrace{\sin(0\cdot x)}_{0}\right)$$

$$y_p(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$$

Пример: $y''-y=x^2-x+1$. ОР: $y=y_h+y_p$

y_h: kj: $r^2-1=0$ $r_{12}=\pm1$ → $y_h=c_1\cdot e^x+c_2\cdot e^{-x}$

y_p: $f(x)=x^2-x+1=\underbrace{e^{0\cdot x}}_{\alpha=0}\left(\underbrace{(x^2-x+1)}_{n=2}\underbrace{\cos 0\cdot x}_{1}+\underbrace{0\cdot\sin(0\cdot x)}_{\beta=0}\right)$ $\underline{\underline{k=2}}$

$\alpha+i\beta=0+i\cdot0=0$ ← да ли је корен kj. $r^2-1=0$? НЕ! $\underline{\underline{m=0}}$

y_p тражимо у облику:

$y_p(x)=x^0\cdot e^{0\cdot x}\left((a_2x^2+a_1x+a_0)\cdot\underbrace{\cos(0x)}_{1}+(b_2x^2+b_1x+b_0)\underbrace{\sin(0\cdot x)}_{0}\right)$

$\underline{y_p(x)=a_2x^2+a_1x+a_0}$

$y_p'(x)=2a_2x+a_1$

$y_p''(x)=2a_2$

$2a_2-a_2x^2-a_1x-a_0=x^2-x+1$

$0=(1+a_2)x^2+(-1+a_1)x+1+a_0-2a_2$

$$\left.\begin{array}{lll}1+a_2=0 & \to & a_2=-1\\ -1+a_1=0 & \to & a_1=1\\ 1+a_0-2a_2=0 & \to & a_0=-3\end{array}\right\}\to \boxed{y_p=-x^2+x-3}$$

$\underline{\underline{\text{О.Р.}}}$ $y=y_h+y_p$

$\boxed{y=c_1e^x+c_2\cdot e^{-x}-x^2+x-3}$ □

Став: $y''+py'+qy=f_1(x)+f_2(x)$ (1)

$y_{p,1}$ – парт. реш. $y''+py'+qy=f_1(x)$

$y_{p,2}$ – парт. реш. $y''+py'+qy=f_2(x)$

$\Rightarrow$ $y_p=y_{p,1}+y_{p,2}$ је парт. реш. (1)

Доказ: $L(y)=y''+py'+qy$

$$L(y_p)=L(y_{p,1}+y_{p,2})=L(y_{p,1})+L(y_{p,2})=f_1(x)+f_2(x) \quad (1) \ ✓ \quad \square$$

Пример: $y''+y=\cos x+\cos 2x$

- $y''+y'=0$ $\quad r^2+1=0$ $\quad r=\pm i$ $\rightsquigarrow$ $\boxed{y_h}=C_1\cdot\cos x+C_2\cdot\sin x$
- $f_1(x)=\cos x \to y''+y=\cos x \overset{\text{прошли час}}{\rightsquigarrow} y_{p,1}=\dots$
- $f_2(x)=\cos 2x \to y''+y=\cos 2x \rightsquigarrow y_{p,2}=\dots$

О.Р. $\boxed{y_h+\overbrace{y_{p,1}+y_{p,2}}^{y_p}}$

МЕТОДА ВАРИЈАЦИЈЕ КОНСТАНТИ

(1) $y''+p\cdot y'+q\cdot y=f(x)$

(2) $y''+py'+qy=0$

- хомогени део $\overset{(2)}{\rightsquigarrow}$ $\boxed{y_h}=C_1\cdot y_1+C_2\cdot y_2$
- $y_p(x)=?$ $\quad y(x)=C_1(x)\cdot y_1+C_2(x)\cdot y_2$ ← тражимо $C_1(x)$ и $C_2(x)$ да $y(x)$ буде реш. (1)

$$y'(x)=C_1\cdot y_1'+C_2y_2'+\underbrace{C_1'\cdot y_1+C_2'\cdot y_2}_{\text{тражимо да ово }=0}$$

→ $\boxed{\text{услов I}:\ C_1'y_1+C_2'y_2=0}$

$$\Rightarrow y'(x)=C_1y_1'+C_2y_2'$$

$$\Rightarrow y''(x)=C_1'y_1'+C_1\cdot y_1''+C_2'y_2'+C_2\cdot y_2''$$

убацимо у (1): $C_1'y_1'+C_1y_1''+C_2'y_2'+C_2y_2''+pC_1y_1'+pC_2y_2'+qC_1y_1+qC_2y_2=f(x)$

$$C_1(\underbrace{y_1''+py_1'+qy_1}_{=0})+C_2(\underbrace{y_2''+py_2'+qy_2}_{=0})+C_1'y_1'+C_2'y_2'=f(x)$$

→ $\boxed{\text{услов II}:\ C_1'y_1'+C_2'y_2'=f(x)}$

систем:

$$\left.\begin{aligned}C_1'y_1+C_2'y_2&=0\\C_1'y_1'+C_2'y_2'&=f(x)\end{aligned}\right\}$$

det система $=\begin{vmatrix}y_1&y_2\\y_1'&y_2'\end{vmatrix}=W(y_1,y_2)\neq 0$ јер y_1,y_2 лин. нез.

$$\rightsquigarrow C_1'(x)=\frac{\begin{vmatrix}0&y_2\\f(x)&y_2'\end{vmatrix}}{W}\qquad \boxed{C_1'(x)=-\frac{f(x)y_2}{W}}\qquad \boxed{C_2'(x)=\frac{\begin{vmatrix}y_1&0\\y_1'&f(x)\end{vmatrix}}{W}=\frac{f(x)y_1}{W}}$$

$$C_1'(x) = -\underbrace{\frac{f(x)\, y_2}{W}}_{g_1(x)} \qquad C_2'(x) = \underbrace{\frac{f(x)\, y_1}{W}}_{g_2(x)}$$

$$C_1(x) = \int g_1(x)dx + A_1 \qquad C_2(x) = \int g_2(x)dx + A_2$$

$$y(x) = \underline{C_1(x)\cdot y_1 + C_2(x)\cdot y_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{gathered} y(x) = A_1 y_1 + y_1\cdot\int g_1(x)dx + A_2\cdot y_2 + y_2\cdot\int g_2(x)dx \\ A_1, A_2 \text{- произв. константе} \end{gathered}} \qquad (\leftarrow \text{парт. реш.})$$

