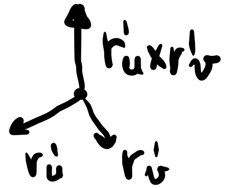
ПОДСЕЋАЊЕ: $\iint\limits_S F\cdot d\vec{S} = \iint\limits_D F(r(u,v))\cdot(r'_u\times r'_v)\,du\,dv$

где: $\boxed{r}\ D\to\mathbb{R}^3$ рег. парам.

$\boxed{S}$ оријентисана сагласно са r →



(*) ако је S график фје: $z=z(x,y)$

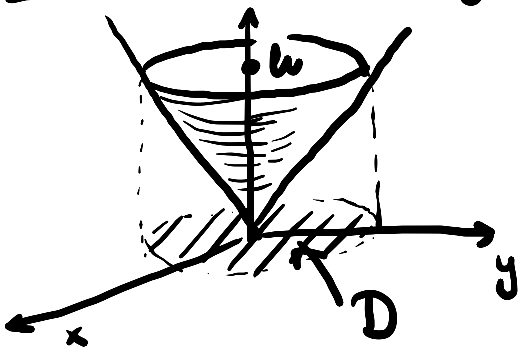
$$r(x,y)=(x,y,z(x,y))$$

$$r'_x=(1,0,z'_x),\quad r'_y=(0,1,z'_y)$$

$$r'_x\times r'_y=\begin{vmatrix}\cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot\end{vmatrix}=(-z'_x,-z'_y,1)$$

① $I=\iint\limits_S F\cdot d\vec{S}$ $\quad F(x,y,z)=(y-z,z-x,x-y)$ $\quad S$ - спољ. страна конуса $x^2+y^2=z^2,\ 0\le z\le h$

$\boxed{S}$: $0\le z\le h \quad z=\sqrt{x^2+y^2}$



S - график фје $z=z(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

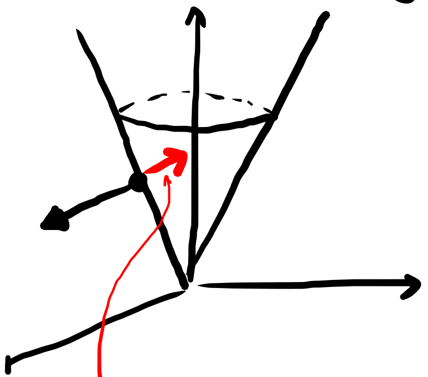
$(x,y)\in$ пројекцији: $x^2+y^2=z^2\le h^2 \to \boxed{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le h^2\}$

параметризација: $\boxed{r(x,y)}=(x,y,z(x,y)),\ (x,y)\in D$

$$\boxed{r'_x\times r'_y}\overset{(*)}{=}(-z'_x,-z'_y,1)$$

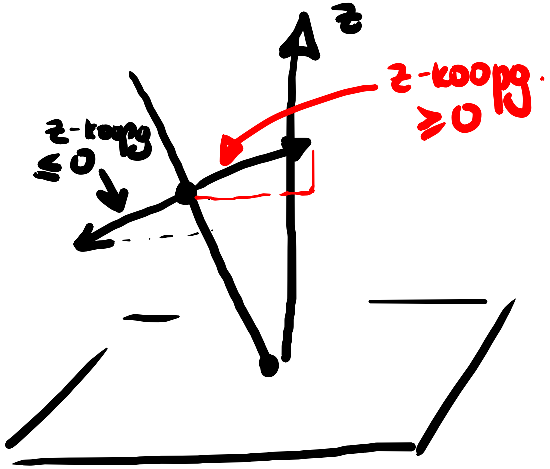
$$=\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},1\right)$$

$$r'_x \times r'_y = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ 1\right)$$



S - спољашња страна

$$r'_x \times r'_y = (\sqcup,\ \sqcup,\ \underbrace{1}_{\geq 0})$$



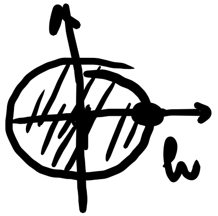
$r'_x \times r'_y$ - ка унутра ⇒ није сагласна оријентација!

$$F = (y - \overset{\sqrt{x^2+y^2}}{z},\ z - x,\ x - y)$$

$$\Rightarrow I = \iint_S F \cdot \vec{dS} = -\iint_D F(r(x,y)) \cdot (r'_x \times r'_y)\, dx\, dy$$

$$= -\iint_D \left(y - \sqrt{x^2+y^2},\ \sqrt{x^2+y^2} - x,\ x - y\right) \cdot \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ 1\right) dx\, dy$$

$$\overset{\dots}{=} -\iint_D 2(x-y)\, dx\, dy$$



$x = \rho\cos\theta$, $\quad \theta \in [-\pi, \pi]$

$y = \rho\sin\theta$, $\quad \rho \in [0, h]$

$J = \rho$

$$= -2 \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^h \rho(\cos\theta - \sin\theta) \cdot \rho\, d\rho\, d\theta$$

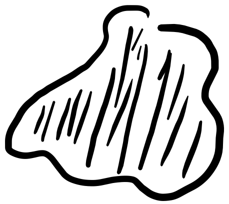
$$\overset{\dots}{=} \boxed{0}$$

□

ОПЕРАТОР ∇: $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$

$F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ в. поле $F = (P, Q, R)$

$$\boxed{\nabla \cdot F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (P, Q, R) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \boxed{P'_x + Q'_y + R'_z}$$



Грин

Гаус

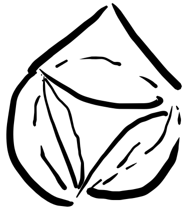
$\boxed{T}$ Формула Гауса и Остроградски

S - рег. повърх. $S = \partial T$ $T \subset \mathbb{R}^3$ компактно

F - непр. диф. в. поле на T, $F = (P, Q, R)$

$$\Rightarrow \iint\limits_{S} F \cdot d\vec{S} = \iiint\limits_{T} \nabla \cdot F \, dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{T} (P'_x + Q'_y + R'_z) \, dx\,dy\,dz$$

S, външ. страна S

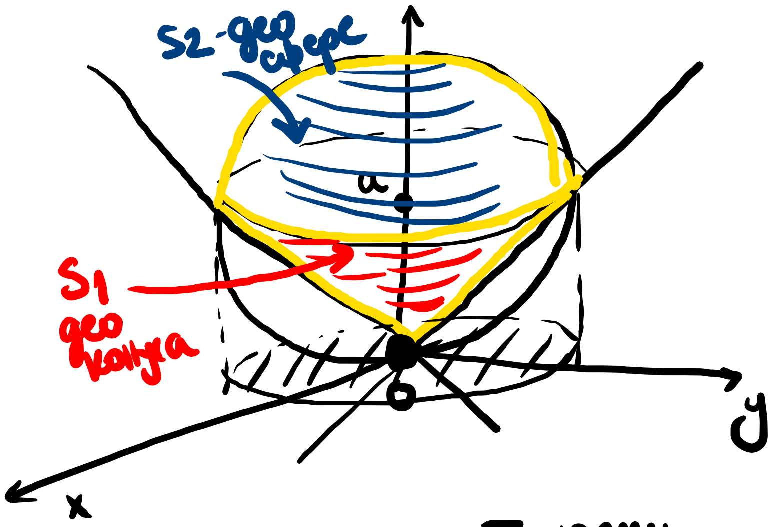


2. $I=\iint\limits_S F\cdot d\vec{S}$ S-спољ. страна границе тела $T: \begin{cases} x^2+y^2+z^2\le 2az \quad (a>0) \\ x^2+y^2\le z^2 \end{cases}$

