~ Криволинијски интеграли (наставак) ~

ПОДСЕТНИК: I врсте: $\int_\gamma f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f(r(t))\|r'(t)\|\,dt$

r - регуларна параметризација

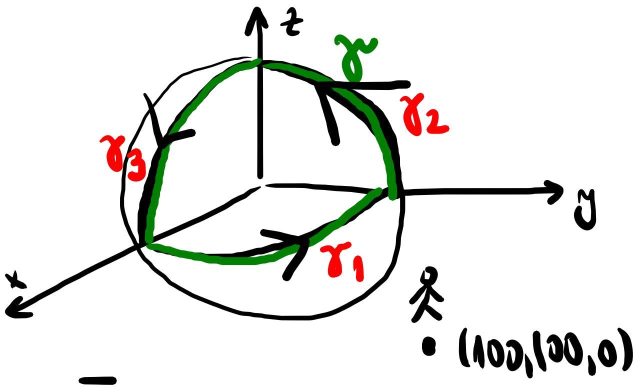
II врсте: $\int_\gamma F\cdot dr = \int_\gamma P\,dx+Q\,dy+R\,dz \qquad F=(P,Q,R)$

$= \int_a^b F(r(t))\cdot r'(t)\,dt$! оријентација

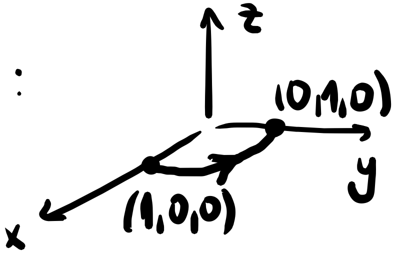
① $I=\oint_\gamma F\cdot dr \quad F(x,y,z)=(y^2-z^2,\, z^2-x^2,\, x^2-y^2)$

$\boxed{\gamma}$ = ор. део сфере $x^2+y^2+z^2=1$ у првом октанту

смер γ := супротно смеру каз. на сату када се гледа из $A(100,100,0)$



$I=\int_{\gamma_1} F\cdot dr+\int_{\gamma_2} F\cdot dr+\int_{\gamma_3} F\cdot dr$



$\boxed{\gamma_1}$:

$x=\cos t,\ y=\sin t \quad t\in[0,\frac{\pi}{2}] \quad z=0$

$r_1:[0,\frac{\pi}{2}]\to\mathbb{R}^3 \qquad r_1(t)=(\cos t,\sin t,0) \qquad r_1'(t)=(-\sin t,\cos t,0)$

орј ? $\quad r_1(0)=(1,0,0) \quad r_1(\frac{\pi}{2})=(0,1,0)$ оријентација је добра ✓

$$\int_{\gamma_1} F\cdot dr = \int_0^{\pi/2} \underbrace{F(r_1(t))}_{F(\cos t,\sin t,0)}\cdot r_1'(t)\,dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} (\sin^2 t-0,\ 0-\cos^2 t,\ \cos^2 t-\sin^2 t)\cdot(-\sin t,\cos t,0)\,dt \qquad \left[F(x,y,z)=(y^2-z^2,\ z^2-x^2,\ x^2-y^2)\right]$$

$$= \int_0^{\pi/2} (-\sin^3 t-\cos^3 t)\,dt = \int_0^{\pi/2} -\sin^2 t\,\sin t\,dt - \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,\underbrace{\cos t\,dt}_{du}$$

$u=\cos t \in[1,0]$

$\sin^2 t=(1-u^2)$

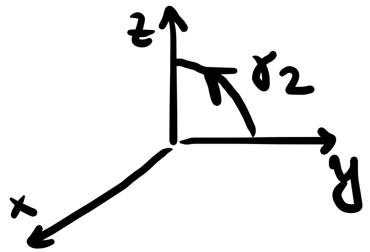
$du=-\sin t\,dt$

$u=\sin t$

$u\in[0,1]$

$$= \int_1^0 (1-u^2)\,du - \int_0^1 (1-u^2)\,du = 2\int_0^1 (1-u^2)\,du = \frac{-4}{3}$$

