

Граничне вредности функција

① $f(x,y) = x + y \cdot \sin \frac{1}{x}$

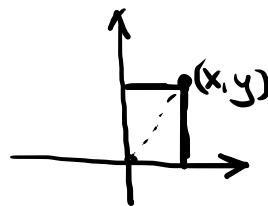
Докажи да $\exists \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x,y)$ и $\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$, али $\nexists \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x,y)$.

• $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} (x + y \cdot \sin \frac{1}{x}) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$

• $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x + y \cdot \sin \frac{1}{x})$

$0 \leq |x + y \cdot \sin \frac{1}{x}| \leq |x| + |y \cdot \sin \frac{1}{x}| \leq |x| + |y| \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$

$\underbrace{| \sin \frac{1}{x} | \leq 1}_{\text{abs} \leq 1}$



$\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$

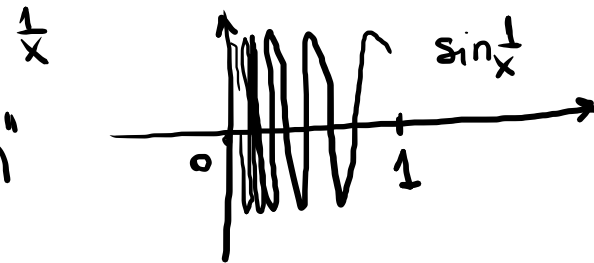
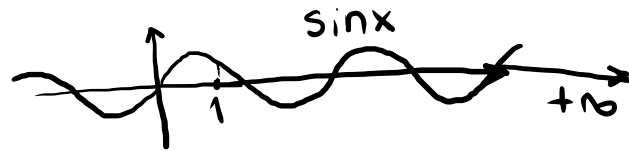
• $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} (x + y \cdot \sin \frac{1}{x})$

$\nexists$



$\sin \frac{1}{x}$

$x \in (0,1)$
 $\frac{1}{x} \in (1, +\infty)$



$$x_n = \frac{1}{n\pi} \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y) \cdot \sin \frac{1}{x_n} = 0 \quad \neq$$

$$x'_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x'_n + y) \cdot \sin \frac{1}{x'_n} = y$$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ не существует $\Rightarrow \nexists \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \quad \square$

② $\lim_{(x,y) \rightarrow (+\infty, +\infty)} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2} = L = ?$

$$0 \leq \left| \frac{x+y}{x^2-xy+y^2} \right| \leq \left| \frac{x+y}{xy} \right| \leq \frac{|x|+|y|}{|xy|} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

$(x,y) \rightarrow (+\infty, +\infty)$

$$\xRightarrow{2 \text{ погр.}} \boxed{L=0}$$

$$\begin{aligned} \otimes \quad x^2-xy+y^2 &\geq xy \\ \Leftrightarrow x^2+y^2-2xy &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (x-y)^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \textcircled{+} \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \quad L = \lim_{(x,y) \rightarrow (+\infty, +\infty)} (x^2 + y^2) \cdot e^{-(x+y)} = ?$$

$$x^k \ll e^x, \quad x \rightarrow +\infty, \quad k \in \mathbb{N}$$

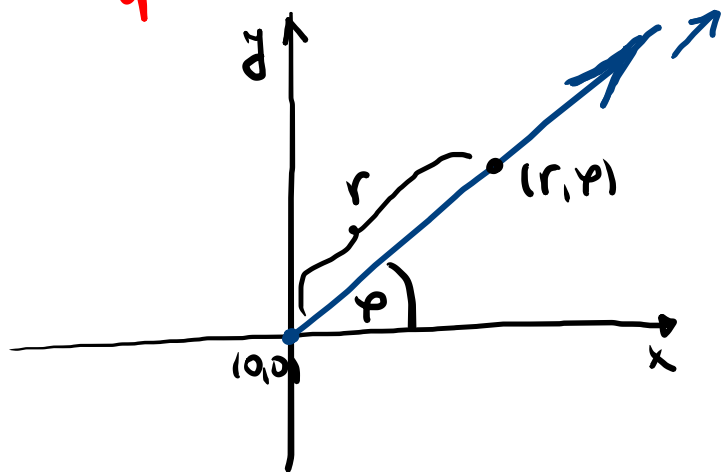
$$0 \leq \left| \frac{x^2 + y^2}{e^{x+y}} \right| = \frac{x^2 y^2}{e^{x+y}} = \frac{x^2}{e^x} \underbrace{(e^y)}_{\substack{> 1 \\ y > 0}} + \frac{y^2}{\underbrace{(e^x)}_{\substack{> 1 \\ x > 0}}} e^y < \underbrace{\frac{x^2}{e^x}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{y^2}{e^y}}_{\rightarrow 0}$$

$$\xrightarrow{(x,y) \rightarrow (+\infty, +\infty)} 0$$

$$\Rightarrow \boxed{L=0}$$

④ $f(x,y) = x^2 \cdot e^{-|x^2-y|}$

Исп. имеем две ф-е $\Rightarrow$ производные по x и y в (0,0), когда $r = \sqrt{x^2+y^2} \rightarrow +\infty$