$F(x,y,z)=(x+y,\ y+z,\ z+x)$

S: $x^2+y^2\le z^2$ - унутр. конуса

$x^2+y^2+z^2\le 2az \iff x^2+y^2+(z-a)^2\le a^2$ - унутр. сфере полупр. $=a$, центар: $(0,0,a)$



пресек: $\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=z^2 \\ x^2+y^2+(z-a)^2&=a^2 \end{aligned}\right\}$ $z^2+(z-a)^2=a^2$, $2z^2-2az=0$ $\begin{aligned}&\nearrow z=a \\ &\searrow z=0\end{aligned}$

$\Rightarrow$ пресек је круг на висини a: $\boxed{x^2+y^2=a^2}\ \boxed{z=a}$

пројекција $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le a^2\}$

I начин: $I=\iint\limits_S F\cdot d\vec{S}=\iint\limits_{S_1}F\cdot d\vec{S}+\iint\limits_{S_2}F\cdot d\vec{S}$

$=\iint\limits_D \dots + \iint\limits_D \dots$ ← поларне коор. има смисла ☺

Гаусова формула

$$F(x,y,z) = (\underbrace{x+y}_{P}, \underbrace{y+z}_{Q}, \underbrace{z+x}_{R})$$

$$I = \underset{\substack{S \\ \text{спол. н}}}{\iint} F \cdot d\vec{S} = \iiint_T \underbrace{(\underset{1}{\underset{\parallel}{P'_x}} + \underset{1}{\underset{\parallel}{Q'_y}} + \underset{1}{\underset{\parallel}{R'_z}})}_{3} \, dx\,dy\,dz$$

$$= 3 \iiint_T dx\,dy\,dz$$

$$= 3V(T)$$

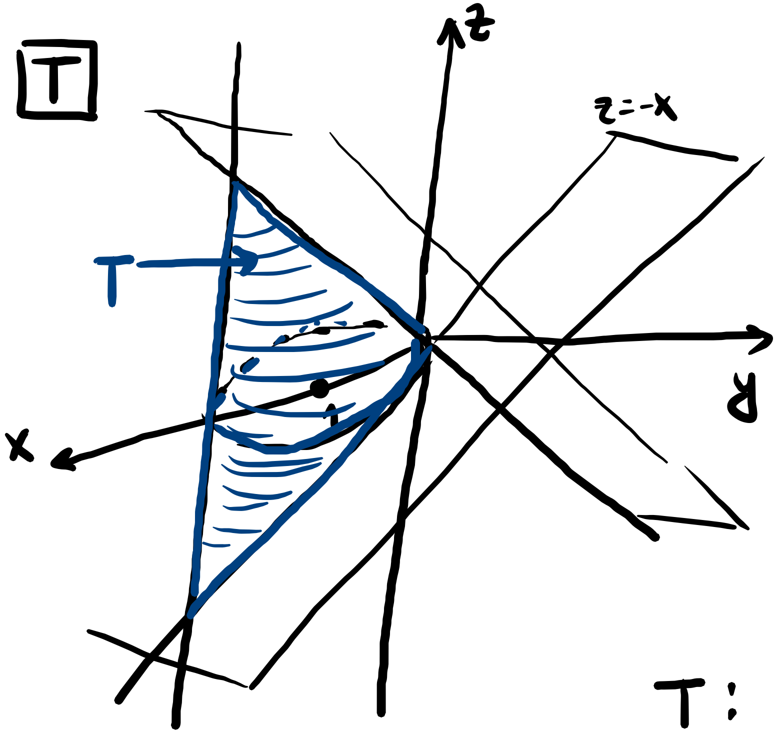
$$= 3 \cdot \left(V(\underset{\text{полупр.} = a}{\text{полулопте}}) + V(\text{купе}) \right)$$

$$= 3 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} a^3 \pi + \frac{1}{3} a \cdot a^2 \pi \right)$$

$$= \boxed{3a^3\pi} \quad \square$$

3. $I = \iint\limits_S F\cdot d\vec{S}$ $F = (5x+y^2-z^3,\ x-z^2,\ 2y-z)$

S - спољ. страна ∂T, $T = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \underbrace{(x-1)^2+y^2\le 1}_{\text{цилиндар}},\ -x\le z\le x\}$



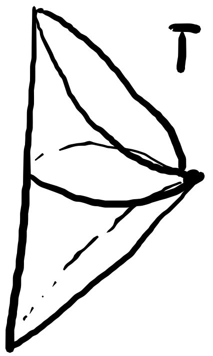
$z \le x$ - полупростор

$z \ge -x$

Гаус-О. формула:

$$I \overset{\downarrow}{=} \iiint\limits_T (\underbrace{P'_x}_{5} + \underbrace{Q'_y}_{0} + \underbrace{R'_z}_{-1})\,dxdydz = \iiint\limits_T 4\,dxdydz$$

$$= 4\iiint\limits_T dxdydz = 4\,V(T)$$ не знамо



$T:\ -x \le z \le x$ $(x,y) \in$ проj. T на xy-раван

$(x,y)\in D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+y^2\le 1\}$

$$\Rightarrow I = 4\iiint\limits_T dxdydz = 4\iint\limits_D \left(\int_{-x}^{x} dz\right)dxdy = 4\iint\limits_D 2x\,dxdy$$

$$\overset{\text{пол. коорд.}}{=} 4\int_0^1 \left(\int_{-\pi}^{\pi} 2\cdot(1+\rho\cos\theta)\cdot \rho\, d\theta\right)d\rho \overset{\dots}{=} \boxed{8\pi}$$ □

померене поларне

$x = 1+\rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta$ $J = \rho$

$\rho\in[0,1]$ $\theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

4. $I=\iint\limits_S F\cdot d\vec{S} = ?$ $\quad F(x,y,z)=(x-y+z,\ y-z+x,\ z-x+y)$

S - спољ. страна површи: $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$

$S=\partial T$: $T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid |x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|\le 1\}$ (*)

T - компактно (:))

$$I=\underset{\substack{S\\ \text{спољ. w}}}{\iint} F\cdot d\vec{S} \overset{\text{Гаус-О.}}{=} \iiint\limits_T (\underbrace{P'_x}_{\substack{\shortparallel\\1}}+\underbrace{Q'_y}_{\substack{\shortparallel\\1}}+\underbrace{R'_z}_{\substack{\shortparallel\\1}})\,dx\,dy\,dz = \boxed{3\iiint\limits_T dx\,dy\,dz}$$

Смена: $u=x-y+z$, $v=y-z+x$, $w=z-x+y$

Јакобијан? Прво x,y,z - преко u,v и w!