$\boxed{\gamma_2}$



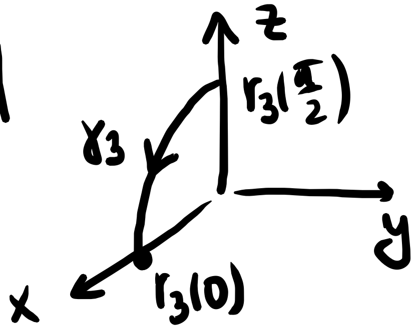
$x=0$
$y=\cos t$
$z=\sin t$

$r_2(t)=(0,\cos t,\sin t)\ ,\ t\in[0,\frac{\pi}{2}]$

парам. сагл. оријентацију ✓

$$\int_{\gamma_2} F\cdot dr = \int_0^{\pi/2} F(r_2(t))\cdot r_2'(t)\,dt \overset{\dots}{=} -\frac{4}{3}$$

$\boxed{\gamma_3}$



$y=0$
$x=\cos t$
$z=\sin t$
$t\in[0,\frac{\pi}{2}]$

$r_3(t)=(\cos t,0,\sin t)$

? орј. $\quad r_3(0)=(1,0,0)$
$\quad r_3(\frac{\pi}{2})=(0,0,1)$

! није сагласна орј !

$$\Rightarrow \int_{\gamma_3} F\cdot dr = -\int_0^{\pi/2} F(r_3(t))\cdot r_3'(t)\,dt$$

$$= \dots = -\frac{4}{3}$$

$$I=\int_{\gamma_1}+\int_{\gamma_2}+\int_{\gamma_3} = -\frac{4}{3}+-\frac{4}{3}+-\frac{4}{3} = -4 \quad \square$$

$\boxed{2.}$ C је пресек површи: $S_1: z=1-x^2$, $S_2: z=x^2+y^2$

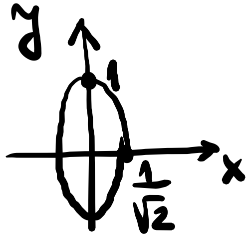
C - ориј. супр. од смера каз. на сату, ако се гледа из $(0,0,2021)$

$$I=\oint_C y\,dx+z\,dy+x\,dz \qquad (F(x,y,z)=(y,z,x))$$

$\boxed{C}$ $1-x^2=z=x^2+y^2$

$1=2x^2+y^2$

$\Leftrightarrow \; 1=\dfrac{x^2}{\left(\frac{1}{\sqrt2}\right)^2}+\dfrac{y^2}{1^2}$



$\Big[$ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

$x=a\cos t$ $\quad t\in[-\pi,\pi]$
$y=a\sin t$

$\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$

$x=x_0+a\cos t$
$y=y_0+b\sin t$ $\Big]$

$x=\frac{1}{\sqrt2}\cdot\cos t$, $y=\sin t$, $t\in[-\pi,\pi]$

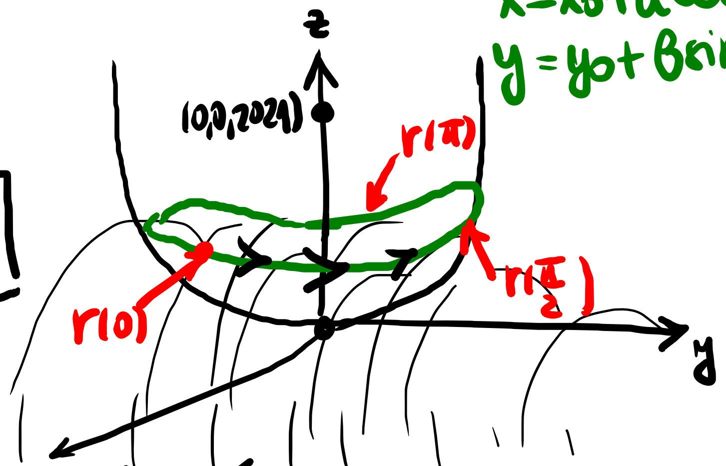
$z=1-x^2 \qquad z=1-\frac12\cos^2 t$

$$\boxed{r(t)=\left(\tfrac{1}{\sqrt2}\cos t,\sin t,1-\tfrac12\cos^2 t\right),\ t\in[-\pi,\pi]}$$