ОПШТЕ РЕШЕЊЕ

Пример: $y'' - y = \underbrace{\boxed{\frac{e^x}{e^x+1}}}_{f(x)}$

$\boxed{y_h}$ $y'' - y = 0$ $r^2 - 1 = 0$ $r = \pm 1$ $\rightarrow y_h = C_1 e^x + C_2 \cdot e^{-x}$

Варијација: $y(x) = C_1(x) \cdot \underbrace{e^x}_{y_1} + C_2(x) \cdot \underbrace{e^{-x}}_{y_2}$

Услови: I: $C_1' e^x + C_2' e^{-x} = 0$ $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -1-1 = \boxed{-2}$

II: $C_1' \cdot \underset{\uparrow \atop y_1'}{e^x} + C_2' \cdot (-e^{-x}) = \frac{e^x}{e^x+1}$

$$C_1' = -\frac{\frac{e^x}{e^x+1} \cdot \overset{y_2}{e^{-x}}}{\underset{\nwarrow W}{-2}} = \boxed{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{e^x+1}}$$

$$C_2' = \frac{1}{-2} \cdot \frac{e^x}{e^x+1} \cdot \overset{y_1}{e^x} = \boxed{-\frac{1}{2} \frac{e^{2x}}{e^x+1}}$$

$$C_1(x) = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{e^x+1} dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{e^x dx}{(e^x)^2 + e^x} \overset{t = e^x}{=} \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dt}{t^2+t} = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{t}{t+1}\right) + A_1 = \underline{\frac{1}{2} \ln \frac{e^x}{e^x+1} + A_1}$$

... сл. $C_2(x) = \int C_2'(x) dx = \dots = \underline{-\frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2} \ln(e^x+1) + A_2}$

О.Р. $y(x) = A_1 \cdot e^x + A_2 \cdot e^{-x} + \frac{1}{2}(x - \ln(e^x+1)) e^x + \frac{1}{2}(\ln(e^x+1) - e^x) \cdot e^{-x}$

Линеарне ДЈ вишег реда са константним коеф.

хомогене реда n: $y^{(n)}+a_{n-1}\cdot y^{(n-1)}+\dots+a_0\cdot y=0$ (1)

Теорема: Ако су $y_1,\dots,y_n$ лин. независна решења ДЈ (1)

$\Rightarrow$ $y(x)=C_1y_1+C_2y_2+\dots+C_ny_n$ је о.р. (1). △

карактеристична једначина: $\underline{r^n+a_{n-1}\cdot r^{n-1}+\dots+a_0=0}$

$r\in\mathbb{R}$ корен реда m: m парт. решења

$e^{rx}, x\cdot e^{rx}, x^2\cdot e^{rx},\dots, x^{m-1}e^{rx}$

комп. конј. $\alpha\pm i\beta$ вишеструкости m: $2m$ парт. реш.

$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\dots, x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$

$e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\dots, x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$

Пример: $y^{(4)}+2y^{(3)}+y''=0$

$\hookrightarrow r^4+2r^3+r^2=0$

$r^2(r^2+2r+1)=0$ $\to$ $r^2(r+1)^2=0$

$r_{1,2}=0$, $r_{3,4}=-1$

$\hookrightarrow y_1=1$, $y_2=x$

$\hookrightarrow y_3=e^{-x}$, $y_4=x\cdot e^{-x}$

опште решење:

$y(x)=C_1+C_2\cdot x+C_3\cdot e^{-x}+C_4\cdot x\cdot e^{-x}$ ✓

НЕХОМОГЕНА ДЈ: $y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\dots+a_0\cdot y = f(x)$ ⊛

хомогена ДЈ: $y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\dots+a_0 y=0$ (**)

Метода неодређених коеф.

y_h - опште решење хомогене (**)

$y_h=C_1y_1+C_2y_2+\dots+C_ny_n$

y_p - парт. р. ⊛ (?)

Ако $f(x)=e^{\alpha\cdot x}(\underbrace{P_k(x)}_{deg=k}\cos\beta x+\underbrace{Q_l(x)}_{deg=l}\sin\beta x)$

⇝ парт. реш. тражимо: $\boxed{y_p}=x^m\cdot e^{\alpha x}\left((a_sx^s+\dots+a_0)\cos\beta x+(b_sx^s+\dots+b_0)\sin\beta x\right)$

$s=\max\{k,l\}$

$m=$ ред корене $\alpha+i\beta$ кар. једн. $r^n+a_{n-1}r^{n-1}+\dots+a_0=0$

0, ако $\alpha+i\beta$ није корен кар. једн.

НЕХОМОГЕНА ДЈ: $y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\dots+a_0\cdot y=f(x)$ ⊛

хомогена дј: $y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\dots+a_0y=0$ (⊛⊛)

метода вар. конст.: $y_h=C_1y_1+\dots+C_ny_n$ - решење општe хом. дела (⊛⊛)

↝ $y(x)=C_1(x)y_1+\dots+C_n(x)y_n$ ← тражимо реш. ⊛ у овом облику

лин. нез.

$$/' \quad y'=\underbrace{C_1y_1'+C_2y_2'+\dots+C_ny_n'}_{\text{диференцирамо даље}}+\underbrace{C_1'y_1+C_2'y_2+\dots+C_n'y_n}_{\text{нека буде 0 } Ⓘ} \leftarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} C_1'y_1+C_2'y_2+\dots+C_n'y_n=0 \\ C_1'y_1'+C_2'y_2'+\dots+C_n'y_n'=0 \\ \vdots \\ C_1'y_1^{(n-2)}+\dots\dots+C_n'y_n^{(n-2)}=0 \\ C_1'\cdot y_1^{(n-1)}+\dots+C_n'y_n^{(n-1)}=f(x) \end{array}\right\}$$

да ли има решење? $\det=W(y_1,\dots,y_n)\neq 0$

⇒ ∃ јединствено решење система

$C_1'=g_1(x), \dots, C_n'=g_n(x) \quad /\int$

$C_1(x)=\int g_1(x)dx+A_1, \dots, C_n(x)=\int g_n(x)dx+A_n$

$$\Rightarrow \boxed{y(x)=A_1y_1+\int g_1(x)dx\cdot y_1 \dots + A_ny_n+\int g_n(x)dx\cdot y_n}$$

ОПШТЕ РЕШЕЊЕ

Закон хлађења:

тело темп. T_1

околина T_0, $T_0<T_1$

тело се хлади ...

