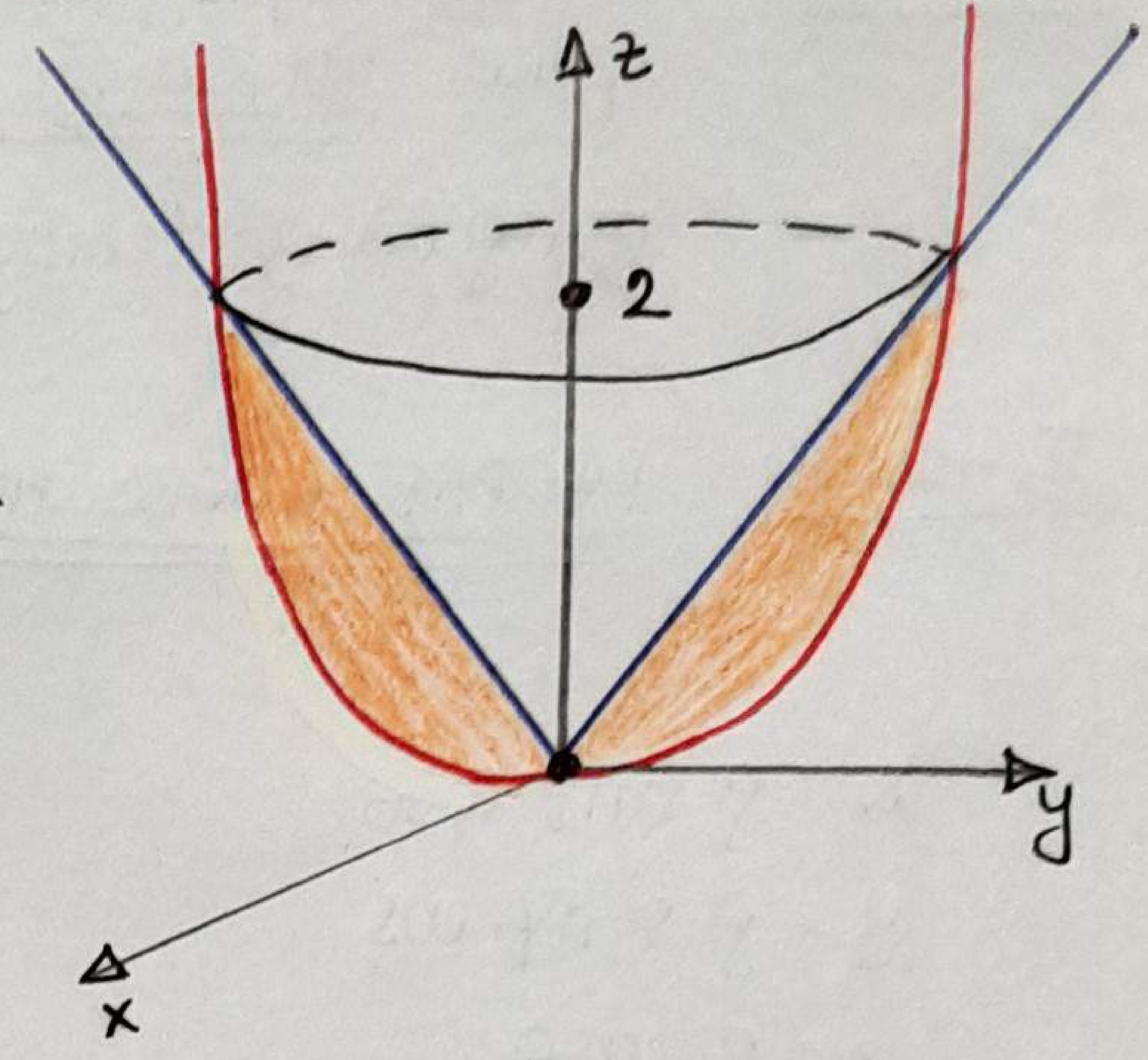
1. Одредити запремину тела

$$T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2+y^2}{2}\leq z\leq\sqrt{x^2+y^2}\}$$



$$V=\iiint_T dx\,dy\,dz$$

(1) $\frac{x^2+y^2}{2}\leq z$: граница је $x^2+y^2=2z$ <u>параболоид</u>

(2) $z\leq\sqrt{x^2+y^2}$: граница је $z^2=x^2+y^2$ <u>конус</u> ($z\geq 0$ из (1))

