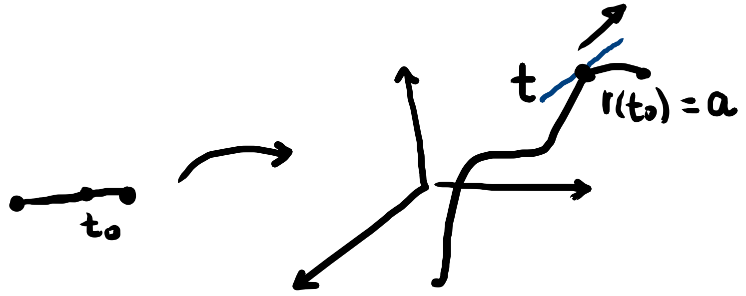
~ Тангентна раван ~

$r: I \to \mathbb{R}^3$ диференцијабилно $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$

интервал

r је КРИВА У ПРОСТОРУ



$t_0 \in I$ $\quad a = r(t_0)$ $\quad$ t је ТАНГЕНТА на r у a ако $t \ni a$ и

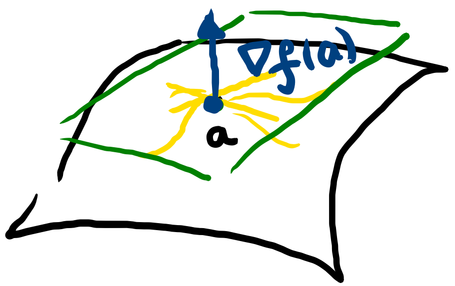
вектор правца t је: $r'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$

ако: $r'(t_0) \neq (0,0,0) = \vec{0}$ $\to$ r је регуларна у t_0

РЕГУЛАРНА ПОВРШ: $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = 0\}$ тд. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ регуларно на P

тј. $\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z)$ $\quad \nabla f(a) \neq \vec{0}$, $\forall a \in P$

P-рег. површ: $a \in P$



унија свих тангенти на све криве кроз a у P

= ТАНГЕНТНА РАВАН у a на P

њен вектор нормале = $\nabla f(a)$

раван: $ax+by+cz+d=0$
вектор нормале $=(a,b,c)$

$$\left.\begin{array}{l}\text{вектор нормале} = \vec{n}=(\alpha,\beta,\gamma)\\ 1 \text{ тачка} = (x_0,y_0,z_0)\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha(x-x_0)+\beta(y-y_0)+\gamma(z-z_0)=0$$

① Елипсоид: $\underbrace{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}$ Тан. раван? у (x_0,y_0,z_0)

$$f(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1 \qquad \mathcal{E}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=0\}$$

$$\nabla f=(f'_x,f'_y,f'_z)=\left(\frac{2x}{a^2},\frac{2y}{b^2},\frac{2z}{c^2}\right)$$

$$\nabla f(x_0,y_0,z_0)=\left(\frac{2x_0}{a^2},\frac{2y_0}{b^2},\frac{2z_0}{c^2}\right)$$

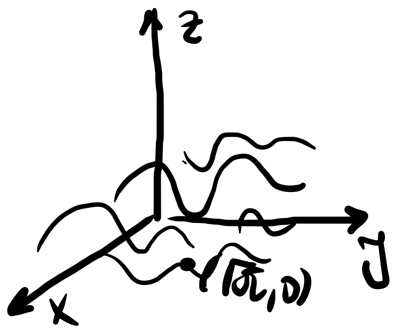
Тан. раван: $\frac{2x_0}{a^2}\cdot(x-x_0)+\frac{2y_0}{b^2}\cdot(y-y_0)+\frac{2z_0}{c^2}(z-z_0)=0 \quad /:2$

$$\Leftrightarrow \frac{x_0\cdot x}{a^2}+\frac{y_0\cdot y}{b^2}+\frac{z_0\cdot z}{c^2}=\underbrace{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}}_{=1 \text{ јер } (x_0,y_0,z_0)\in\mathcal{E}} \Rightarrow$$