$\left.\begin{matrix} u=x-y+z\\ v=y-z+x\end{matrix}\right\}+ \quad u+v=2x \Rightarrow \boxed{x=\frac{u+v}{2}}$ слично: $\boxed{y=\frac{v+w}{2}}$ $\boxed{z=\frac{u+w}{2}}$

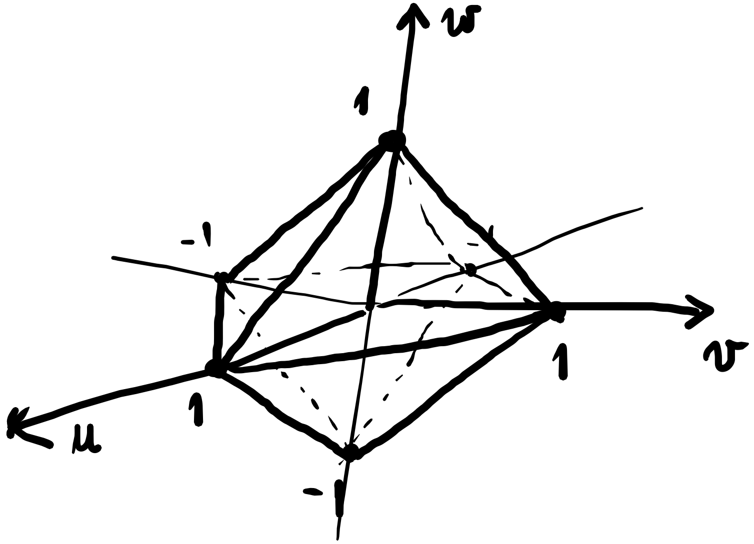
$$J=\det\begin{bmatrix} x'_u & x'_v & x'_w\\ y'_u & y'_v & y'_w\\ z'_u & z'_v & z'_w\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \frac12 & \frac12 & 0\\ 0 & 1/2 & 1/2\\ 1/2 & 0 & 1/2\end{bmatrix} \overset{..}{=} \boxed{\frac14}$$

$$I \overset{\text{смена}}{=} 3\iiint\limits_{\tilde{T}} \underbrace{|J|}_{=1/4}\,du\,dv\,dw \qquad \tilde{T}=\{(u,v,w)\in\mathbb{R}^3 \mid |u|+|v|+|w|\le 1\}$$

смена за (*)

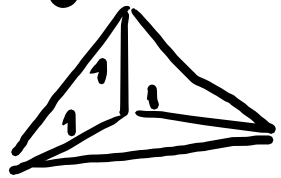
$$I = \frac{3}{4}\iiint\limits_{\tilde T} du\,dv\,dw = \frac{3}{4} V(\tilde T)$$

$$\tilde T : \quad |u|+|v|+|w| \le 1$$



I-окт: $u+v+w \le 1$

$$I = \frac{3}{4} V(\tilde T) = \frac{3}{4}\cdot 8 \cdot \underbrace{V(\text{део } \tilde T \text{ у I октанту})}_{\frac{1}{3}\cdot 1\cdot\frac{1\cdot 1}{2} = \frac{1}{6}}$$



$$I = \frac{3}{4}\cdot 8 \cdot \frac{1}{6} = \boxed{1}$$

$\square$

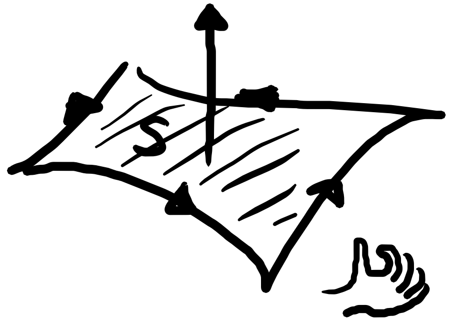
Стоксова формула

S - део-по-део глатка површ

$\gamma = \partial S$ део-по-део глатка крива

F - непр. диф. на S :

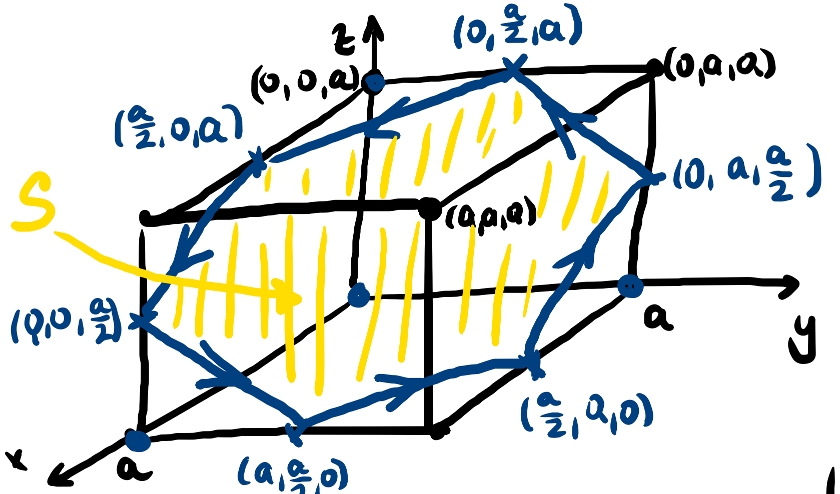
γ и S сагласно оријентисане



$$\oint_{\gamma} F\cdot dr = \iint_S \underbrace{(R'_y - Q'_z,\ P'_z - R'_x,\ Q'_x - P'_y)}_{\boxed{\nabla \times F}}\cdot d\vec{S}$$

$\boxed{5}$ $I = \oint_{\gamma} F\cdot dr \quad F(x,y,z) = (y,z,x) \quad \gamma :=$ пресек омотача коцке $0 \le x,y,z \le a$ и равни $x+y+z = \frac{3}{2}a \ (a>0)$

смер $\gamma :=$ супр. од смера каз. на сату ако гледамо из $(5a,5a,5a)$



коцка: $[0,a]\times[0,a]\times[0,a]$

раван: $x+y+z = \frac{3}{2}a \quad (1,1,1)$

γ - шестоугао

I начин: $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_6$

II начин: Стоксова формула

$\boxed{\gamma = \partial S}$ сагласна оријент. вектор нормале $\cancel{(-1,-1,-1)}$ $\boxed{(1,1,1)}$

$$I=\oint_{\gamma} F\cdot dr \overset{\text{стокс.}}{=} \iint_S (\nabla\times F)\cdot d\vec{S} = \iint_S (\underbrace{R'_y}_{0}-\underbrace{Q'_z}_{1},\ \underbrace{P'_z}_{0}-\underbrace{R'_x}_{1},\ \underbrace{Q'_x}_{0}-\underbrace{P'_y}_{1})\, d\vec{S}$$

$$F(x,y,z)=(\underbrace{y}_{P},\underbrace{z}_{Q},\underbrace{x}_{R})$$

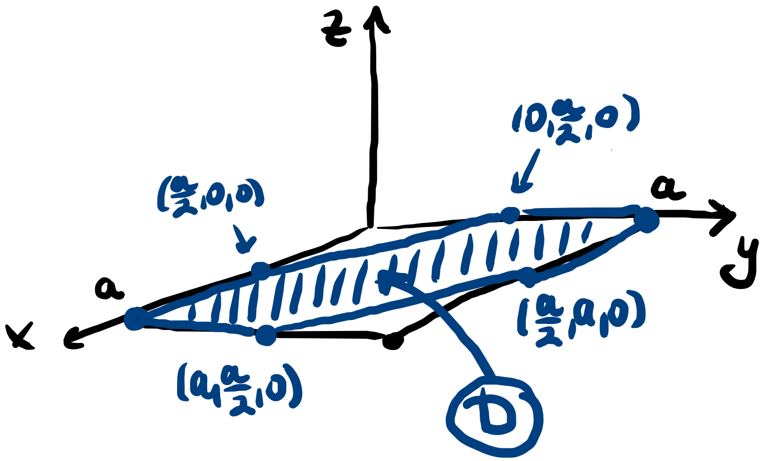
$$=\iint_S (-1,-1,-1)\cdot d\vec{S}$$

параметризација S: график: $\boxed{z(x,y)=\frac{3}{2}a-x-y}$

део равни $x+y+z=\frac{3}{2}a$

$(x,y)\in$ пројекција S на xy-раван

= шестоугао одређен пројекцијама темена



парам. S: $r: D\to\mathbb{R}^3$

$r(x,y)=(x,y,\frac{3}{2}a-x-y)$

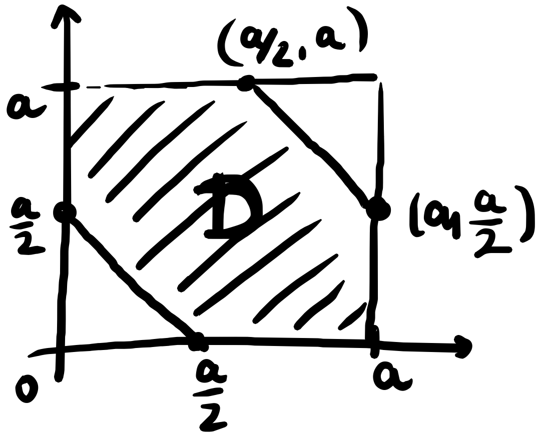
да ли: оријентација коју даје r = орј. S ?