ПОЛЯРНЫЕ КООРДИНАТЫ

$$x = r \cdot \cos \varphi \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

$$y = r \cdot \sin \varphi \quad r \geq 0$$

φ фиксировано, $r \rightarrow +\infty$

$$f(x,y) = \tilde{f}(r,\varphi) = f(r \cdot \cos \varphi, r \cdot \sin \varphi) = r^2 \cos^2 \varphi \cdot e^{-(r^2 \cos^2 \varphi - r \sin \varphi)}$$

$$\textcircled{*} = \frac{r^2 \cos^2 \varphi}{e^{r^2 \cos^2 \varphi - r \sin \varphi}} \quad r \rightarrow +\infty$$

1° $\cos^2 \varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} : \lim_{r \rightarrow +\infty} \textcircled{*} = 0$

2° $\cos^2 \varphi \neq 0 \Leftrightarrow \varphi \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \textcircled{*} = \cos^2 \varphi \cdot \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{r^2}{e^{r^2 \cos^2 \varphi - r \sin \varphi}} = 0$$

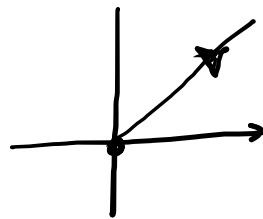
$\sim r^2 \cos^2 \varphi, r \rightarrow +\infty$

① $x^2 \ll a^x, a > 1$
 $x \rightarrow +\infty$

😊 Da mi znamo za yey fxy?

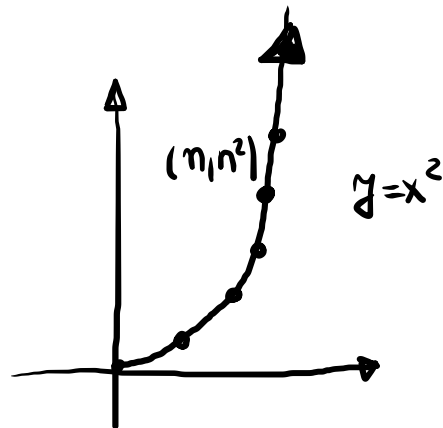
$$\text{Da mi } \lim_{(x,y) \rightarrow (+\infty, +\infty)} x^2 \cdot e^{-(x^2-y)} = 0 ?$$

HE

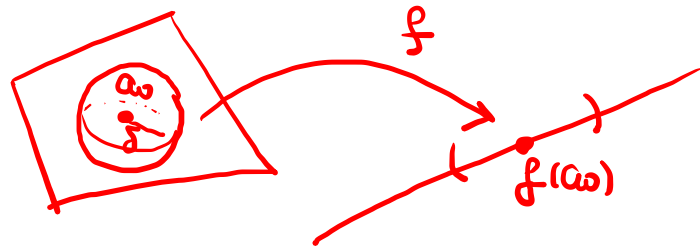


$$a_n = (n, n^2) \rightarrow (+\infty, +\infty)$$

$$f(n, n^2) = n^2 \cdot e^{-(n^2 - n^2)} = n^2 \cdot e^0 = n^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \neq 0$$



Непрерывность



$$f: D_f \rightarrow \mathbb{R} \quad D_f \subset \mathbb{R}^n \quad \underline{a_0 \in D_f}$$

$$f \text{ непр. в } a_0 \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall a \in D_f)$$

$$d(a, a_0) < \delta \Rightarrow |f(a) - f(a_0)| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \lim_{a \rightarrow a_0} f(a) = f(a_0)$$

$$f \text{ непр. на } A \subset D_f \Leftrightarrow f \text{ непр. в } \forall a_0 \in A$$

Хейне-Бореля теорема:

$$f \text{ непр. в } a_0 \in D_f \Leftrightarrow$$

за $\forall$ нз $(a_n) \subset D_f$ башка

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a_0)$$

① Проверить непрерывность

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^2y + y^3}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$(x,y) \neq (0,0) \rightarrow f \text{ непрерывна } (x,y) \checkmark$$

за $(x,y) = (0,0)$? $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) \stackrel{?}{=} f(0,0) = 0$

$$0 \leq \left| \frac{2x^2y + y^3}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{2|x^2y|}{x^2 + y^2} + \frac{|y^3|}{x^2 + y^2} = \underbrace{\frac{|2y| \cdot x^2}{x^2 + y^2}}_{\leq 1} + \underbrace{\frac{|y| \cdot y^2}{x^2 + y^2}}_{\leq 1} \leq 2|y| + |y| = 3|y|$$

$(x,y) \rightarrow (0,0)$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

$$\Rightarrow \boxed{f \text{ непрерывна в } (0,0)}$$

② $f(x,y) = \frac{x+y}{x^3+y^3}$ da li se f može diferencirati u $(0,0)$? Bude li f nepr. na $\mathbb{R}^2$?