тан. раван у (x_0,y_0,z_0)

$$\boxed{\frac{x_0 x}{a^2}+\frac{y_0 y}{b^2}+\frac{z_0 z}{c^2}=1}$$

② тангент. раван на површ: $z=\sin(x^2+y^2)$ у $(\sqrt{\pi},0)$



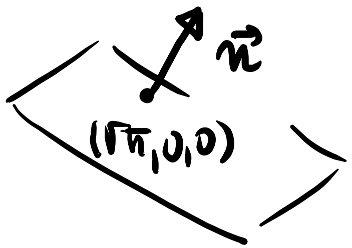
$$f(x,y,z)=\sin(x^2+y^2)-z \qquad \mathcal{P}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=0\}$$

$$z(\sqrt{\pi},0)=\sin\pi=0 \rightarrow \boxed{A(\sqrt{\pi},0,0)}$$

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= \cos(x^2+y^2)\cdot 2x \\ f'_y &= \cos(x^2+y^2)\cdot 2y \\ f'_z &= -1 \end{aligned}\right\} \quad \nabla f=(f'_x,f'_y,f'_z)$$

$$\nabla f(\sqrt{\pi},0,0)=(\underbrace{\cos\pi}_{-1}\cdot 2\sqrt{\pi},\ \cos\pi\cdot 2\cdot 0,\ -1)$$

$$\nabla f(\sqrt{\pi},0,0)=(-2\sqrt{\pi},0,-1)$$



тангент. раван:

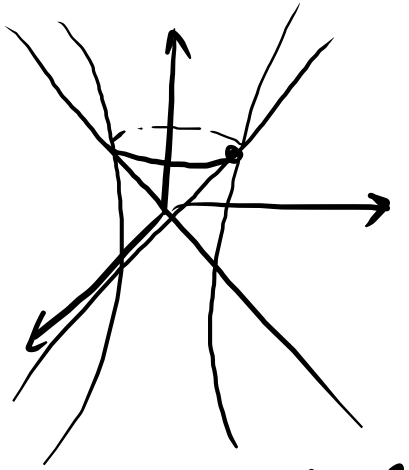
$$-2\sqrt{\pi}\cdot(x-\sqrt{\pi})+0\cdot(y-0)+(-1)\cdot(z-0)=0$$

$$-2\sqrt{\pi}x+2\pi-z=0$$

$$\boxed{2\sqrt{\pi}x+z=2\pi}$$

geogebra 3d

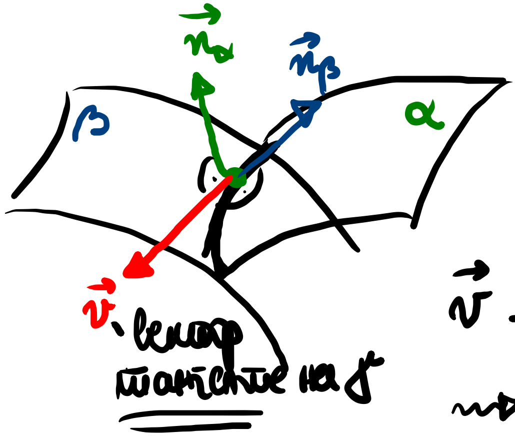
③ Нађи тангенту на криву у пресеку конуса: $x^2+y^2=z^2$ и хиперболоида: $x^2+y^2-\frac{3}{4}z^2=1$ у $A(\sqrt{2},\sqrt{2},2)$



где површи α,β

$\gamma=\alpha\cap\beta$

крива



$\vec{v}\perp\vec{n}_\alpha,\ \vec{v}\perp\vec{n}_\beta$

$\rightsquigarrow \vec{v}=\vec{n}_\alpha\times\vec{n}_\beta$

КОНУС: $\underbrace{x^2+y^2-z^2}_{f_1(x,y,z)}=0$

$\nabla f_1=(2x,2y,-2z)$

$\vec{n}_1=\nabla f_1(A)=\nabla f_1(\sqrt{2},\sqrt{2},2)$

$\boxed{\vec{n}_1=(2\sqrt{2},2\sqrt{2},-4)}$

ХИПЕРБОЛОИД:

$f_2(x,y,z)=x^2+y^2-\frac{3}{4}z^2-1=0$

$\nabla f_2=\left(2x,2y,-\frac{3}{2}z\right)$

$\vec{n}_2=\nabla f_2(A)=\nabla f_2(\sqrt{2},\sqrt{2},2)$

$\boxed{\vec{n}_2=(2\sqrt{2},2\sqrt{2},-3)}$

$$\vec{v}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & -4 \\ 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & -3 \end{vmatrix}=(2\sqrt{2},-2\sqrt{2},0)$$

$\boxed{\vec{v}=(2\sqrt{2},-2\sqrt{2},0)}$ - вектор правца тангенте $t\ni A$

$$\boxed{t:\ \frac{x-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{y-\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}}=\frac{z-2}{0}}$$

$\{x=\sqrt{2}+2\sqrt{2}\lambda,\ y=\sqrt{2}-2\sqrt{2}\lambda,\ z=2\}$

За вежбу

Наћи једначину тангенте на криву у пресеку $P_1 \cap P_2$

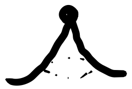
где је P_1: $x^2+y^2=z$ (параболоид)

$(x-1)^2+y^2+z^2=1$

у тачки $A(0,0,0)$.

~ Локални екстремуми ~

$f: D \to \mathbb{R}$ $D \subset \mathbb{R}^n$ $\tilde{a} \in D$ лок. екстремум:

лок. max  $\exists \varepsilon > 0 \ \forall a \in B(\tilde{a}, \varepsilon)$ $f(a) \leq f(\tilde{a})$

лок. min  $\exists \varepsilon > 0 \ \forall a \in B(\tilde{a}, \varepsilon)$ $f(a) \geq f(\tilde{a})$

$\boxed{T}$ f диф. у $\tilde{a}$
$\tilde{a}$ - унутрашња тачка D
$\tilde{a}$ - локални екстремум

$\Rightarrow \nabla f(\tilde{a}) = \vec{0} = (0, \dots, 0)$

КАНДИДАТИ: 1) нуле градијента $\tilde{a}$, $\nabla f(\tilde{a}) = \vec{0}$ ← стационарне/критичне тачке
2) тачке у којима је нарушена диференцијабилност

КВАДРАТНА ФОРМА:

$q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_j \cdot x_i$$

$\rightsquigarrow A = [a_{ij}]_{n \times n}$

- поз. полудеф.: $\forall x \ q(x) \geq 0$ $x = (x_1, \dots, x_n)$
- поз. деф.: $\forall x \neq 0 \ q(x) > 0$
- нег. полудеф. ≤ 0
- нег. деф. < 0
- променљивог знака: $\exists x, y \ q(x) > 0, q(y) < 0$

КВ. ФОРМА & ЕКСТРЕМУМИ

$\tilde{a}$ - стац. тачка $(\nabla f(\tilde{a}) = \vec{0})$

$(+)$ услови (предавање) $\rightarrow$ симетрична матрица :)

Хесијан

$$d^2 f(\tilde{a}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\tilde{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\tilde{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\tilde{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\tilde{a}) \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{n\times n} \rightsquigarrow \text{кв. форма } q(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_j x_i$$

теорема

$$\boxed{\begin{array}{l} q \text{ поз. деф.} \Rightarrow \tilde{a} \text{ лок. min} \\ q \text{ нег. деф.} \Rightarrow \tilde{a} \text{ лок. max} \\ q \text{ пром. знака} \Rightarrow \tilde{a} \text{ није лок. екстремум} \end{array}}$$

Силвестров критеријум: $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ сим.

$$A_1 = a_{11} \quad A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ - & - & - \\ - & - & - \end{vmatrix} \quad \dots \quad A_n = \det A$$

$A \rightsquigarrow q$

q поз. деф. $\Leftrightarrow A_1 > 0,\ A_2 > 0,\ \dots,\ A_n > 0$ $\rightsquigarrow$ min

q нег. деф. $\Leftrightarrow A_1 < 0,\ A_2 > 0,\ A_3 < 0,\ \dots,\ (-1)^n A_n > 0$ $\rightsquigarrow$ max

$\boxed{n=2}$ $f(x,y)$ $\tilde{a}$-стац. тачка

$$A = \begin{bmatrix} f''_{xx}(\tilde{a}) & f''_{xy}(\tilde{a}) \\ f''_{yx}(\tilde{a}) & f''_{yy}(\tilde{a}) \end{bmatrix} \qquad A_1 = f''_{xx}(\tilde{a}), \quad A_2 = \det A$$

ТВ 2.72.

