

~ Локални екстремуми - наставка ~

лок. екстремуми: $\rightarrow$ стање тачке $\nabla f = \vec{0}$
 $\rightarrow$ тачке у којима је нулисана диференцијална

① лок. екстр? $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$

$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ сви нпр. кару, узбаци
 $\rightarrow$ само стање тачке су карактеристични

М-а.м.м. $\nabla f(M) = \vec{0} = (0,0,0)$

$$\begin{aligned} f'_x &= 3x^2 + 12y = 0 \\ f'_y &= 2y + 12x = 0 \\ f'_z &= 2z + 2 = 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} y = -6x \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x^2 - 24x &= 0 \\ \Rightarrow x &= 0 \vee x = 24 \\ \downarrow & \\ y &= 0 \vee y = -144 \end{aligned}$$

стање тачке: $M_1(0,0,-1)$ и $M_2(24,-144,-1)$

инвер:

$$\begin{bmatrix} f''_{xx} = 6x & f''_{xy} = 12 & f''_{xz} = 0 \\ f''_{yx} & f''_{yy} = 2 & f''_{yz} = 0 \\ 0 & 0 & f''_{zz} = 2 \end{bmatrix}$$

Хесидан: $d^2f(x,y,z) = \begin{bmatrix} 6x & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

M_2 $d^2f(M_2) = \begin{bmatrix} 144 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$A_1 = 144 > 0$

$A_2 = \begin{vmatrix} 144 & 12 \\ 12 & 2 \end{vmatrix} = 144 > 0$

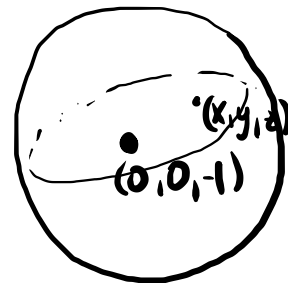
$A_3 = \det \begin{vmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{vmatrix} = 144 \cdot 2^2 - 12 \cdot 12 \cdot 2 + 0 = 144 \cdot 2 > 0$

Синтезир $\Rightarrow M_2$ је лок. мин.

M_1 $d^2f(M_1) = \begin{bmatrix} 0 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$A_1 = 0 \Rightarrow$ Синтезир не може одлучити

$M_1(0,0,-1)$
 $M_2(24,-144,-1)$



Испитивање M_1 :

$f(x,y,z) - f(0,0,-1) =$

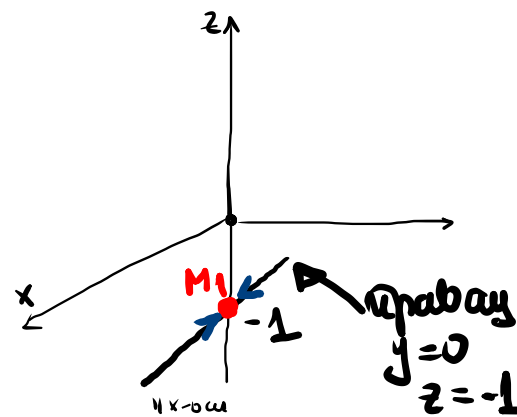
$= x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z - (-1) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z + 1$

$= x^3 + y \cdot (y + 12x) + (z + 1)^2$
 $\Rightarrow 0 \text{ за } y=0, z=-1$

гдје претпостављамо $y=0, z=-1$

$f(x,0,-1) - f(0,0,-1) = x^3$

нема знак



$\Rightarrow M_1$ није лок. екстремум



② nok eke. $f(x,y) = x^2 y^3 (6-x-y) = 6x^2 y^3 - x^3 y^3 - x^2 y^4$
 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ чи үзрү нэв. нэр... ✓ → сүүлч тавчхэ?