$r(0)=\left(\frac{1}{\sqrt2},0,\frac12\right)$

$r\left(\frac{\pi}{2}\right)=(0,1,1)$

$r(\pi)=\left(-\frac{1}{\sqrt2},0,\frac12\right)$



парам. сагл. ориј. ✓✓

$$r(t) = \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t,\ \sin t,\ 1-\tfrac{1}{2}\cos^2 t\right),\quad t\in[-\pi,\pi]$$

$$r'(t) = \left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin t,\ \cos t,\ \cos t\sin t\right)$$

$$F(x,y,z) = (y,z,x)$$

$$I = \oint_C F\cdot dr = \int_{-\pi}^{\pi} F(r(t))\cdot r'(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sin t,\ 1-\tfrac{1}{2}\cos^2 t,\ \tfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right)\cdot\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin t,\ \cos t,\ \cos t\sin t\right)dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin^2 t + \cos t - \tfrac{1}{2}\cos^3 t}_{\text{парне}} + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\underbrace{\cos^2 t\sin t}_{\text{непарне}}\,dt \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sqcup = 0$$

$$= 2\int_0^{\pi}\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin^2 t + \cos t - \tfrac{1}{2}\cos^3 t\right)dt$$

$$= \dots$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\pi \qquad \square$$

за вежбу: дужина криве γ од $A(0,0,0)$ до $B\left(\sqrt{\frac{\pi}{8}}, \sqrt{\frac{\pi}{8}}, \frac{\pi}{4}\right)$

$$\gamma: \begin{cases} z = x^2+y^2 \\ y = x \cdot \operatorname{tg} z \end{cases}$$

скица:

дужина криве: $\boxed{\ell(\gamma) = \int_\gamma ds}$

параметризација: $z = x^2+y^2$ $\leftarrow$ $x = h(t)\cdot\cos t$, $y = h(t)\cdot\sin t$, $h(t) = ?$ $\qquad \boxed{z = h(t)^2}$

$y = x\cdot\operatorname{tg} z$

$$\underbrace{h(t)\sin t}_{y} = \underbrace{h(t)\cos t}_{x}\cdot \operatorname{tg}(h(t))^2$$

$$\sin t = \cos t\cdot \operatorname{tg}(h(t))^2$$

$$\operatorname{tg} t = \operatorname{tg}(h(t))^2$$

узмимо:

$h(t)^2 = t$

$\boxed{h(t) = \sqrt{t}}$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \sqrt{t}\cdot\cos t \\ y &= \sqrt{t}\cdot\sin t \\ z &= t \end{aligned}} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

$r(t) = (\sqrt{t}\cdot\cos t, \sqrt{t}\cdot\sin t, t)$

$\ell(\gamma) = \int_\gamma ds = \int_0^{\pi/4} 1\cdot \|r'(t)\|\, dt = \ldots$

$$\ell(\gamma) = \int_\gamma ds = \int_0^{\pi/4} 1 \cdot \|r'(t)\|\, dt$$

$$\|r'(t)\| = \sqrt{\left(\frac{\cos t}{2\sqrt{t}} - \sqrt{t}\sin t\right)^2 + \left(\frac{\sin t}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t}\cos t\right)^2 + 1^2}$$

$$= \sqrt{\frac{\cos^2 t}{4t} - \cancel{\cos t \sin t} + t\sin^2 t + \frac{\sin^2 t}{4t} + \cancel{\sin t\cos t} + t\cos^2 t + 1}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4t} + t + 1}$$

$$\Rightarrow \quad \ell(\gamma) = \int_0^{\pi/4} \sqrt{\frac{1}{4t} + t + 1}\, dt = \int_0^{\pi/4} \sqrt{\frac{1+4t^2+4t}{4t}}\, dt$$

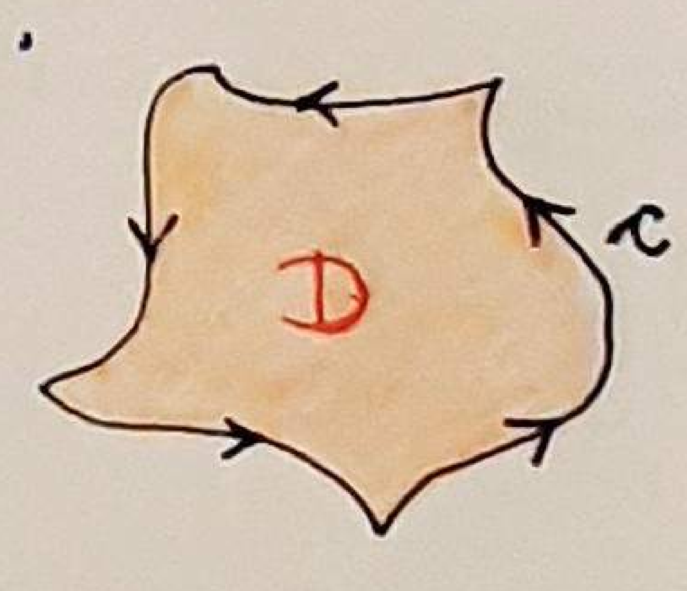
$$= \int_0^{\pi/4} \sqrt{\frac{(2t+1)^2}{4t}}\, dt \underset{2t+1>0}{=} \int_0^{\pi/4} \frac{2t+1}{2\sqrt{t}}\, dt = \int_0^{\pi/4} \left(\sqrt{t} + \frac{1}{2\sqrt{t}}\right) dt$$