Њутн: брзина промене темп. пропорционална разлици темп. тела и околине

$$\boxed{\frac{dT}{dt} = -k\cdot(T-T_0)}$$

$T=T(t)$ темп. у тренут. t

сматрамо да је T_0 const

$$\frac{dT}{T-T_0} = -kdt \quad /\int$$

$$\ln(T-T_0) = -kt+C_1 \quad /e$$

$$T-T_0 = \underbrace{e^{C_1}}_{C}\cdot e^{-kt}$$

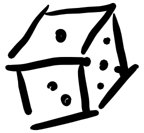
$$\boxed{T-T_0 = C\cdot e^{-kt}}$$

$C=?$ поч. усл.: $T(0)=T_1$

$$T_1-T_0 = C\cdot e^{-k0} = C \qquad \boxed{C=T_1-T_0}$$

$$\boxed{T=T_0+(T_1-T_0)\cdot e^{-kt}}$$

Вероватноћа



баца се једно пута

Случајни догађаји

* нека појава ← бацање коцкице

* ДОГАЂАЈ – један исход те појаве ← пао је непаран број

$A, B, C, \dots$

- СИГУРАН ДОГАЂАЈ Ω – сигуран исход појаве ← пао је број из скупа $\{1,2,3,4,5,6\}$
- НЕМОГУЋ ДОГАЂАЈ $\emptyset$ – не може се десити ← пао је број 77
- СЛУЧАЈАН ДОГАЂАЈ - може / не мора

Однос између догађаја A, B, C, X, Y

A - пао је број 3

B - пао је непаран број ← 1, 3, 5

C - пао је паран број ← 2, 4, 6

- X и Y су ДИСЈУНКТНИ догађаји ако се не могу десити (реализовати) истовремено

  пр. A и C

- унија догађаја: $\boxed{A \cup B}$ - догађај да се реализује бар један од догађаја A и B

  ако су A и B дисјунктни: $A \cup B$ означавамо са $\boxed{A+B}$

  пр. $A \cup B = B$ $A \cup C = A+C$: 3, 2, 4, 6

- пресек догађаја (производ): $\boxed{A \cap B} = \boxed{AB}$ = догађај да се реализују A и B истовремено

  пр. (пао 1 или 4) $\cap$ (пао паран број) = пао 4

  $A \cap C = \emptyset$

Однос између догађаја A, B, C, X, Y

A - пао је број 3

B - пао је непаран број ← 1, 3, 5

C - пао је паран број ← 2, 4, 6

ЕЛЕМЕНТАРНИ ДОГАЂАЈ = догађај који се не може разложити на простије пр. A

$$B = \{1\} \cup \underbrace{\{3\}}_{A} \cup \{5\}$$

бацање коцке: $\Omega = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\} \cup \{5\} \cup \{6\}$

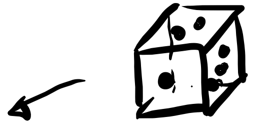
ПОТПУН СИСТЕМ ДОГАЂАЈА: елементарни догађаји $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ чија је унија сигуран догађај (Ω) „увек се дешава нешто ω_i", и међусобно су дисјунктни

$(\omega_i \cap \omega_j = \emptyset$ за све $i \neq j)$

Дефиниција вероватноће

КЛАСИЧНА (Лапласова) дефиниција:

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, .., \omega_n\}$ - потпун систем догађаја



претпоставка ← сви догађаји ω_i једнако могући

једнаке шансе да буду исход!

A ← реализује се када се реализује неки од догађаја $\omega_{i_1}, .., \omega_{i_k}$ $k \leq n$

$$A = \omega_{i_1} \cup \omega_{i_2} \cup \dots \cup \omega_{i_k} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{дисјунктни}}}{=} \omega_{i_1} + \omega_{i_2} + \dots + \omega_{i_k}$$

вероватноћа догађаја A :

$$\boxed{P(A) = \frac{k}{n}}$$

$$\left[P(1,4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \right]$$

* коначан скуп ел. исхода
* сви ел. догађаји једнаке шансе } предуслови!

Пр 1 Коцка $\{1,2,3,4,5,6\}$

A_k = догађај да падне $k \in \{1,2,3,4,5,6\}$

$\Omega = A_1 + \cdots + A_6$

A = паран број тачака ← 2,4,6 $\quad P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

B = број ≥ 5 ← 5,6 $\quad P(B) = \frac{2}{6} = 1/3$

Пр 2

$S = \left|\begin{array}{l} ⑥ \text{ црвених куглица} \\ 4 \text{ плаве} \\ 2 \text{ беле} \end{array}\right|$ ← 12

извлачење једне - ел. догађај $\underbrace{A_1, \ldots A_6}_{\text{црв.}}, \underbrace{A_7, \ldots A_{10}}_{\text{плаве}}, \underbrace{A_{11}, A_{12}}_{\text{беле}}$

A - извучена црвена $\quad P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

B - –||– плава $\quad P(B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

C - –||– бела $\quad P(C) = \frac{2}{12} = 1/6$

Пр 3 извлачимо 3 куглице одједном из S

A = све три црвене

$P(A) = ?$

↳ има их: $\binom{6}{3}$

ел. догађај - извлачење тројке куглица

има $\binom{12}{3}$ ел. догађаја

$$\rightarrow P(A) = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{\cancel{6 \cdot 5 \cdot 4}}{\cancel{12} \cdot 11 \cdot \cancel{10}} = \boxed{\frac{1}{11}}$$

$\Omega: \ P(\Omega) = \frac{n}{n} = 1$ $\emptyset: \ P(\emptyset) = \frac{0}{n} = 0$

$A: \ P(A) = \frac{k}{n} \quad k \leq n$ $\boxed{0 \leq P(A) \leq 1}$

Геометријска вероватноћа

бр. исхода (може бити) бесконачан

ел. исход $\longrightarrow$ тачка у области S $(S \subset \mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots)$ ← мера μ

дужина, површина, запр. ...