$$\nabla f = \vec{0}$$

$$\left. \begin{aligned} f'_x &= 12xy^3 - 3x^2y^3 - 2xy^4 = xy^3(12-3x-2y) = 0 \\ f'_y &= 18x^2y^2 - 3x^3y^2 - 4x^2y^3 = x^2y^2(18-3x-4y) = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= 0 \vee y = 0 \vee \begin{cases} 12 = 3x + 2y \\ 18 = 3x + 4y \end{cases} \\ \uparrow y=t \in \mathbb{R} \quad \uparrow x=t \in \mathbb{R} \end{aligned} \right\} (x,y) = (2,3)$$

сүүлч тавчхэ: $S(2,3)$, $M_t(0,t)$, $N_t(t,0)$
 $t \in \mathbb{R}$ $t \in \mathbb{R}$

$S(2,3)$ $f''_{xx} = 12y^3 - 6xy^3 - 2y^4$
 $f''_{xy} = 36xy^2 - 9x^2y^2 - 8xy^3$
 $f''_{yy} = 36x^2y - 6x^3y - 12x^2y^2$

$$d^2f(S) \stackrel{x=2, y=3}{=} \begin{bmatrix} -162 & -108 \\ -108 & -144 \end{bmatrix}$$

таблицы:

$$A_1 = -162 < 0$$

$$A_2 = 162 \cdot 144 - 108^2 > 0$$

сүүлч тавчхэ:

$S(2,3)$
 nok
 max

$M_t(0,t)$ $d^2f(M_t) = \begin{bmatrix} 12t^3 - 2t^4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$A_2 = 0, \forall t \Rightarrow$ сүүлч тавчхэ
 не гэж олох (sad face)

$N_t(t,0)$ $d^2f(N_t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

сүүлч тавчхэ - минута (sad face)

$$f(x,y) = x^2 y^3 (6-x-y)$$

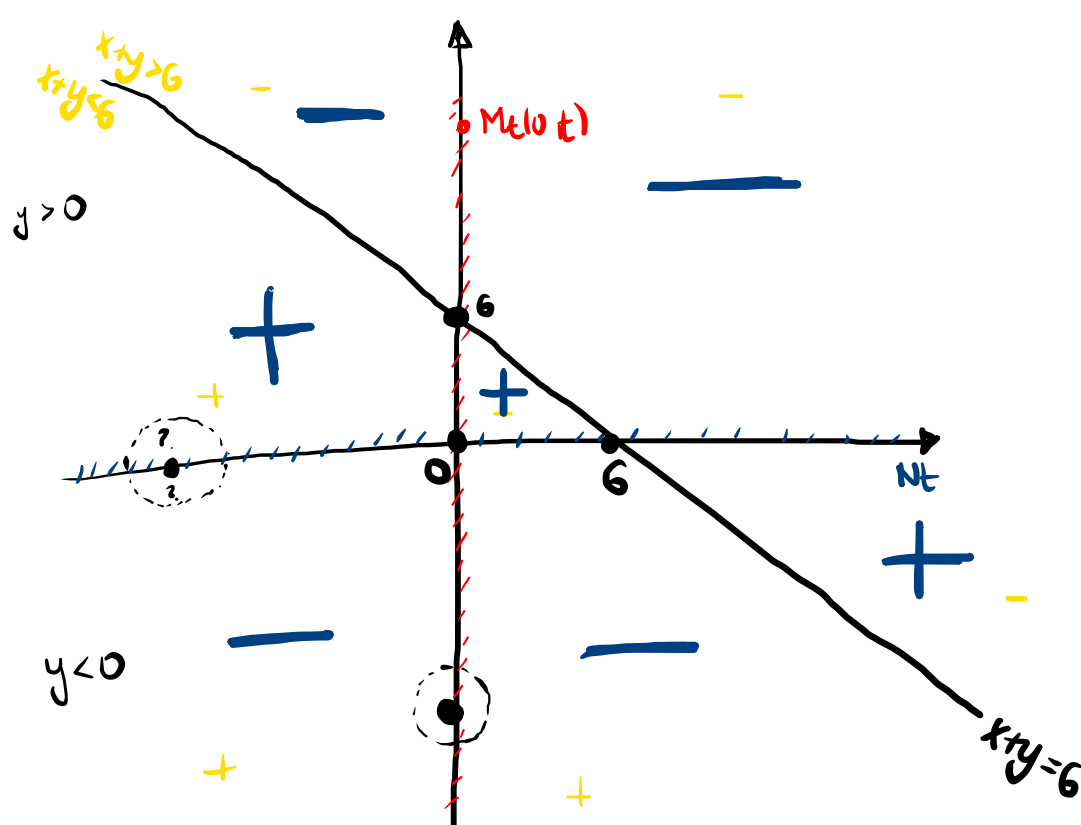
$$M_t(0,t) \quad f(M_t) = 0, \forall t$$