$$\underbrace{}_{\text{в. нормале}} = r'_x\times r'_y \overset{\text{график}}{=} (-z'_x,-z'_y,1) = (1,1,1)$$

в.н. $=(1,1,1)$

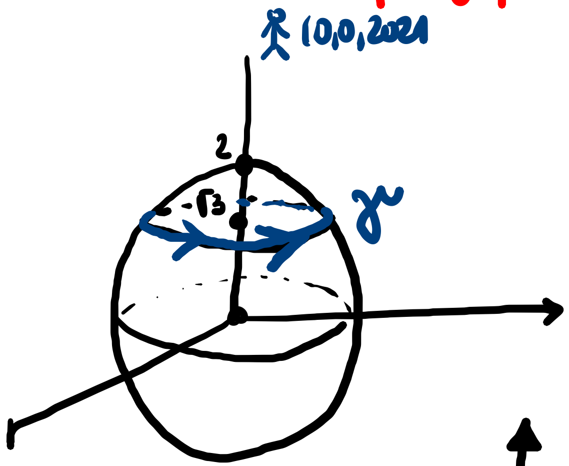
$$I=\iint_S(-1,-1,-1)\,d\vec{S} = \iint_D \overbrace{(-1,-1,-1)}^{F(r)}\cdot\overbrace{(1,1,1)}^{r'_x\times r'_y}\,dxdy = \iint_D(-3)\,dxdy = (-3)\cdot P(D)$$

$$I = (-3)\cdot P(D) = (-3)\cdot\Big(\underbrace{a^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}}_{\frac{3}{4}a^2}\Big) = \boxed{-\frac{9}{4}a^2}$$



$\boxed{6.}$ $I = \oint\limits_{\gamma} y\,dx + z^2 dy + x^2 dz \qquad \gamma$: кружница: $x^2+y^2+z^2=4,\ z=\sqrt{3}$

γ: смер супр. од смера каз. на сату кад се гледа из $(0,0,2021)$



$x^2+y^2+z^2=4$
сфера $r=2$

$\boxed{\text{I начин}}$

$x^2+y^2+z^2=4,\ z=\sqrt{3}$

$x^2+y^2=1$

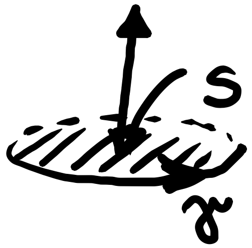
$r(t) = (\underbrace{\cos t}_{x}, \underbrace{\sin t}_{y}, \underbrace{\sqrt{3}}_{z}) \quad t\in[-\pi,\pi]$

$r'(t) = \dots$

орј. ... ✓

$I = \int_{-\pi}^{\pi} F(r(t))\cdot r'(t)\,dt = \dots$

$\boxed{\text{II начин}}$



$S: \partial S = \gamma$ орј $S \to$ в. нормале $=(0,0,1)$

$F(x,y,z) = (\underbrace{y}_{P}, \underbrace{z^2}_{Q}, \underbrace{x^2}_{R})$

$$I = \oint\limits_{\gamma} F\cdot dr \overset{\text{Стокс}}{=} \iint\limits_{S} (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y)\cdot d\vec{S} = \iint\limits_{S} (0-2z, 0-2x, 0-1)\,d\vec{S}$$

$$I = \iint\limits_{S} (-2z, -2x, -1)\,d\vec{S}$$

$$I = \iint_S (-2z, -2x, -1) \cdot d\vec{S}$$

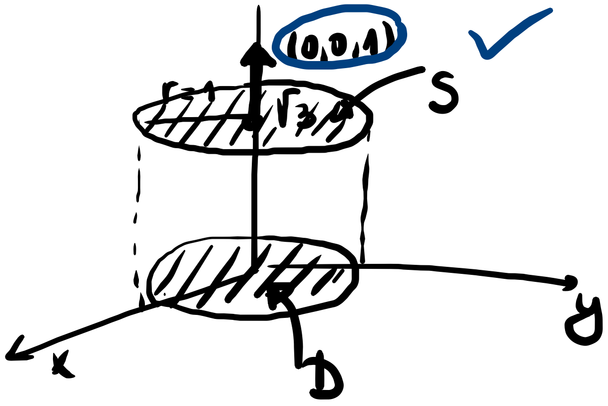
$D = \text{пр}oj(S)$ на xy $= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\}$

$\boxed{z}(x,y) = \sqrt{3}$

$\boxed{r(x,y)} = (x, y, \sqrt{3})$

$r'_x = (1,0,0) \qquad r'_y = (0,1,0)$

$r'_x \times r'_y = (-z'_x, -z'_y, 1) = (0,0,1)$ $\Rightarrow$ саглaсни r и S ✓



$$I = \iint_D \overbrace{(-2\cdot\sqrt{3}, -2x, -1)}^{\text{f(r)}} \cdot \overbrace{(0,0,1)}^{r'_x \times r'_y} \, dxdy$$

$$= \iint_D (-1)\, dxdy = -P(D) = -1^2\pi = \boxed{-\pi}$$

~ Диференцијалне једначине ~

Пр. ДЈ са раздвојеним променљивим:

$$y' = f(x)\cdot g(y)$$

$y = y(x)$ непозната фја

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(y) \quad \leftarrow /: g(y) \neq 0$$

! на крају проверити случај $\underline{g(y)=0}$

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \quad /\int$$

$$\underbrace{\int \frac{dy}{g(y)}}_{G(y)+c} = \underbrace{\int f(x)dx}_{F(x)+c}$$

општe решење: $\boxed{G(y) = F(x) + C} \rightarrow y(x) = \dots$

Реши ДЈ: $y' + 3x^2y - x^2y^2 = 0$ ⊛ $\to y(x) = \,?$

$\frac{dy}{dx} = y' = x^2y^2 - 3x^2y = x^2(y^2 - 3y)$

ДЈ са раздвојеним променљивим

$/ : (y^2-3y) \neq 0$!

$/ \cdot dx$

НА КРАЈУ СЛУЧАЈ $y^2 - 3y = 0$

$$\frac{dy}{y^2-3y} = x^2dx \quad / \int$$

$$\int \frac{dy}{y(y-3)} = \int x^2 dx$$

$$\int \frac{1}{3}\left(\frac{1}{y-3} - \frac{1}{y}\right)dy = \frac{x^3}{3} + C$$

$\int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + C$

$$\boxed{\frac{1}{3}\left(\ln|y-3| - \ln|y|\right) = \frac{x^3}{3} + C}$$

$y(x) = \ldots$

$$\frac{1}{3}\ln\left|\frac{y-3}{y}\right| = \frac{x^3}{3} + C$$

$$\ln\left|\frac{y-3}{y}\right|^{1/3} = \frac{x^3}{3} + C \quad / e^{\square} \Rightarrow \left|\frac{y-3}{y}\right|^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{x^3}{3}+C} \quad /^3 \Rightarrow \left|\frac{y-3}{y}\right| = e^{x^3+3C}$$

$$\left|\frac{y-3}{y}\right| = e^{x^3+3C} = e^{x^3}\cdot \underbrace{e^{3C}}_{C_1 \,\in(0,+\infty)}, \quad C\in\mathbb{R}$$

$$\boxed{\left|\frac{y-3}{y}\right| = C_1\cdot e^{x^3}, \; C_1>0} \quad (1)$$

1° $\frac{y-3}{y}>0$: $y\in(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$