$$= \left(\frac{2}{3} \cdot t^{3/2} + \sqrt{t}\right)\Big|_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{\pi^3}{4^3}} + \sqrt{\frac{\pi}{4}} \quad \square$$

Сада настављамо даље са теоријом.

Гринова формула $D \subset \mathbb{R}^2$ област таква да је њена граница $\partial D = c$ део-по-део глатка, затворена крива, позитивно оријентисана.



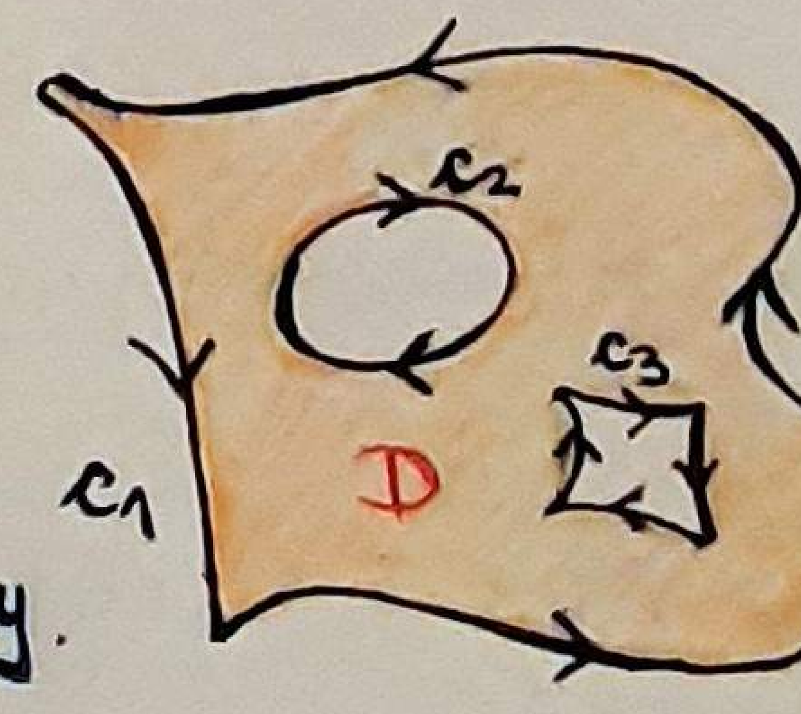
$F = (P, Q)$ векторско поље на $\bar{D}$ такво да су P, Q, P'_y и Q'_x непрекидне на $\bar{D}$.

Тада:

$$\oint_c P dx + Q dy = \iint_{\bar{D}} (Q'_x - P'_y)\, dx\, dy$$

* Гринова формула важи и када се граница D састоји од више кривих тада $\oint_c P dx + Q dy$ означава збир интеграла по тим кривама, $\left(\oint_{c_1} + \oint_{c_2} + \oint_{c_3}\right)$ при чему су све оријентисане тако да је D са леве стране кад се крећемо по свакој од њих

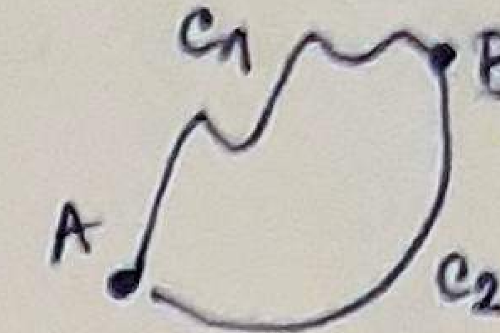
на слици:



$$\oint_{c_1} P dx + Q dy + \oint_{c_2} P dx + Q dy + \oint_{c_3} P dx + Q dy =$$