$P(A) = ?$

A - повољни исходи ↔ део $\sigma \subset S$

свака тачка - једнаке шансе

$$\boxed{P(A) = \frac{\mu(\sigma)}{\mu(S)}}$$

Пр.

круг уписан у квадрат

бирамо тачку квадрата

A - изабрана тачка у кругу

$$P(A) = \frac{\mu(\text{круга})}{\mu(\text{квадрата})} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi}{a^2} = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

Статистичка вероватноћа

експеримент - понавља се МНОГО ПУТА $\boxed{n}$

A - случајни догађај - реализовао се $\boxed{m(A)}$ пута

$\frac{m(A)}{n}$ - релативна фреквенција догађаја A

осцилује око неке константе , $n \to \infty$

α

$$\boxed{P(A)=\alpha}$$

n пута бацано

бр. бацања	бр. глава	
10000	5012	~ 1/2
50000	25096	~ 1/2
1000000	499990	~ 1/2

Дефиниција вероватноће:

Ω - скуп свих ел. догађаја

$\mathcal{P}(\Omega)$ - парт. скуп.

$A \subset \Omega$ A - догађај

функција $P: \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ је ВЕРОВАТНОЋА на Ω ако задовољава

1) $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$ $P(A) \geq 0$
2) $P(\Omega)=1$
3) ако су $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ дисјунктни $(\forall i \neq j \; A_i \cap A_j = \emptyset)$ онда $P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

- $P(\underset{\uparrow}{\emptyset}) = 0$
  немогућ догађај

$$A + \emptyset = A$$

$$\left.\begin{array}{l} P(A+\emptyset) = P(A) \\ \quad \parallel \\ P(A) + P(\emptyset) \end{array}\right\} \Rightarrow P(\emptyset) = 0$$

- Ω - сигуран догађај

Директно из дефиниције: класична, геом. и статистичка дефиниција вероватноће јесу вероватноће у смислу математичке дефиниције

Дефиниција вероватноће:

Ω - скуп свих ел. догађаја

$\mathcal{P}(\Omega)$ - парт. скуп.

$A \subset \Omega$ A - догађај

функција $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ је ВЕРОВАТНОЋА на Ω ако задовољава

1) $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$ $P(A) \geq 0$
2) $P(\Omega) = 1$
3) ако су $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ дисјунктни $(\forall i \neq j \; A_i \cap A_j = \emptyset)$
   онда $P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

Својства вероватноће:

- СУПРОТАН ДОГАЂАЈ: $\overline{A}$

$A \to \overline{A}$ - дешава се тачно када се A не дешава

$A \cap \overline{A} = \emptyset \qquad A \cup \overline{A} = \Omega$

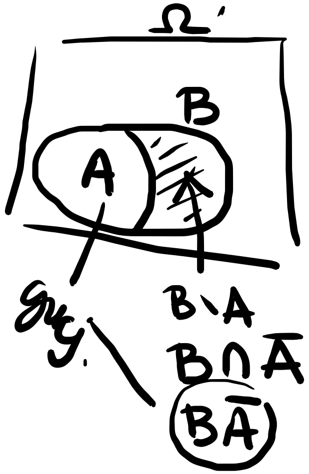
$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) \overset{\text{дисј.}}{=} P(A + \overline{A}) \overset{3)}{=} P(A) + P(\overline{A})$$

$$\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$$

- $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

$B = A + B\overline{A}$

$$P(B) = P(A + B\overline{A}) \overset{3)}{=} P(A) + \underbrace{P(B\overline{A})}_{\geq 0} \geq P(A)$$



Дефиниција вероватноће:

Ω-скуп свих ел. догађаја

𝒫(Ω) - партит. скуп.

$A \subset \Omega$ A-догађај

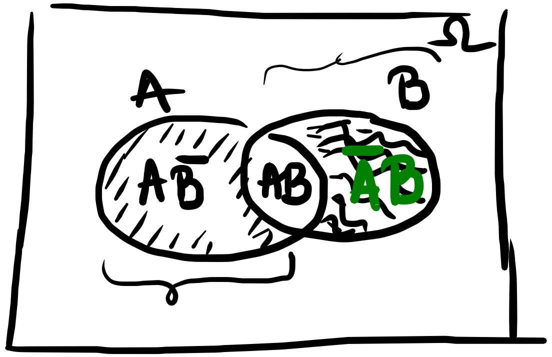
функција $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ је ВЕРОВАТНОЋА на Ω ако задовољава

1) $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \quad P(A) \geq 0$

2) $P(\Omega) = 1$

3) ако су $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ дисјунктни $(\forall i \neq j \; A_i \cap A_j = \emptyset)$ онда $P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

- $\boxed{A\cup B}$ $\quad P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$



$A = A\bar{B} \cup \overset{\text{gucj}}{\overline{AB}} = A\bar{B} + AB$

$B = AB + \bar{A}B$

$A\cup B = A + \bar{A}B \quad /P \quad \xrightarrow{3)} \quad \overbrace{P(A\cup B)}^{X} = P(A) + \underbrace{P(\bar{A}B)}$

$A\cup B = B + A\bar{B} \quad /P \quad \xrightarrow{3)} \quad P(A\cup B) = P(B) + \underbrace{P(A\bar{B})}$

$A\cup B = A\bar{B} + AB + \bar{A}B \;/P \xrightarrow{3)} P(A\cup B) = \underbrace{P(A\bar{B})}_{X-P(B)} + P(AB) + \underbrace{P(\bar{A}B)}_{X-P(A)}$

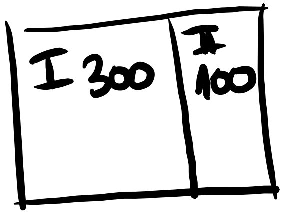
$\Rightarrow X = X - P(B) + P(AB) + X - P(A)$

$P(A) + P(B) - P(AB) = X$ ✓

Условна вероватноћа

$P(A|B)$ - вероb. да се A деси, под претп. да је B реализован

Пр:



400 сијалица   I произв.   II
300   100
83% добро   63% добро

?P(1 узета сијалица добра)=?

A := изабрана добра
B := изабрана сијалица од I произв.