(1): $\frac{y-3}{y} = C_1\cdot e^{x^3}$

$1-\frac{3}{y} = C_1\cdot e^{x^3}$

$\frac{3}{y} = 1-C_1\cdot e^{x^3}$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = \frac{3}{1-C_1\cdot e^{x^3}}} \quad C_1>0$$

2° $\frac{y-3}{y}<0$: $y\in(0,3)$

(1): $-\frac{y-3}{y} = C_1 e^{x^3}$

$\frac{3}{y}-1 = C_1\cdot e^{x^3} \; \cdots \Rightarrow \boxed{y(x) = \frac{3}{1+C_1\cdot e^{x^3}}} \quad C_1>0$

$\left[\frac{y-3}{y}\neq 0 \text{ јер } y^2-3y\neq 0\right]$

1° и 2° можемо обједините у:

$$\boxed{y(x) = \frac{3}{1+C_1 e^{x^3}}, \quad C_1\in\mathbb{R},\; C_1\neq 0}$$

Остаје још: $y^2-3y=0$ $\quad y(y-3)=0$

3° $\boxed{y=0}$ $(y'=0)$

$(*)$: $0+3x^2\cdot 0-x^2\cdot 0=0$ Т

$\Rightarrow \boxed{y=0}$ јесте решење

да ли је део општег решења за неко C_1?

$\frac{3}{1+C_1 e^{x^3}}=0$ не! $\Rightarrow$ није део о.р.

$\boxed{y=0}$ сингуларно решење

4° $\boxed{y=3}$: $(*)$: $\overset{y'}{0}+3x^2\cdot\overset{y}{3}-x^2\cdot\overset{y^2}{9}=0$ Т

$\Rightarrow \boxed{y=3}$ јесте решење

да ли је део општег? $\frac{3}{1+C_1 e^{x^3}}=3 \Leftarrow \boxed{C_1=0}$ ✓

Сва решења:

$$\boxed{y(x) = \frac{3}{1 + C \cdot e^{x^3}} \quad C \in \mathbb{R}}$$

$y(x) = 0$ - сингуларно решење

~ Диференцијалне једначине ~

ДЈ првог реда: $G(x, y, y') = 0$

$y = y(x)$ непозната фја

I ДЈ са раздвојеним променљивим

облик: $\boxed{y' = f(x) \cdot g(y)}$

решавамо: $y' = \frac{dy}{dx} = f(x) g(y)$

$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\, dx$ / $\int$ интегралимо

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\, dx$$

опште решење: $\boxed{G(y) = F(x) + C}$ ⊛

Уколико је могуће, сада треба изразити y преко x, али чак и ако то није могуће, ⊛ се сматра општим решењем.

! приликом дељења са $g(y)$ могли смо „изгубити" неко решење, па је битно проверити на крају и додати га.

II ЛИНЕАРНА ДЈ првог реда

облик: $\boxed{y' + P(x) \cdot y = Q(x)}$

опште решење: $y = e^{-\int P(x) dx} \left(c + \int Q(x) \cdot e^{\int P(x) dx} dx \right)$, $c \in \mathbb{R}$

($\int P(x) dx$ означава једну прим. фју фје $P(x)$,
$\int Q(x) dx$ – – || – – – || – – $Q(x)$)

III БЕРНУЛИЈЕВА ЈЕДНАЧИНА

облик: $\boxed{y' + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^{\alpha}}$ за $\alpha \in \mathbb{R}$

(за $\alpha = 0, 1$ заправо је линеарна, па обично претпостављамо $\alpha \notin \{0, 1\}$)

множимо са $y^{-\alpha}$: $y^{-\alpha} \cdot y' + P(x) \cdot y^{1-\alpha} = Q(x)$

смена $z(x) = y^{1-\alpha}(x)$: $z'(x) = (1-\alpha) y^{-\alpha} \cdot y'$

$\Rightarrow$ своди се на: $\frac{1}{1-\alpha} z' + P(x) \cdot z = Q(x)$ што је линеарна ДЈ, коју знамо да решимо

НАПОМЕНА: за $\alpha > 0$ код Бернулијеве д.ј. решење $y=0$ се „изгуби"
приликом смене $z(x) = y^{1-\alpha}(x)$
па га треба додати на крају!

IV ТОТАЛНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛ

облик: $M(x,y) + N(x,y) \cdot y' = 0$

тј. $M(x,y) + N(x,y) \dfrac{dy}{dx} = 0$ или $\boxed{M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0}$

Ако постоји функција $f(x,y)$ за коју важи:

$$\boxed{f'_x = M \quad f'_y = N}$$

онда је опште решење имплицитно задато са:

$$\boxed{f(x,y) = c}\ c \in \mathbb{R}$$

Неопходан услов ако је f непр. диференцијабилна:

$$f''_{xy} = f''_{yx} \quad \text{тј.} \quad M'_y = N'_x$$

V СМЕНА ПРОМЕНЉИВЕ

ту има много случајева и идеја :)

пример 1 ако је облика

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \rightarrow \text{смена } \boxed{z(x) = \frac{y}{x}}$$

пример 2 $y' = f(ax+by+c) \rightarrow$ смена $\boxed{z(x) = ax+by+c}$

1 Решити диференцијалну једначину:

$$\boxed{y'+3x^2y-x^2y^2=0} \quad \circledast$$

Запишимо ову једначину у погоднијем облику:

$$y'=-3x^2y+x^2y^2$$

$$\frac{dy}{dx}=x^2\cdot(y^2-3y)$$

← примећујемо да имамо једначину која раздваја променљиве.

$$\boxed{\frac{dy}{y^2-3y}=x^2dx} \qquad y\neq 0,3$$

$$\Rightarrow \int\frac{dy}{y^2-3y}=\int x^2dx$$

$$\underbrace{\int\frac{1}{3}\left(\frac{1}{y-3}-\frac{1}{y}\right)dy}=\frac{x^3}{3}+C \qquad C\text{-константа} \in \mathbb{R} \qquad \int\frac{1}{t}dt=\ln|t|$$

$$\frac{1}{3}(\ln|y-3|-\ln|y|)=\frac{x^3}{3}+C$$

$$\ln\sqrt[3]{\left|\frac{y-3}{y}\right|}=\frac{x^3}{3}+C \qquad \text{/ подигнемо на } e$$

$$\Rightarrow \left|\frac{y-3}{y}\right|^{1/3}=e^{\frac{x^3}{3}}\cdot e^{C} \Rightarrow \left|\frac{y-3}{y}\right|=e^{x^3}\cdot e^{3C}=C_1,\ \boxed{C_1>0}$$

Решавамо $\boxed{\left|\frac{y-3}{y}\right|=C_1\cdot e^{x^3}}$ (1)

Имамо случајеве $y\in(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$ или $y\in(0,3)$ за знак $\frac{y-3}{y}$:

1° $y\in(-\infty,0)\cup(3,+\infty) \rightarrow \frac{y-3}{y}>0$

(1) постаје: $\frac{y-3}{y}=C_1\cdot e^{x^3} \rightarrow 1-\frac{3}{y}=C_1\cdot e^{x^3} \rightarrow 1-C_1\cdot e^{x^3}=\frac{3}{y} \rightarrow \boxed{y=\frac{3}{1-C_1\cdot e^{x^3}}}\ \boxed{C_1>0}$

заиста проверавамо:

за $C_1\cdot e^{x^3}>1 \rightarrow y<0$, за $0<C_1\cdot e^{x^3}<1 \rightarrow y>3$ ✓

2° $y\in(0,3) \rightarrow \frac{y-3}{y}<0$

(1) постаје: $\frac{3-y}{y}=C_1\cdot e^{x^3} \rightarrow \frac{3}{y}-1=C_1\cdot e^{x^3} \rightarrow \boxed{y=\frac{3}{1+C_1\cdot e^{x^3}}}\ \boxed{C_1>0}$

заиста $y\in(0,3)$

1°: $y=\frac{3}{1-C_1\cdot e^{x^3}}$, $C_1>0$; 2°: $y=\frac{3}{1+C_1\cdot e^{x^3}}$, $C_1>0$

можемо објединити као: $\boxed{y=\frac{3}{1-C\cdot e^{x^3}},\ C\in\mathbb{R},\ C\neq 0}$

Остаје још да проверимо да ли смо „изгубили" неко решење при дељењу са $\underline{y^2-3y}$

тј. $y=0$ и $y=3$:

① $\underline{\underline{y=0}}$: ⊛ постаје: $0+3x^2\cdot 0-x^2\cdot 0=0$ ✓

Важи! => јесте решење.

Да ли је део општег за неку вредност c?

$\frac{3}{1-c\cdot e^{x^3}}=0$ X није => $\boxed{y=0}$ је сингуларно решење (решење које није део општег решења)

② $\underline{\underline{y=3}}$: ⊛ постаје: $0+3x^2\cdot 3-x^2\cdot 3^2=0$ ✓

Важи, па такође јесте решење.

Да ли је део општег за неко c?

$\frac{3}{1-c\cdot e^{x^3}}=3$ Да, за $\boxed{c=0}$! ← додајемо и $c=0$ за могуће константе

Дакле: решења су: $\boxed{y(x)=\frac{3}{1-c\cdot e^{x^3}}}$ и $\boxed{y=0}$ □

$c\in\mathbb{R}$ const

2. Одредити решење ДЈ: $\boxed{y'\cos x-2y\sin x=\cos x}$ које задовољава услов $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi+2}{4}$.

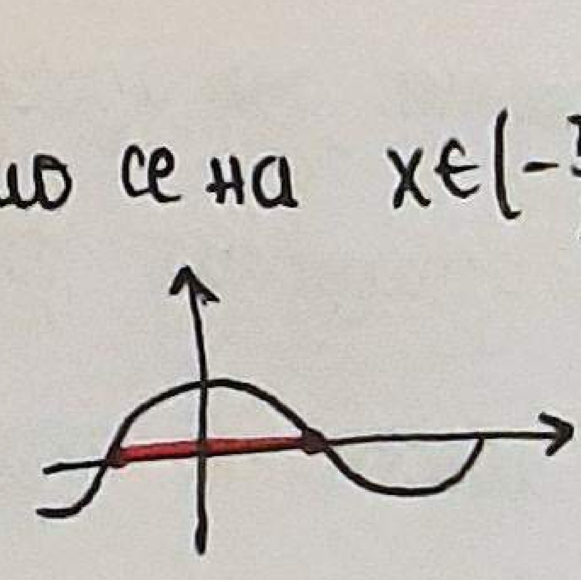
$y'\cdot\cos x-2y\sin x=\cos x \quad /:\cos x\,,\quad \cos x\neq 0$

$y'-2y\cdot tg x=1$ ← ово је линеарна ДЈ $\quad y'+P(x)\cdot y=Q(x)$

$\boxed{y'+(-2tg x)\cdot y=1}$ где је $\boxed{\begin{array}{l}P(x)=-2tg x\\ Q(x)=1\end{array}}$

Пошто је $\cos x\neq 0$, а желимо да имамо тачку $\frac{\pi}{4}$, ограничимо се на $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

Знамо формулу за опште решење:



$$y=e^{-\int P(x)dx}\cdot\left(c+\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}dx\right) \qquad (1)$$

$$\boxed{\int p(x)dx} = -2\int tg\,x\,dx = -2\int \frac{\overset{-dt}{\sin x\,dx}}{\underset{t}{\cos x}} = 2\cdot \ln|\cos x| + C$$

треба нам само једна прим. ф-ја $\rightarrow 2\cdot\ln|\cos x|$

за $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $\cos x > 0 \rightarrow \boxed{2\ln(\cos x)}$ узимамо за $\int p(x)dx$

$\Rightarrow$ (1) постаје:

$$y = e^{-2\ln\cos x}\cdot\left(C + \int 1\cdot e^{2\ln\cos x}dx\right)$$

$$= \frac{1}{(\cos x)^2}\cdot\left(C + \int \cos^2 x\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{(\cos x)^2}\cdot\left(C + \int \frac{1+\cos 2x}{2}dx\right)$$

$$= \frac{1}{(\cos x)^2}\cdot\left(C + \frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4}\right)$$

$\Rightarrow$ опште решење је $\boxed{y = \frac{1}{(\cos x)^2}\left(\frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4} + C\right)}$

оно које задовољава услов $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi+2}{4}$:

$$\frac{\pi+2}{4} = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{(\cos\frac{\pi}{4})^2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{4} + C\right)$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} + C\right) = 2\left(\frac{\pi+2}{8} + C\right) = \frac{\pi+2}{4} + 2C$$

$\Rightarrow \boxed{C=0}$

дакле тражено решење је:

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{(\cos x)^2}\cdot\left(\frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4}\right)}$$

3. Решити ДЈ: $\boxed{3xy' - 3xy^4\ln x - y = 0}$

Запишимо је мало другачије:

$$3x\cdot y' - y = 3xy^4\ln x \quad /:3x$$

$$y' - \frac{1}{3x}\cdot y = \ln x\cdot \underbrace{y^4}$$

ово је Бернулијева једначина за $\alpha=4$.

множимо са y^{-4}: $\quad y'\cdot y^{-4} - \frac{1}{3x}\cdot y^{-3} = \ln x \quad (1)$

смена $z(x) = y^{1-\alpha}(x) = y^{-3}(x)$

$$\boxed{z(x) = y^{-3}(x)}$$

$$z'(x) = (-3)\cdot y^{-4}(x)\cdot y'(x)$$

$\Rightarrow$ (1) постаје: $\quad -\frac{1}{3}z' - \frac{1}{3x}\cdot z = \ln x \quad /\cdot(-3)$

$$\boxed{z' + \frac{1}{x}\cdot z = -3\ln x}$$

линеарна ДЈ
$P(x) = \frac{1}{x},\ Q(x) = -3\ln x$

формула: $\quad z(x) = e^{-\int P(x)dx}\left(c + \int Q(x)\, e^{\int P(x)dx}dx\right)$

$$= e^{-\int \frac{1}{x}dx}\left(c + \int -3\ln x\cdot e^{\int\frac{1}{x}dx}dx\right)$$

На почетку смо могли видети област дефинисаности: због $\ln x \rightarrow \underline{x>0}$

$\Rightarrow \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C = \ln x + C$

узимамо једну: $\boxed{\ln x}$

$\Rightarrow z(x) = e^{-\ln x}\left(c + \int -3\ln x\cdot e^{\ln x}dx\right) = \frac{1}{x}\left(c - 3\int x\ln x\,dx\right)$

овај интеграл I решавамо пару. интеграцијом

$$I = \int x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\cdot\ln x - \int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2}\ln x - \int\frac{x}{2}dx = \boxed{\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}}$$

$\left(\begin{array}{l} u = \ln x \rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dv = x\,dx \rightarrow v = x^2/2 \end{array}\right)$