$$= \iint_{\bar{D}} (Q'_x - P'_y)\, dx\, dy.$$

НЕЗАВИСНОСТ ИНТЕГРАЛА ОД ПУТАЊЕ



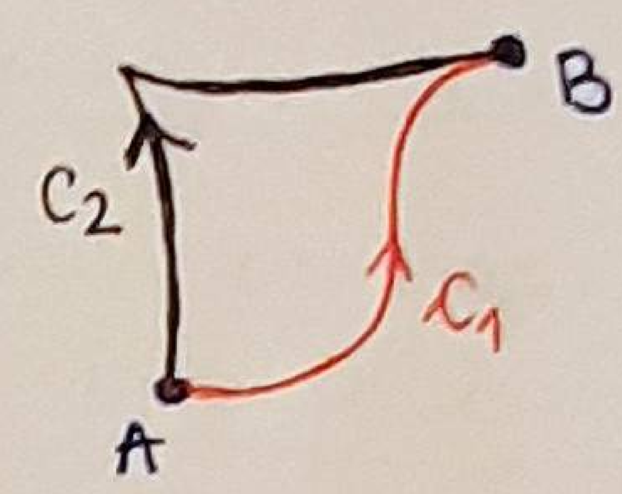
- Када интеграл зависи само од крајњих тачака криве?
- Кажемо: векторско поље **F је ГРАДИЈЕНТНО** (КОНЗЕРВАТИВНО) на области $D \subset \mathbb{R}^3$ ако постоји функција f тако да на D важи:

$$\underbrace{\nabla f}_{\text{градијент } f} = F$$

ТЕОРЕМА F-непрекидно векторско поље на области $D \subset \mathbb{R}^3$. Следећи услови су еквивалентни:

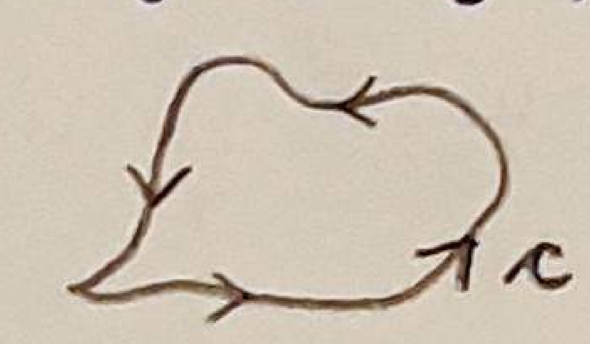
(1) за $\forall$ две тачке $A, B \in D$ и $\forall$ две део-по-део глатке криве $C_1, C_2 \subset D$ које спајају A са B важи:

$$\int_{C_1} F \cdot dr = \int_{C_2} F \cdot dr$$



(2) за $\forall$ затворену оријентисану, део-по-део глатку криву $C \subset D$ важи:

$$\oint_C F \cdot dr = 0$$



(3) F је градијентно на D.

Тада ако је f (било која) функција која задовољава $\nabla f = F$ на D, онда за $A, B \in D$ и било коју криву C која спаја **A** и **B** важи:

$$\int_C F \cdot dr = f(B) - f(A)$$

☺ ово је аналогон Њутн-Лајбницове формуле: $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$

* ова теорема важи и за $D \subset \mathbb{R}^2$ (аналогно)

* ДОДАТАК за $D \subset \mathbb{R}^2$ и додатне услове (са предавања):

Ако је $F = (P, Q)$ непр-диференцијабилно векторско поље и D-просто-повезана област $D \subset \mathbb{R}^2$

тада важи:

F је градијентно на D $\iff$ $Q'_x = P'_y$ на D.

Сада можемо прећи на задатке ☺.

1. Израчунати $I=\oint\limits_{\gamma} -x^2y\,dx+xy^2\,dy$ ако је γ позитивно орј. кружница $x^2+y^2=a^2$.