Где је дефинисана? $D_f = ?$ $x^3+y^3 \neq 0$

$$(x+y)(x^2-xy+y^2) \neq 0$$

$$x \neq -y \wedge x^2-xy+y^2 \neq 0$$

$$y \neq 0: \text{ } x \neq -y$$

$$(x,y) \neq (0,0)$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} + 1 = 0$$

$$D < 0$$

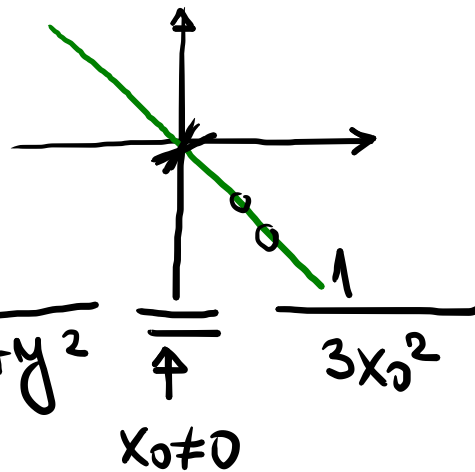
$$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,-x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$(x_0, -x_0), x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, -x_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, -x_0)} \frac{x+y}{x^3+y^3} \stackrel{L'H}{=} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, -x_0)} \frac{1}{x^2-xy+y^2} = \frac{1}{3x_0^2}$$

$$x_0 \neq 0$$

$$\Rightarrow \text{za } x_0 \neq 0 \text{ y } (x_0, -x_0) \text{ може се гласити: } \tilde{f}(x_0, -x_0) = \frac{1}{3x_0^2}$$



за $(0,0)$ $f(x,y) = \frac{x+y}{x^3+y^3}$

докажем, что $\nexists$ конечн. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$

$$a_n = (0, \frac{1}{n}) \rightarrow (0,0), n \rightarrow \infty$$

$$f(0, \frac{1}{n}) = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}} = n^2 \rightarrow +\infty, n \rightarrow \infty \Rightarrow \nexists \text{ конечн. } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$$

$\Rightarrow f$ не имеет г.д. в $(0,0)$.

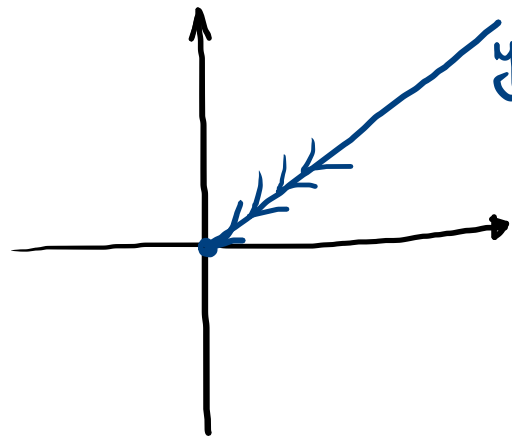
Замечание: f не г.д. на $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y}{x^3+y^3}, & x+y \neq 0 \\ \frac{1}{3x^2}, & (x,y) = (x_0, -x_0), x_0 \neq 0 \end{cases}$$

$\tilde{f}$ не пр. на $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ $\square$

$$\textcircled{3} \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Да ли је f непр. глн
+ непрек. са пр. у $(0,0)$,
или је непр. у $(0,0)$.



$y=kx$ препушта: k -присупство, $k \neq 0$?
 $g_k(x) = f(x, kx)$ $\lim_{x \rightarrow 0} g_k(x) \stackrel{?}{=} 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, kx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot kx}{x^4 + k^2 x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\underbrace{(kx)^2}_{\rightarrow k^2}}{x^2 + k^2} = 0 \quad \checkmark$$

преко са или пробу:
(глн ос)

x -оса: $y=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{f(x, 0)}_{=0} = 0 \quad \checkmark$$

y -оса: $x=0$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \underbrace{f(0, y)}_{=0} = 0 \quad \checkmark$$

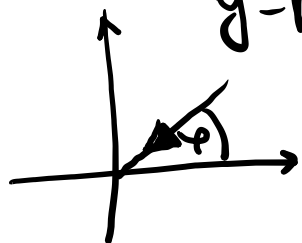
$\Rightarrow$ f непр. глн
+ непрек. са пр. у $(0,0)$

II начин: полярне координ.

$$x = r \cdot \cos \varphi$$

$$y = r \cdot \sin \varphi$$

φ - фазови агол



$$\lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \lim_{r \rightarrow 0}$$

$$= \lim_{r \rightarrow 0}$$

$$\frac{r^2 \cos^2 \varphi \cdot r \sin \varphi}{r^4 \cos^4 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi} \quad \text{L'Hôpital's rule}$$

$$\frac{r \cdot \cos^2 \varphi \cdot \sin \varphi}{r^2 \cos^4 \varphi + \sin^2 \varphi}$$

1° $\sin \varphi = 0$
2° $\sin \varphi \neq 0$
3a lemma 😊

• Зовн: f nije непрерывна у $(0,0)$:

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

$$(x,y) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0,0)$$

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) = \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = \frac{1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$$

Како $\Rightarrow f$ nije непрерывна у $(0,0)$ $\square$