$\Rightarrow z(x) = \frac{1}{x}\left(c - \frac{3}{2}x^2\ln x + \frac{3}{4}x^2\right) \quad \xrightarrow[y = z^{-1/3}]{z = y^{-3}} \quad \boxed{y(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{c - \frac{3}{4}x^2(2\ln x - 1)}}} \quad c\in\mathbb{R}$

Не смемо заборавити (делили смо са y^4) решење $\boxed{y=0}$

Лако проверавамо да $y=0$ јесте решење полазне једначине: $0\cdot 3x - 3x\ln x\cdot 0 - 0 = 0$ ✓ $\square$

4 Решити ДЈ. $\boxed{y'=\frac{x-y^2\cos^2 x}{2xy\cos^2 x}}$ за $x\in(0,\frac{\pi}{2})$, $y>0$

$$y'=\frac{1}{2\cos^2 x}\cdot\frac{1}{y}-y\cdot\frac{1}{2x}$$

$$y'+\frac{1}{2x}\cdot y=\frac{1}{2\cos^2 x}\cdot y^{-1}$$

Бернулијева једначина за $\boxed{\alpha=-1}$

па множимо са y:

$$\Rightarrow\quad y'\cdot y+\frac{1}{2x}\cdot y^2=\frac{1}{2\cos^2 x}$$

смена: $z(x)=y^{1-\alpha}(x)=y^2(x)$ $\rightarrow$ $\underline{z'(x)=2y\cdot y'}$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{2}z'+\frac{1}{2x}\cdot z=\frac{1}{2\cos^2 x}\qquad /\cdot 2$$

$\boxed{z'+\frac{1}{x}\cdot z=\frac{1}{\cos^2 x}}$ Добили смо линеарну ДЈ. $z'+P(x)\cdot z=Q(x)$

$P(x)=\frac{1}{x}$ $\quad Q(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$

формула

$$\Rightarrow\quad z(x)=e^{-\int P(x)dx}\left(C+\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}dx\right)$$

$$=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left(C+\int\frac{1}{\cos^2 x}\cdot e^{\int\frac{1}{x}dx}dx\right)\qquad \int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$$

$$=e^{-\ln|x|}\left(C+\int\frac{1}{\cos^2 x}\cdot e^{\ln|x|}dx\right)$$

$$\underset{x\in(0,\frac{\pi}{2})\text{ па }|x|=x}{=}\ \frac{1}{e^{\ln x}}\left(C+\int\frac{x}{\cos^2 x}dx\right)$$

$$=\frac{1}{x}\left(C+\underbrace{\int\frac{x}{\cos^2 x}dx}\right)$$

како рачунамо ове интеграле?

парцијална интеграција:

$u=x\ \rightarrow\ du=dx$

$dv=\frac{dx}{\cos^2 x}\ \rightarrow\ v=\mathrm{tg}x$

$$\int\frac{x\,dx}{\cos^2 x}=x\cdot\mathrm{tg}x-\int\mathrm{tg}x\,dx=x\cdot\mathrm{tg}x+\underbrace{\int\frac{-\sin x\,dx}{\cos x}}_{\ln|\cos x|\ \underset{x\in(0,\frac{\pi}{2})}{=}\ \ln(\cos x)}=\underline{\underline{x\,\mathrm{tg}x+\ln(\cos x)}}$$

$$\Rightarrow\quad \underbrace{z(x)}_{y^2(x)}=\frac{1}{x}\left(C+x\,\mathrm{tg}x+\ln(\cos x)\right)$$

$$\overset{y>0}{\Longrightarrow}\quad \boxed{y(x)=\sqrt{\frac{1}{x}\left(C+x\,\mathrm{tg}x+\ln(\cos x)\right)}}\qquad\square$$

5. Решити ДЈ: $\boxed{x\cdot(y^2+1)\,dx + (x^2y+2y^3)\,dy=0}$

ово је једначина са тоталним диференцијалом:

$$M(x,y)=xy^2+x$$
$$N(x,y)=x^2y+2y^3$$

Са предавања имамо тврђење:

Ако су M, N, M'_y и N'_x непрекидне функције на просто повезаној области у $\mathbb{R}^2$ и ако важи $M'_y=N'_x$, тада постоји диференцијабилна фја $f(x,y)$ на тој области за коју важи:

$$f'_x(x,y)=M(x,y) \quad (1)$$
$$f'_y(x,y)=N(x,y). \quad (2)$$

→ тада наш је опште решење $f(x,y)=C,\ C\in\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{овде}}$

$$\left.\begin{array}{l} M \text{ и } N \text{ су непрекидне и диф. на } \mathbb{R}^2 \\ \left.\begin{array}{l} M'_y=2xy \\ N'_x=2xy \end{array}\right\rangle \text{ непр и } M'_y=N'_x \checkmark \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\exists \text{ тражено } f}$$

$\boxed{\text{Како одређујемо } f}$

$$f'_x \overset{(1)}{=} M(x,y)=xy^2+x \qquad \int dx$$

$$\underbrace{\int f'_x\,dx}_{\substack{\text{ово је}\\ f(x,y)+\underbrace{\varphi(y)}_{\text{зависи само од } y}}} = \int (xy^2+x)\,dx = y^2\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}+C$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x,y)=\frac{x^2}{2}(y^2+1)+\varphi_1(y)} \quad (3)$$

Сада рачунамо: $f'_y = x^2 y + \varphi_1'(y) \overset{(2)}{=} N(x,y) = x^2y+2y^3$

$$\Rightarrow \varphi_1'(y)=2y^3 \quad /\int dy$$

$$\varphi_1(y)=\frac{2}{4}y^4+C \qquad C\in\mathbb{R} \text{ const}$$

$$\boxed{\varphi_1(y)=\frac{y^4}{2}+C} \quad (4)$$

$$(3)(4) \Rightarrow f(x,y)=\frac{x^2}{2}(y^2+1)+\frac{y^4}{2}+C$$

знамо да је опште решење дато са $f(x,y)=C$ const

$\Rightarrow$ опште: $\frac{x^2}{2}(y^2+1)+\frac{y^4}{2}=C \quad /\cdot 2$ $(2C\in\mathbb{R})$ опште решење: $\boxed{x^2(y^2+1)+y^4=C}$ $C\in\mathbb{R}$ □

6 Решити ДЈ: $\boxed{\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2} + \left(\frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y}\right)\cdot y' = 0}$

Запишимо мало другачије: $y' = \frac{dy}{dx}$

$$\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2} + \left(\frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y}\right)\frac{dy}{dx} = 0 \quad /\cdot dx$$

$$\boxed{\underbrace{\left(\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}\right)}_{M(x,y)} dx + \underbrace{\left(\frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y}\right)}_{N(x,y)} dy = 0}$$