добрих: I : $300 \cdot \frac{83}{100} = 249$

II : $100 \cdot \frac{63}{100} = 63$

$$P(A) = \frac{249+63}{400} = 0{,}78 \qquad \boxed{P(A)=0{,}78}$$

$$P(\underbrace{A|B}) = \frac{249}{300} = 0{,}83 \qquad \boxed{P(A|B)=0{,}83}$$

↑
изабрана добра сијалица
од првог произв.

$$P(A) \neq P(A|B)$$

$$\boxed{P(AB)} \neq \frac{249}{400} = 0{,}6225$$

A, B, AB ⓝ изведена експеримента

$A: m(A)$

$B: m(B)$

$AB: m(AB)$

B под условом A ?

$$\underbrace{B \text{ под условом } A}_{P(B|A)} \longrightarrow \frac{m(AB)}{m(A)} = \frac{\frac{m(AB)}{n} \leftarrow P(AB)}{\frac{m(A)}{n} \leftarrow P(A)}$$

Дефиниција: $P(A)>0$

условна вероватноћа $P(B|A) := \dfrac{P(AB)}{P(A)}$

$P(AB) = P(B|A)\cdot P(A)$

((аналогно:

$P(BA) = P(A|B)\cdot P(B)$

$$\Rightarrow \boxed{P(B|A)\cdot P(A) = P(A|B)\cdot P(B)}$$

Пример: $P(AB) = P(B)\cdot P(A|B) = \frac{300}{400}\cdot 0{,}83 = 0{,}6225$ ✓

Пример 2:

7 белих
3 црне

P(у два извлачења оба пута бела) =?

! прву куглицу
не враћамо

A = 1. пут извучена бела
B = 2. пут -||-

$= P(AB) = ?$

$$P(AB) = P(A)\cdot \underbrace{P(B|A)}_{\text{има 6 б. од 9 куглица}} = \frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9} = \boxed{\frac{7}{15}}$$ □

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

A је независан од B ако $P(A|B) = P(A)$

Теорема Еквивалентна су:

1° $P(A|B)=P(A)$ ← A нез од B

2° $P(B|A)=P(B)$ ← B нез од A

3° $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$

кажемо да су A и B
независни догађаји

Провера независности – проверимо било који 1°, 2° или 3°

доказ: (1°⇒2°) $P(B|A) = \frac{P(BA)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B)$

(2°⇒3°) $P(AB) = P(B|A)\cdot P(A) \overset{2°}{=} P(B)\cdot P(A)$ ✓

(3°⇒1°) $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \overset{3°}{=} \frac{P(A)\cdot \cancel{P(B)}}{\cancel{P(B)}} = P(A)$ ✓ □

Увек: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

Последица: Ако су A и B независни догађаји: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)$.

Пример: A - произвољан дог. $P(A)\neq 0$

$\Rightarrow A$ независан од Ω

$P(\Omega|A)=?$

$P(\Omega)=1$

$$P(\cancel{A})=P(A\Omega)=P(\cancel{A})\cdot P(\Omega|A)$$

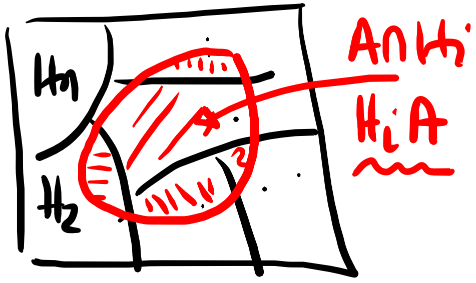
$$\Rightarrow P(\Omega|A)=1=P(\Omega) \quad \square$$

Потпуна вероватноћа и Бајесова формула

потпуна вероватноћа: $\Omega \supset H_1, \dots, H_n$ дисјунктне $(H_i \cap H_j = \emptyset, i \neq j)$

$$\Omega = H_1 \cup \dots \cup H_n \overset{\downarrow}{=} H_1 + H_2 + \dots + H_n$$

$H_1, H_2, \dots, H_n$ чине РАЗБИЈАЊЕ Ω



догађај $A \subset \Omega$: $A = H_1A + H_2A + \dots + H_nA$

$$P(A) = P(H_1A) + P(H_2A) + \dots + P(H_nA) \quad \leftarrow P(H_iA) = P(H_i) \cdot P(A|H_i)$$

$$\Rightarrow P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + \dots + P(H_n) \cdot P(A|H_n)$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i)$$ – формула потпуне вероватноће

Пример: 400 сиј.

I 300	II 100
83% добро	63%

H_1 – избор I произв.
H_2 – избор II

A – избор добре сијалице

$$P(H_1) = \frac{300}{400} = \frac{3}{4} \quad P(H_2) = \frac{100}{400} = \frac{1}{4}$$

$$P(A|H_1) = 0.83 \quad P(A|H_2) = 0.63$$

$$\boxed{P(A)} = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) = \frac{3}{4} \cdot 0{,}83 + \frac{1}{4} \cdot 0.63$$

$$= 0{,}78 \checkmark$$

Теорема (Бајесова теорема): $\Omega = H_1 + \dots + H_n$ - разбијање на дисјунктне догађаје

Прет. да се $A \subset \Omega$ реализовао

$$\Rightarrow P(H_i|A) = \frac{P(H_i)\cdot P(A|H_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k)\cdot P(A|H_k)} \quad \text{за све } i=1,2,\dots,n.$$

Доказ: $\underbrace{P(AH_i) = P(A)\cdot \boxed{P(H_i|A)} = P(H_i)\cdot P(A|H_i)}$

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)\,P(A|H_i)}{\boxed{P(A)}} = \frac{P(H_i)\cdot P(A|H_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k)P(A|H_k)} \quad \square$$

$$\boxed{P(A)} = \sum_{k=1}^{n} P(H_k)\cdot P(A|H_k)$$

потпуне вероватноће

Теорема (Бајесова теорема): $\Omega = H_1 + \cdots + H_n$ – разбијање на дисјунктне догађаје

Претп. да се $A \subset \Omega$ реализовао

$$\Rightarrow P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i)\cdot P(A \mid H_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k)\cdot P(A \mid H_k)} \quad \text{за све } i = 1,2,\ldots,n.$$

$$\sum_{k=1}^{n} P(H_k)\cdot P(A \mid H_k) = P(A)$$

Пример:

M_1	M_2	M_3	← машине
25%	35%	40%	
5%	4%	2%	} шкарт

P(изабрани производ шкарт) = ?