I начин: параметризација кружнице:

$\boxed{\begin{aligned}x&=a\cos t\\ y&=a\sin t\end{aligned}}$ $\quad \boxed{r(t)}=(a\cos t, a\sin t)\ \boxed{t\in[-\pi,\pi]}$ $\quad P(x,y)=-x^2y$

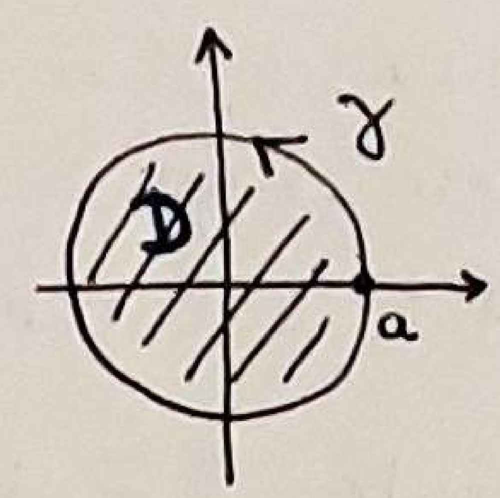
$r'(t)=(-a\sin t, a\cos t)$ $\quad Q(x,y)=xy^2$

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}(\underbrace{-a^2\cos^2t\cdot a\sin t}_{P},\ \underbrace{a\cos t\cdot a^2\sin^2 t}_{Q})\bullet(-a\sin t, a\cos t)\,dt$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}a^4\cos^2t\cdot\sin^2t+a^4\cos^2t\sin^2t\,dt=2a^4\cdot\int_{-\pi}^{\pi}(\underbrace{\cos t\sin t}_{\frac{1}{2}\sin 2t})^2\,dt$$

$$=\frac{2a^4}{4}\int_{-\pi}^{\pi}(\sin 2t)^2\,dt=\frac{2a^4}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 4t}{2}\,dt=\frac{2a^4}{4}\cdot\pi=\frac{a^4\pi}{2}$$

II начин: $\boxed{\text{Гринова формула}}$



γ ограничава област D

позитивно оријентисана ✓

$F=(P,Q)\quad P(x,y)=-x^2y\quad P'_y(x,y)=-x^2$

$\qquad\qquad Q(x,y)=xy^2\quad Q'_x(x,y)=y^2$

P, Q, P'_y и Q'_x су непрекидне на $\overline{D}$ ✓

$$\Rightarrow\int_{\gamma}-x^2y\,dx+xy^2\,dy\overset{\text{Грин}}{=}\iint_{\overline{D}}(Q'_x-P'_y)\,dx\,dy$$

$$=\iint_{\overline{D}}(y^2+x^2)\,dx\,dy$$

← – двоструки интеграл на кругу:

$x=r\cos\theta$ $\quad$ поларне

$y=r\sin\theta$ $\quad$ координате

$r\in[0,a]$

$\theta\in[-\pi,\pi)$ $\quad x^2+y^2=\underline{r^2}$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\int_0^a r^2\cdot \underset{\uparrow\ \text{Јакобијан}}{r}\,dr\Big)d\theta$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\int_0^a r^3\,dr\Big)d\theta$$

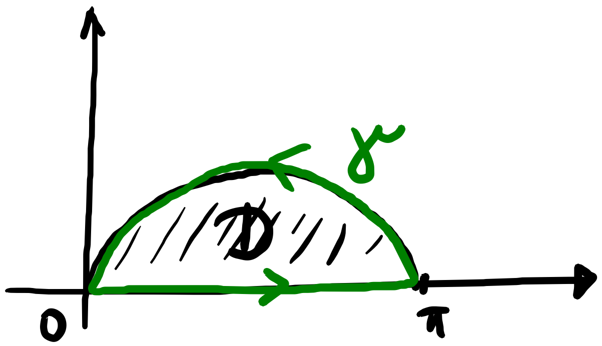
$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{r^4}{4}\Big|_0^a\,d\theta$$

$$=\frac{a^4}{4}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}d\theta=\frac{a^4\pi}{2}\quad\square$$

Овде смо могли и без Гринове формуле, али у следећим примерима ћемо видети колико је она значајна кад изводи Q'_x и P'_y доста поједноставе тражени интеграл.

② $I = \oint_{\gamma} F\cdot dr = ?$ γ - поз. ор. ∂D, $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<x<\pi,\ 0<y<\sin x\}$

$$F(x,y) = (\underbrace{4y + e^{\sin x+\cos x}}_{P(x,y)},\ \underbrace{2x-\sqrt{y^6+2}}_{Q(x,y)})$$