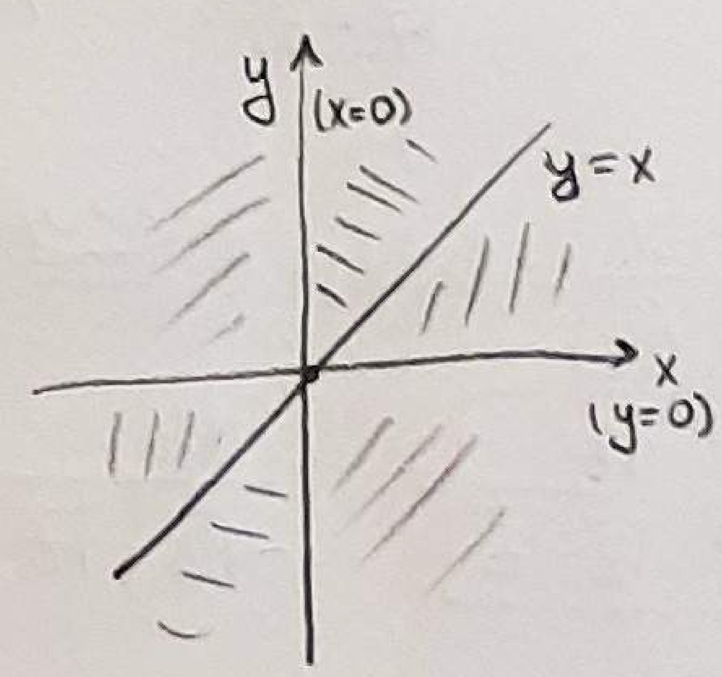
једначина са тоталним диференцијалом

$$M'_y = -\frac{2y(x-y)^2 - y^2\cdot 2(x-y)\cdot(-1)}{(x-y)^4} = -\frac{2(x-y)\cdot\left(y(x-y)+y^2\right)}{(x-y)^4} = -\frac{2(x-y)\cdot xy}{(x-y)^4} = -\frac{2xy}{(x-y)^3}$$

$$N'_x = \frac{2x(x-y)^2 - x^2\cdot 2(x-y)}{(x-y)^4} = 2\,\frac{x(x-y)-x^2}{(x-y)^3} = -\frac{2xy}{(x-y)^3}$$

$\boxed{M'_y = N'_x}$ ✓

$M'_y = N'_x$, M, N, M'_y, N'_x непрекидне на свакој од просто-повезаних области које чине $D_M \cap D_N$ $(x\neq 0, y\neq 0, x\neq y)$



тв5.
$\Rightarrow$ на свакој од ових области постоји ф-ја f за коју важи $\boxed{f'_x = M,\ f'_y = N}$

Одредимо f $\quad f'_x = M = \frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2} \quad /\int dx$

$$\int f'_x\,dx = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}\right)dx = \ln|x| + y^2\cdot\frac{1}{x-y} + \underbrace{\varphi(y)}_{\text{зависи само од } y}$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \ln|x| + \frac{y^2}{x-y} + \varphi(y) \qquad (1)$$

$$\Rightarrow f'_y = \frac{2y\cdot(x-y) - y^2\cdot(-1)}{(x-y)^2} + \varphi'(y) = \frac{2xy - y^2}{(x-y)^2} + \varphi'(y)$$

$\| \; N$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y} = \frac{2xy-y^2}{(x-y)^2} + \varphi'(y)$$

$$\Rightarrow \varphi'(y) = \frac{x^2+y^2-2xy}{(x-y)^2} - \frac{1}{y} = \frac{(x-y)^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y} = 1 - \frac{1}{y} \quad /\int dy$$

$$\Rightarrow \varphi(y) = \int\left(1-\frac{1}{y}\right)dy = y - \ln|y| + C$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \boxed{f(x,y)} = \ln|x| + \frac{y^2}{x-y} + y - \ln|y| + C = \ln\left|\frac{x}{y}\right| + \frac{y^2+y(x-y)}{x-y} + C = \boxed{\ln\left|\frac{x}{y}\right| + \frac{xy}{x-y} + C}$$

Опште решење: $f(x,y) = C$: $\boxed{\ln\left|\frac{x}{y}\right| + \frac{xy}{x-y} = C}$ □

7. Решити ДЈ: $\boxed{y' = \sqrt{\frac{y}{x}}}$, $x>0$ ⊛

Природно је увести смену $\boxed{z(x) = \frac{y(x)}{x}}$

$\Rightarrow z \cdot x = y$

$\Rightarrow \boxed{y' = z' \cdot x + z}$

⊛ се своди на: $z' \cdot x + z = \sqrt{z}$

$$\boxed{z' = (\sqrt{z} - z) \cdot \frac{1}{x}}$$ раздваја променљиве ☺

$$\frac{dz}{dx} = (\sqrt{z} - z) \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{dz}{\sqrt{z} - z} = \frac{dx}{x} \quad / \int$$

десно: $\boxed{\int \frac{dx}{x}} = \ln|x| + C \overset{x>0}{=\!=} \ln x + C$

лево: $\boxed{\int \frac{dz}{\sqrt{z} - z}} = \int \frac{dz}{-\sqrt{z}(\sqrt{z}-1)} \quad \left(\begin{array}{l} \text{смена } t = \sqrt{z} - 1 \\ dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{z}} dz \end{array} \right) = \int \frac{-2dt}{t} = -2\ln|t| + C$

$$= -2\ln|\sqrt{z} - 1| + C = \ln|\sqrt{z} - 1|^{-2} + C$$

$$= \ln \frac{1}{(\sqrt{z} - 1)^2} + C$$

лево = десно: $\ln \frac{1}{(\sqrt{z}-1)^2} = \ln x + C$ (довољно константа $C \in \mathbb{R}$ са једне стране)

степенујемо на e:

$$\frac{1}{(\sqrt{z}-1)^2} = x \cdot e^C = C_1 > 0$$

$$\frac{1}{(\sqrt{z}-1)^2} = C_1 \cdot x$$ – решавамо по z, па по y

$$\Rightarrow |\sqrt{z} - 1| = \frac{1}{\sqrt{C_1 \cdot x}}$$

$$\left|\sqrt{\frac{y}{x}} - 1\right| = \frac{1}{\sqrt{C_1 \cdot x}} \quad / \cdot \sqrt{x}$$ (пошто $x>0$, и $y>0$)

$$|\sqrt{y} - \sqrt{x}| = \frac{1}{\sqrt{C_1}} \Rightarrow \sqrt{y} = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{C_1}} \vee \sqrt{y} = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{C_1}}$$

$$y = (\sqrt{x} + C)^2 \vee y = (\sqrt{x} - C)^2, \text{ за } C > 0$$

Претходне две релације можемо приказати као једну:

$$\boxed{y=(\sqrt{x}-c)^2, \quad c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}} \quad (**)$$

Остаје још да проверимо да ли смо „изгубили" нека решења при дељењу са $\boxed{\sqrt{z}-z}$

$\sqrt{z}-z=0 \Leftrightarrow \sqrt{z}=z \Leftrightarrow z=0 \vee z=1$

$\frac{y}{x}=0 \vee \frac{y}{x}=1$

$y=0 \quad y=x$ ← кандидати

① $y=0$: $y'=0$ → важи $y'=\sqrt{\frac{y}{x}}$ $0=0$ ✓

⇒ $\boxed{y=0}$ јесте решење

није део општег $(0=(\sqrt{x}-c)^2$ ✗ $)$

тј. ово је сингуларно решење

② $y=x$: $y'=1$ $y'=\sqrt{\frac{y}{x}} \Leftrightarrow 1=\sqrt{\frac{x}{x}}$ ✓ јесте решење ✓

$(y(x)=x)$

Да ли је део општег?

$y=(\sqrt{x}-c)^2=x \Leftrightarrow \boxed{c=0}$ јесте, за $c=0$

⇒ можемо „додати" и вредност $c=0$ у $(**)$

⇒ Сва решења су дата са:

$$\boxed{y=(\sqrt{x}-c)^2, \ c\in\mathbb{R}} \quad \text{и} \quad \boxed{y=0}$$

□

$\boxed{\text{II НАЧИН}}$ $y'=\sqrt{\frac{y}{x}}$ напишемо као:

$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$ ← $x>0$ па и $y>0$

$\frac{dy}{\sqrt{y}}=\frac{dx}{\sqrt{x}} \quad /\int$

$2\sqrt{y}=2\sqrt{x}+C, \ C\in\mathbb{R}$ → $\sqrt{y}=\sqrt{x}+c_1$

→ $\boxed{y=(\sqrt{x}+c)^2, \ c\in\mathbb{R}}$ (и још $y=0$)

△