P(изабрани шкарт производ направљен на M_i) = ?
$i = 1,2,3$

H_i – произведен на M_i $i = 1,2,3$

A – изабрани производ шкарт.

$P(H_1) = 0.25 \quad P(H_2) = 0.35 \quad P(H_3) = 0.4$

$P(A \mid H_1) = 0.05 \quad P(A \mid H_2) = 0.04 \quad P(A \mid H_3) = 0.02$

$$\boxed{P(A)} = \sum_{i=1}^{3} P(H_i)\cdot P(A \mid H_i)$$

$$= 0{,}25\cdot 0{,}05 + 0{,}35\cdot 0{,}04 + 0{,}4\cdot 0{,}02$$

$$= 0{,}0345$$

$$\boxed{P(H_1 \mid A)} = \frac{P(H_1)\cdot P(A \mid H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}25\cdot 0{,}05}{0{,}0345}$$

$$= 0{,}362$$

$$\boxed{P(H_2 \mid A)} = \frac{P(H_2)\cdot P(A \mid H_2)}{P(A)} = \cdots = 0{,}406$$

слично, или: $\boxed{P(H_3 \mid A)} = 1 - (0{,}362 + 0{,}406) = 0{,}232.$ □

Дискретна случајна променљива

Случајна променљива: $X: \Omega \to \mathbb{R}$ $A \to X(A)$-број

Ако $X(\Omega)$ – скуп вредности коначан/пребројив → X је ДИСКРЕТНА СЛ. ПРОМ.

→ $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$

Вероватноћа $\underbrace{P(X=x_i)} =: p_i$ $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ $p_1+p_2+\dots+p_n+\dots=1$

$\{(x_i, p_i) \mid x_i \in X(\Omega), p_i = P(X=x_i), i=1,2\dots\}$ – ЗАКОН РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋЕ сл. пром X

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\dots$
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n	$\dots$

Пр 1   Бацање 3 новчића

Колико писма паде $= \textcircled{X}$

сваком исходу → колико писма паде

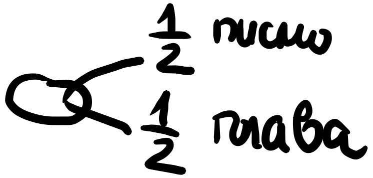
$X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$

$P(X=0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

$P(X=1) = \binom{3}{1}\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

$P(X=2) = \frac{3}{8}$

$P(X=3) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

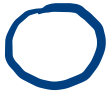


П Г Г
Г П Г
Г Г П

Закон расподеле:

X	0	1	2	3
P	1/8	3/8	3/8	1/8

Пример 2



гађање у мету
вероватноћа погодка $= p$ ← гађања док се мета не погоди

$X =$ број гађања до првог погодка (укључујући и погодак) : $1, 2, 3, .., n, \ldots$ $\mathbb{N}$

$P(X=n) = ?$ $\quad \underbrace{\underline{1-p}\ \underline{1-p}\ \underline{\quad}\ \cdots\ \underline{1-p}}_{n-1 \text{ пута}}\ \underset{\overset{\uparrow}{p}}{\star}$

$q = 1-p$ $\quad \boxed{P(X=n) = q^{n-1} \cdot p}$

X	1	2	3	...	n	...
P	p	qp	q^2p	...	$q^{n-1}p$	...

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X=n) = p+qp+q^2p+\cdots+q^{n-1}p+\ldots = p \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} q^k}_{=\frac{1}{1-q}} = \frac{p}{1-q} = 1 \ ✓$$

Биномна расподела вероватноће

експерименти - понавља се n пута

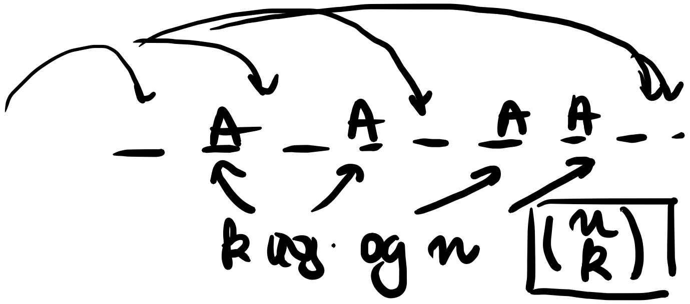
догађај A - дешава се са вероватноћом $\{p\}$ у експерименту

$$\underbrace{✓\ -\ ✓\ ✓\ -\ -}_{n}\ -$$

$X =$ број реализација догађаја A $X(\Omega) = \{0,1,2,..,n\}$

$\bar{A}$ - супротан $A \rightsquigarrow 1-p = q$

$P(X=k) = ?$ k x догађај A, $n-k$ $\bar{A}$



$$\boxed{P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}} = P_n(k)$$

$B(n,k)$

Биномни закон расподеле:

X	0	1	2	...	k	....	n
P	q^n	$\binom{n}{1}pq^{n-1}$	↑	...	$\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$	...	p^n

$\binom{n}{2}p^2q^{n-2}$

Математичко очекивање

Деф X - дискретна сл. пром. ← $P(X=x_i)=p_i$, $i\in I$

$E(X)=\sum\limits_{i\in I} p_i\cdot x_i$ - МАТЕМАТИЧКО ОЧЕКИВАЊЕ диск. сл. пром. X

коначан скуп вредности: $E(x)=p_1x_1+p_2x_2+\dots+p_nx_n$

пребројив (бесконачан): $E(X)=p_1x_1+p_2x_2+\dots+p_nx_n+\dots$

Пр. 1: бацање коцкице

X - број тачака горе

$X(\Omega)=\{1,2,3,4,5,6\}$

$P(X=i)=\frac{1}{6}$ $i=1,\dots,6$

X	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$E(X)=\frac{1}{6}\cdot 1+\frac{1}{6}\cdot 2+\frac{1}{6}\cdot 3+\frac{1}{6}\cdot 4+\frac{1}{6}\cdot 5+\frac{1}{6}\cdot 6=\boxed{3,5}$

За биномну расподелу наћи очекивање:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot q^{n-k} \qquad q=1-p$$

$$\underbrace{n \text{ експер.}}_{P_n(k)}$$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n}\underset{\uparrow}{k}\cdot P(X=k)=\sum_{k=0}^{n}k\cdot\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot q^{n-k}\overset{\text{за } k=0 \text{ 0 члан}}{=}\sum_{k=1}^{n}\underbrace{k\cdot\binom{n}{k}}_{*}p^k\cdot q^{n-k}$$