$$N_t(6,0) \quad f(N_t) = 0, \forall t$$

используем знак f
у точек M_t и N_t

знак f зависит от:

$$y \text{ и } \underline{6-x-y}$$



$$6-x-y$$

① N_t - не существует
окрестности y такой $f \geq 0$ или y такой $f \leq 0$ всегда
 $\Rightarrow N_t$ не является локальным экстремумом

② M_t

за $t < 0$ и $t > 6$ M_t локальный максимум

$t \in (0,6)$ M_t локальный минимум

$t=0$ и $t=6$ $M_0(0,0)$ и $M_6(0,6)$ - не являются локальными экстремумами. $\square$

~ условни екстремуми ~

$$f: D_f \rightarrow \mathbb{R}, D_f \subset \mathbb{R}^n$$

$$S \subset D_f \quad S = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \varphi_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, \varphi_k(x_1, \dots, x_n) = 0\} \quad \text{экстремуми } f|_S \quad \text{— УСЛОВНИ ЭКСТРЕМУМ}$$

ЛАГРАНЖОВИ МНОЖИОЦИ:

$$F(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1 \varphi_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + \lambda_k \varphi_k(x_1, \dots, x_n)$$

↑
лагранжева
ф-ја

необходни
услов
условног
екс:

$$\nabla F = \vec{0}$$

$$F'_{x_1}, \dots, F'_{x_n}, F'_{\lambda_1}, \dots, F'_{\lambda_k}$$



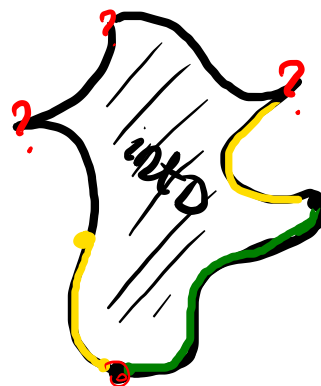
□ Вјерхуџарис

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ $D \subset \mathbb{R}^n$ D -компактан
 $\Rightarrow f$ достиже min и max на D

$\exists a_{\min}$ и $\exists a_{\max} \in D$

$\forall a \in D$

$$f(a_{\min}) \leq f(a) \leq f(a_{\max})$$

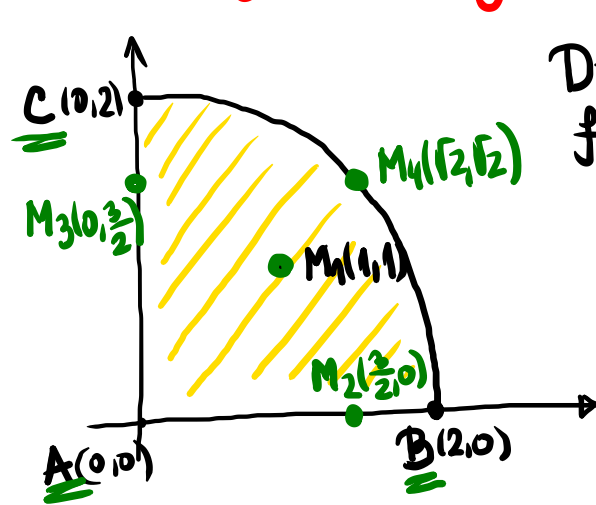


$\max f$ и $\min f$ на D ?