- D област, ... ✓
- P, Q, P'_y, Q'_x непр ✓

$P'_y = 4,\ Q'_x = 2$

$$I = \oint_{\gamma} F\cdot dr = \iint_{\bar{D}} (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy = \iint_{\bar{D}} (2-4)\,dx\,dy = (-2)\cdot\iint_{\bar{D}} dx\,dy$$

$$\overset{\text{фуб.}}{=} (-2)\cdot\int_0^{\pi}\int_0^{\sin x} dy\,dx = (-2)\int_0^{\pi}\sin x\,dx = (-2)\cdot(-\cos)\Big|_0^{\pi} = \boxed{(-4)}$$

③ $I = \int_{(0,1)}^{(3,-4)} x\,dx + y\,dy$

A(0,1)
B(3,-4)

$F(x,y) = (\underset{P}{x}, \underset{Q}{y})$

$P(x,y) = x$
$Q(x,y) = y$

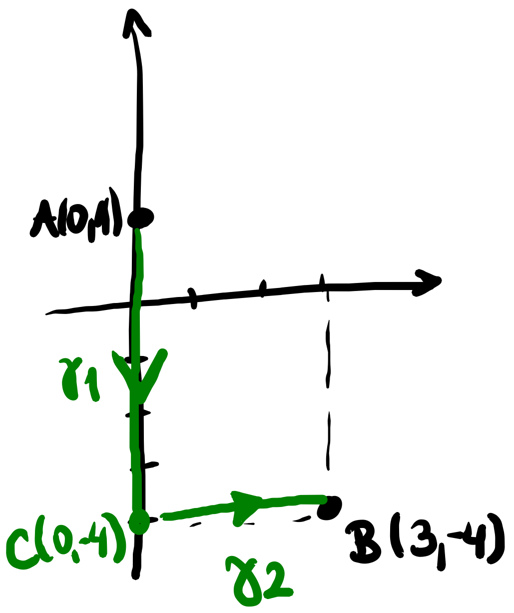
$\mathbb{R}^2$ - просто-пов. ✓
непр.-диф. ✓

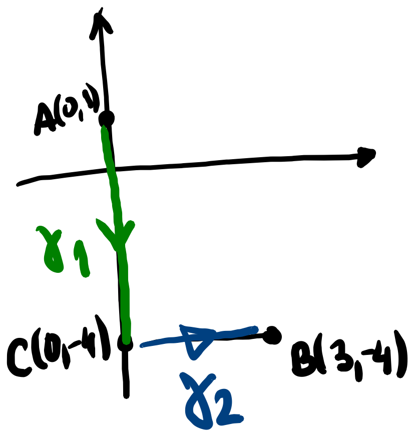
$\boxed{Q'_x \overset{?}{=} P'_y}$ $\quad 0 = 0$ ✓ тачно

$\Rightarrow$ F је градијентно в. поље на $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow \int_A^B F\,dr$ не зависи од пута

$$\Rightarrow \boxed{I = \underbrace{\int_{AC} x\,dx + y\,dy}_{I_1} + \underbrace{\int_{CB} x\,dx + y\,dy}_{I_2}}$$





$\boxed{\gamma_1}$ $x=0,\ y=t\in[-4,1]$

$r_1(t)=(0,t)$ није сагласна орј.!

$$\Rightarrow \int_{AC} x\,dx+y\,dy = -\int_{-4}^{1} F(r_1(t))\cdot r_1'(t)\,dt = -\int_{-4}^{1}(0,t)\cdot(0,1)\,dt$$

$$= -\int_{-4}^{1} t\,dt = \frac{15}{2}$$

$\boxed{\gamma_2}$ $x=t,\ y=-4 \quad r_2(t)=(t,-4) \quad r_2'(t)=(1,0)\ ,\ t\in[0,3]$

сагласна орј. ✓

$$\Rightarrow \int_{CB} x\,dx+y\,dy = \int_{0}^{3} F(r_2(t))\cdot r_2'(t)\,dt = \int_{0}^{3}(t,-4)\cdot(1,0)\,dt = \int_{0}^{3} t\,dt = \frac{9}{2}$$

$$I = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} \qquad \boxed{I = \frac{24}{2} = 12}$$

II начин:

$$I=\int_{(0,1)}^{(3,-4)} x\,dx+y\,dy \qquad F(x,y)=(x,y)$$

$$P(x,y)=x \quad Q(x,y)=y$$

F градијентно ✓ ⟹ можно наћи f тд. $\nabla f=F$

$$\nabla f=(f'_x, f'_y)=(P,Q)$$

$$Ⓣ \Rightarrow \int_A^B F\cdot dr=f(B)-f(A)$$

$\boxed{f=?}$ $F(x,y)=(x,y)$

$f'_x \nearrow x$, $f'_y \nwarrow y$

$f'_x=x \;/\int dx$

$\int f'_x\,dx=\int x\,dx=\frac{x^2}{2}$

$\Rightarrow f(x,y)=\frac{x^2}{2}+\underbrace{\varphi(y)}_{\text{зависи само од } y}$ (1)