могућа вред X

$$k\cdot\binom{n}{k}=k\cdot\frac{n!}{k!\,(n-k)!}=\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}=n\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}=n\cdot\binom{n-1}{k-1}$$

$$\Rightarrow E(X)=\sum_{k=1}^{n}n\cdot\binom{n-1}{k-1}\cdot p^k\cdot q^{n-k}=n\cdot\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{\underbrace{k-1}_{\ell}}p^k q^{n-k}=n\sum_{\ell=0}^{n-1}\binom{n-1}{\ell}p^{\ell+1}q^{n-\ell-1}$$

$$=n\cdot p\cdot\underbrace{\sum_{\ell=0}^{n-1}\binom{n-1}{\ell}p^{\ell}\cdot q^{(n-1)-\ell}}_{(p+q)^{n-1}\ \text{Њутнова б.ф.}}=np\cdot\underbrace{(\underbrace{p+q}_{1})^{n-1}}_{1}=\boxed{np}$$

$$\boxed{E(X)=n\cdot p}$$

размишљање:

m експеримената

X-случајна пром. → вредност x_1: k_1 пута

-||- x_2: k_2 -||-

$\vdots$

x_n: k_n пута

$k_1 + \dots + k_n = m$

АРИТМЕТИЧКА средина X:

$$\overline{X} = \frac{k_1 \cdot x_1 + \dots + k_n \cdot x_n}{m} = \underbrace{\frac{k_1}{m}}_{\substack{\text{рел. фрекв.}\\ m \text{ велико} \\ \approx p_1}} \cdot x_1 + \dots + \frac{k_n}{m} x_n$$

$p_i = P(X = x_i)$

$$\overline{X} \approx \underbrace{p_1 \cdot x_1 + \dots + p_n \cdot x_n}_{E(X)}$$

Својства $E(X)$

Став: $E(c)=c$. $(c=const)$

$P(X=c)=1$

$E(c)=c\cdot 1=c$. $\square$

Став $k\in\mathbb{R}$

$E(k\cdot X)=k\cdot E(X)$

Доказ:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

$E(X)=p_1x_1+\dots+p_nx_n$

вред (k · вред X)

$k\cdot X$	kx_1	kx_2	$\dots$	kx_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

$E(kX)=p_1\cdot kx_1+\dots+p_n\cdot kx_n$

$=k\cdot E(X)$ $\square$

X, Y :

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Y	y_1	y_2	...	y_m
P	q_1	q_2	...	q_m

$\boxed{X+Y} \rightarrow$ Закон разпределе : $X = x_i, Y = y_j \leftarrow p_i \cdot q_i$

$X+Y$	x_1+y_1	x_1+y_2	...	x_1+y_m	x_2+y_1	...	x_2+y_m	...	x_n+y_m
P	$p_1 \cdot q_1$	$p_1 q_2$	...	$p_1 q_m$	$p_2 q_1$	...	$p_2 q_m$	....	$p_n q_m$

$x_1 + \sqcup$ $\qquad$ $x_2 + \sqcup$

Став : $E(X_1 + X_2 + \cdots + X_k) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_k)$ $\square$

* сл. пром X на $\{A_1 \subset \Omega_1\}$ $\forall A_1$ и $\forall A_2$ независни → случ. пром X_1 и X_2 независне
сл. пром Y на $\{A_2 \subset \Omega_2\}$

Производ $X \cdot Y$:

$$X = \{(x_i, p_i) \mid i=1,..,n\}$$
$$Y = \{(y_j, q_j) \mid j=1,...,m\}$$

$X \cdot Y$:

n·m

$x \cdot y$	x_1y_1	...	x_1y_m	x_2y_1	...	x_ny_m
P	p_1q_1	...	p_1q_m	p_2q_1	...	p_nq_m

Став X, Y - независне случ. пром
$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y).$$

Пример:

$\overset{0}{\downarrow}$

X	-1	1
P	0,5	0,5

$\overset{0}{\downarrow}$

y	-100	100
P	0,5	0,5

„мера од одступања" ?

$$E(X) = \frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot 1 = 0 \qquad E(Y) = 0$$

$$E(X) = E(Y)$$

Деф X-случ. пром. Дисперзија $D(X)$ случајне величине X

$$D(X) := E(X-E(X))^2$$

X	x_1	x_2	⋯	x_n
P	p_1	p_2	⋯	p_n

$$\bar{x} = E(X)$$

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} \underset{\overset{\uparrow}{\text{верве}}}{p_i} \cdot \underbrace{(x_i-\bar{x})^2}_{(X-E(X))^2}$$

$$\boxed{D(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot (x_i-\bar{x})^2}$$

Пример: први стрелац X   други стрелац Y   ← број поена у једном гађању

X	1	2	3
P	0.3	0.2	0.5

Y	1	2	3
P	0,1	0,6	0,3

$E(X) = 1\cdot 0{,}3 + 2\cdot 0{,}2 + 3\cdot 0{,}5 = 2{,}2$

$E(Y) = 1\cdot 0{,}1 + 2\cdot 0{,}6 + 3\cdot 0{,}3 = 2{,}2$

$E(X) = E(Y) = 2{,}2$

$D(X) = 0{,}3\cdot(1-2{,}2)^2 + 0{,}2\cdot(2-2{,}2)^2 + 0{,}5\cdot(3-2{,}2)^2 = 0{,}76$

$D(Y) = \cdots = 0{,}36$

Деф X-случ. пром

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

II начин: $D(X) = E(X^2) - \underbrace{(E(X))^2}_{(2{,}2)^2}$

X^2	1	4	9
P	0.3	0.2	0,5

$E(X^2) = 1\cdot 0{,}3 + 4\cdot 0{,}2 + 9\cdot 0{,}5 = 5{,}6$

$D(X) = 5{,}6 - 4{,}84 = 0{,}76$

Пример: Први стрелац X   Други стрелац Y   ← број поена у једном гађању

X	1	2	3
P	0.3	0.2	0.5

Y	1	2	3
P	0.1	0,6	0,3

$E(X) = 1\cdot 0{,}3 + 2\cdot 0{,}2 + 3\cdot 0{,}5 = 2{,}2$

$E(Y) = 1\cdot 0{,}1 + 2\cdot 0{,}6 + 3\cdot 0{,}3 = 2{,}2$

$E(X) = E(Y) = 2{,}2$

$D(X) = 0{,}3\cdot(1-2{,}2)^2 + 0{,}2\cdot(2-2{,}2)^2 + 0{,}5\cdot(3-2{,}2)^2 = 0{,}76$