КАНДИДАТИ

- $\text{int } D \rightarrow$ унутрашност
- граница на ∂D
- "чворови" / нагнута тачка

① $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y$ на $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4\}$
Найти и суммы значений f на D ?



D — компакт $\Rightarrow$ f имеет мин и макс на D

Критерии:

- 1° найти $\text{int } D$
- 2° — ∂D
- 3° найти A, B, C

1° $\nabla f = (0,0)$

$$\begin{cases} f'_x = 2x + y - 3 = 0 \\ f'_y = x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (1,1)$$

найти $M_1(1,1)$

$f(M_1) = -3$



группа AC

$x=0, y \in (0,2)$

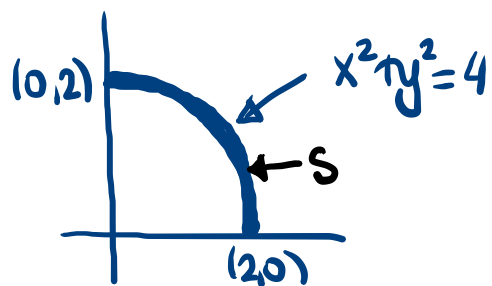
$f(0,y) = y^2 - 3y = g(y)$ $g'(y) = 0 \Rightarrow$ на $\overline{M_3(0, \frac{3}{2})} \in D$
 $f(M_3) = -\frac{9}{4}$

группа AB $y=0, x \in (0,2)$

$f(x,0) = x^2 - 3x = g(x)$
 $g'(x) = 2x - 3 = 0$?

$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \in (0,2)$

$\Rightarrow$ найти $M_2(\frac{3}{2}, 0) \in D$
 $f(M_2) = -\frac{9}{4}$



$$\rightarrow \varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 4$$

$$S = \{(x, y) \in D \mid \varphi(x, y) = 0\}$$

Лагранжева ф-ца: $F(x, y, \lambda) = \overbrace{x^2 + y^2}^{\varphi} + xy - 3x - 3y + \lambda \cdot (x^2 + y^2 - 4)$

$$\nabla F = \vec{0} \quad (?)$$

$$F'_x = 2x + y - 3 + 2\lambda x = 0 \quad (1)$$

$$F'_y = 2y + x - 3 + 2\lambda y = 0 \quad (2)$$

$$F'_\lambda = x^2 + y^2 - 4 = 0 \quad (3)$$

$$(1) - (2): \rightarrow x - y + 2\lambda x - 2\lambda y = 0$$

$$(x - y)(1 + 2\lambda) = 0$$

• ако $x = y$:

$$(3) \rightarrow 2x^2 = 4 \quad x = \pm \sqrt{2}$$

$$x \geq 0 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{2}} \\ \boxed{y = \sqrt{2}}$$

$$\boxed{M_4(\sqrt{2}, \sqrt{2})}$$

$$\underline{f(M_4) = 6 - 6\sqrt{2}}$$

• ако $\lambda = -1/2$

$$(1) \rightarrow x + y = 3 \rightarrow \underline{y = 3 - x}$$

$$y(3): x^2 + (3 - x)^2 = 4$$

$$2x^2 - 6x + 9 = 4$$

$$2x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$D_{\text{discr.}} = 36 - 4 \cdot 2 \cdot 5 < 0$$

$\Rightarrow$ няма решения

$$(3^\circ) \quad f(A) = f(0, 0) = 0$$

$$f(B) = f(2, 0) = 4 - 3 \cdot 2 = -2$$

$$f(C) = f(0, 2) = 4 - 3 \cdot 2 = -2$$

min и max съггугуи:

$$\{ \underline{-3}, -\frac{3}{4}, \underline{6 - 6\sqrt{2}}, \underline{0}, -2 \}$$

$$\boxed{f_{\max} = 0} \\ \boxed{f_{\min} = -3}$$

$$\boxed{f(D) = [-3, 0]}$$

Задача:

max и min? на $D = [0, 2] \times [0, 5]$

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 14y$$