$f'_y=y$

$f'_y=\varphi'(y)$

$\varphi'(y)=y \;/\int \Rightarrow \varphi(y)=\frac{y^2}{2}+C$ (2)

$(1),(2)\Rightarrow \boxed{f(x,y)=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+C}$

једна: $f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{2}$ $\quad \nabla f=F$

$$Ⓣ \quad I=f(B)-f(A)=f(3,-4)-f(0,1)=\frac{25}{2}-\frac{1}{2}=12 \checkmark$$

4. Израчунати: $I=\int_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2}$ дуж путање која не сече y-осу

$A(2,1)$, $B(1,2)$

$F(x,y) = \left(\underbrace{\frac{y}{x^2}}_{P(x,y)}, \underbrace{-\frac{1}{x}}_{Q(x,y)}\right)$

(услов да не сече y-осу је да би било дефинисано дељење са x.)

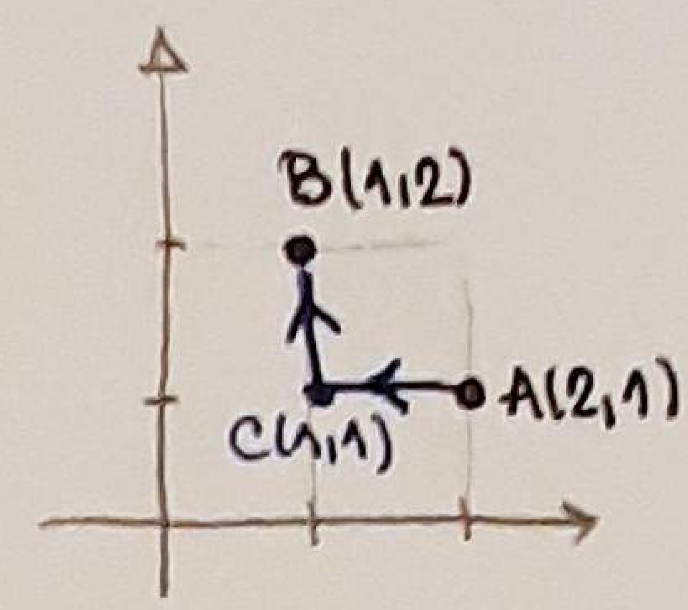
I НАЧИН: (као I начин у претходном.)

приметимо да $P'_y = \frac{1}{x^2} = Q'_x$

$\Rightarrow$ F градијентно

$\Rightarrow$ интеграл не зависи од криве

$\Rightarrow$ изаберимо паралелно осама



$I = \int_{AC} + \int_{CB}$ параметризујемо AC и CB и добијамо ... - завршити за вежбу :)

II НАЧИН: (као II начин у претходном)

тражимо ф-ју $f(x,y)$ тако да $\nabla f = (f'_x, f'_y) = F(x,y)$

$f'_x(x,y) = \frac{y}{x^2}$ (1)

$f'_y(x,y) = -\frac{1}{x}$ $/ \int dy$

$\underbrace{\int f'_y\,dy}_{f} = -\int \frac{1}{x}\,dy = -\frac{y}{x} + \underset{\text{од } y}{C}$ $\Rightarrow$ $f(x,y) = -\frac{y}{x} + \varphi(x)$

$\Rightarrow$ $f'_x(x,y) = \frac{y}{x^2} + \varphi'(x)$

из (1) $\Rightarrow$ $\varphi'(x) = 0$

$\Rightarrow$ $\varphi(x) = C$

$\Rightarrow$ $f(x,y) = -\frac{y}{x} + C$

узмимо $\boxed{f(x,y) = -\frac{y}{x}}$

теорема каже: пошто је $F = \nabla f$ градијентно

$\Rightarrow \int_A^B F \cdot dr = f(B) - f(A)$

$I = f(1,2) - f(2,1) = -\frac{2}{1} - \left(-\frac{1}{2}\right) = -2 + \frac{1}{2} = -3/2$

$\boxed{I = -3/2}$ ∎