$D(Y) = \cdots = 0{,}36$

Став $D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

Доказ:

$$D(X) = E((X-E(X))^2) = E(X^2 - 2X\cdot E(X) + (E(X))^2)$$

$$= E(X^2) + \underbrace{E(-2X\,E(X))}_{\substack{\| \\ -2E(X)\cdot E(X)}} + \underbrace{E(\underbrace{(E(X))}_{const}{}^2)}_{E(X)^2}$$

$$= E(X^2) - 2(E(X))^2 + (E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2 \quad \square$$

Став

1° $D(c)=0$ (c-const)

2° $D(k\cdot X) = k^2\cdot D(X)$

Доказ:

1° $D(c) = E(c^2) - (E(c))^2 = c^2 - c^2 = 0$

2° $D(k\cdot X) = E(k^2X^2) - (E(kX))^2 =$

$$= k^2E(X^2) - (kE(X))^2$$

$$= k^2(\underbrace{E(X^2) - (E(X))^2}_{D(X)}) \quad ✓$$

Став: X, Y - независне сл. пром. : $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$

Доказ:

$$D(X+Y) = E((X+Y)^2) - (E(X+Y))^2$$

$$= E(X^2+2XY+Y^2) - (E(X)+E(Y))^2$$

$$= \boxed{E(X^2)} + \cancel{E(2XY)} + \underline{E(Y^2)} \boxed{-(E(X))^2} - \cancel{2E(X)E(Y)} \underline{-(E(Y))^2}$$

$$= 2E(XY)$$

$$\underset{\text{нез.}}{=} 2E(X)E(Y)$$

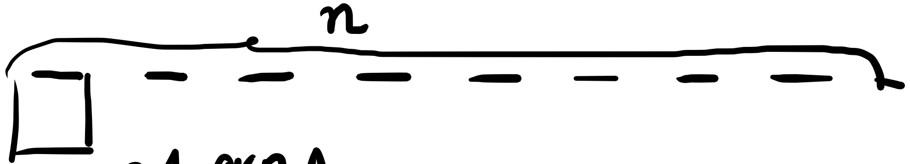
$$= D(X) + D(Y) \quad ✓ \quad \square$$

Деф. X - случ. пром.

средње квадратно одступање: $\sigma(X) := \sqrt{D(X)}$

тв. X - биномна расподела: $P_n(k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$ $q=1-p$

$D(X)=?$ $\sigma(X)=?$



реализација A → p

$X_1 \begin{cases} \nearrow 1 \text{ ако } A \\ \searrow 0 \text{ ако } \bar{A} \end{cases}$

случ. пром. $X_k: \begin{cases} \nearrow 1, \text{ ако } A \\ \searrow 0, \text{ ако } \bar{A} \end{cases}$

X_k	0	1
P	q	p

$\boxed{X=X_1+X_2+\dots+X_n}$ $X_1,\dots,X_n$ - независни $\overset{\text{став}}{\Rightarrow}$ $D(X)=D(X_1+\dots+X_n)=D(X_1)+\dots+D(X_n)$

$E(X_k)=0\cdot q+1\cdot p=\boxed{p}$

$D(X_k)=E(X_k-E(X_k))^2=q\cdot(0-p)^2+p(1-p)^2=qp^2+pq^2=pq(\underbrace{p+q}_{1})=\underline{pq}$

$\Rightarrow D(X)=n\cdot D(X_k)=\boxed{npq}$

$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$

$\sigma(X)=\sqrt{npq}$

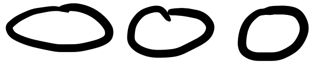
Функција расподеле и густина расподеле

X – случ. пром. $P(X<a)=P$ (X узима вредност из $(-\infty,a)$)

Деф Функција расподеле вероватноћа случајне пром. X

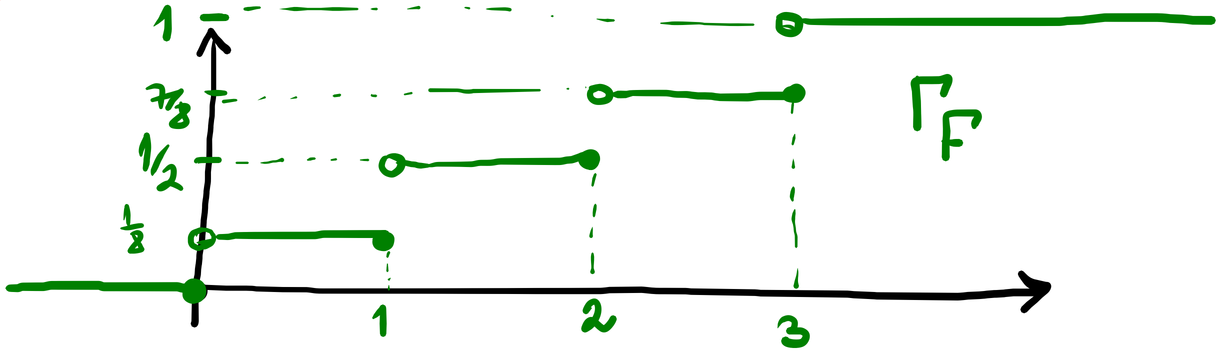
$x\in\mathbb{R}$: $F(x)=P(X<x)$

Пример:



X = број писама горе

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$



$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 1/8, & x\in[0,1]\\ 1/2, & x\in(1,2]\\ 7/8, & x\in(2,3]\\ 1, & x>3\end{cases}$$

$x=-5$: $P(X<-5)=0$

$x=1/2$: $P(X<\frac{1}{2})=P(X=0)=\frac{1}{8}$

$P(X<\frac{3}{2})=P(X=0)+P(X=1)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{4}{8}=\boxed{\frac{1}{2}}$

$P(X<2)=P(X=0)+P(X=1)=\boxed{\frac{1}{2}}$

$P(X<x)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{7}{8}$

$3>x>2$