- $A_2 > 0$ → $A_1 > 0$ → лок. min; $A_1 < 0$ → лок. max
- $A_2 < 0$ → $\tilde{a}$ није лок. екстремум

④ Лок. екстремуми: $f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$

f диф. на $\mathbb{R}^2$ → канд. су само стац. тачке: $\nabla f = \vec{0} = (\overset{f'_x}{0}, \overset{f'_y}{0})$?

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= 3y - 3x^2 = 0 \\ f'_y &= 3x - 3y^2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} y &= x^2 \\ x &= y^2 \end{aligned} \rightsquigarrow x = x^4 \quad x = 0,\ x = 1$$

$$\underset{y=0}{\downarrow} \qquad \underset{y=1}{\downarrow}$$

стац. тачке $\boxed{M_1(0,0)}$ $\boxed{M_2(1,1)}$

$$d^2 f = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6x & 3 \\ 3 & -6y \end{bmatrix}$$

- $d^2 f(M_1) = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ $A_2 = \det \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = -9 < 0$
  $\Rightarrow$ $\boxed{M_1 \text{ није лок. екстремум}}$

- $d^2 f(M_2) = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$ $\left.\begin{aligned} A_2 &= 36 - 9 > 0 \\ A_1 &= -6 < 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{M_2 \text{ је лок. max}}$

5. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2$

f диф. на $\mathbb{R}^2$ $\rightarrow$ стац. тачке

$\nabla f \overset{?}{=} 0$ $\quad$ $f'_x = 4x^3 - 4x = 0$, $f'_y = 4y^3 = 0$ $\quad \begin{cases} x^3 = x & x = 0, 1, -1 \\ y = 0 \end{cases}$

$\underbrace{M_1(0,0),\ M_2(1,0),\ M_3(-1,0)}_{\text{кандидати}}$ – стац. тачке

$f''_{xx} = 12x^2 - 4$, $f''_{xy} = 0$, $f''_{yy} = 12y^2$

$$d^2 f = \begin{bmatrix} 12x^2 - 4 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{bmatrix} \qquad A_2 = ?$$

$$A_2(M_i) = \begin{vmatrix} 12x^2 - 4 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{vmatrix} = \sqcup \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0$$

$i = 1, 2, 3$ $\quad$ $y = 0$

$A_2(M_i) = 0$ за све 3

$\Rightarrow$ Силвестер не даје одговор!

! прираштај у околини

$M_1(0,0)$: $\quad f(0+h, 0+k) - f(0,0) = h^4 + k^4 - 2h^2$ $\leftarrow$ знак

$= h^2 \cdot (h^2 - 2) + k^4$

за $h = 0$: $\; = k^4 \geq 0$ $\quad$ (дуж y-осе)

за $k = 0$: $\; = \underset{\neq 0}{h^2}(h^2 - 2) < 0$ за мало h $\quad$ (дуж x-осе)

$\Rightarrow$ $\boxed{M_1 \text{ није лок. екстремум}}$

$M_2(1,0)$: $f(1+h, 0+k) - f(1,0) = (1+h)^4 + k^4 - 2\cdot(1+h)^2 - (1^4 + 0^4 - 2\cdot 1)$

$= (1+h)^4 + k^4 - 2(1+h)^2 + 1$ знак?

$= \left((1+h)^2 - 1\right)^2 + k^4 \geq 0$ увек

$\Rightarrow \boxed{M_2(1,0) \text{ је лок. min}}$

$M_3(-1,0)$: за вежбу ... $\boxed{M_3 \text{ лок min}}$

☺ цртати све у geogebra 3d