<u>пресек (1) и (2)</u>:

$$\frac{x^2+y^2}{2}=\sqrt{x^2+y^2}=z$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}=0}_{\text{коорд. почетак}} \lor \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}=2}_{\substack{\text{круг } x^2+y^2=4 \\ \text{на висини } z=2}}$$

Дакле, пројекција T_1 тела T на xy-раван је круг са центром у $(0,0)$ полупречника 2:

$$T_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=2^2\}$$

$$\Rightarrow V=\iiint_T dx\,dy\,dz = \iint_{T_1}\left(\int_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{\sqrt{x^2+y^2}} dz\right)dx\,dy = \iint_{T_1}\left(\sqrt{x^2+y^2}-\frac{x^2+y^2}{2}\right)dx\,dy$$

Фубинијева теорема

$\frac{x^2+y^2}{2}\leq z\leq\sqrt{x^2+y^2}$

уводимо поларне координате на T_1

$x=r\cos\theta$ $\quad r\in[0,2]$ $\quad\Rightarrow x^2+y^2=r^2$

$y=r\sin\theta$ $\quad \theta\in[-\pi,\pi)$

$\sqrt{r^2}=r$ јер $r\geq 0$

$$\Rightarrow V=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^2\left(\sqrt{r^2}-\frac{r^2}{2}\right)\cdot \underset{\text{Јакобијан}}{r}\,dr\right)d\theta$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^2\left(r^2-\frac{r^3}{2}\right)dr\right)d\theta$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{r^3}{3}-\frac{r^4}{8}\right)\Big|_0^2 d\theta$$

$$=\left(\frac{8}{3}-2\right)\cdot\theta\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{2}{3}\cdot 2\pi=\frac{4}{3}\pi \quad \square$$

☺ Могли смо радити преко цилиндричних координата, али само бисмо компликовали

3. Израчунати: $I=\iiint\limits_T x\,dx\,dy\,dz$

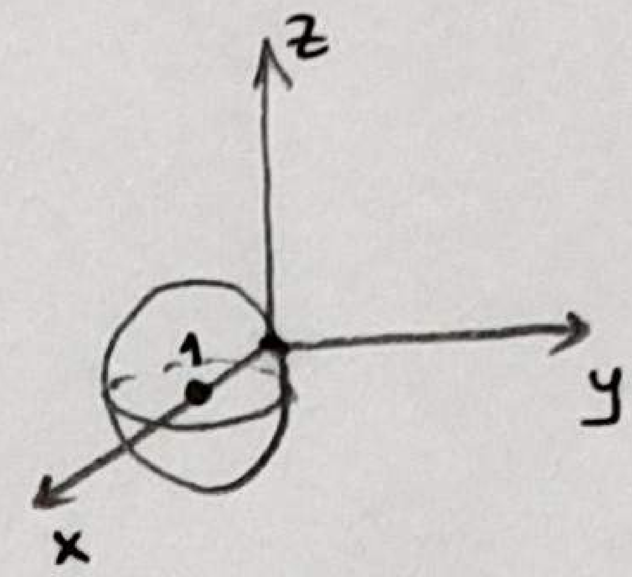
$$T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x-1)^2+y^2+z^2\le 1\}$$

$f(x,y,z)=x$

T је лопта са центром $(1,0,0)$ полупречника 1

Уводимо <u>ПОМЕРЕНЕ СФЕРНЕ КООРДИНАТЕ</u> (у односу на тачку $(1,0,0)$ као центар)

$$x = 1+\rho\cdot\sin\varphi\cos\theta \qquad \rho\in[0,1]$$
$$y = \rho\cdot\sin\varphi\sin\theta \qquad \theta\in[-\pi,\pi]$$
$$z = \rho\cdot\cos\varphi \qquad \varphi\in[0,\pi]$$



константа +1 неће променити Јакобијан (проверити за вежбу)

тј. $J=-\rho^2\sin\varphi$

$|J|=\rho^2\sin\varphi$

Дакле:
$$I=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\underbrace{\int_0^1\Big(\overbrace{(1+\rho\sin\varphi\cos\theta)}^{f(x,y,z)=x}\cdot\overbrace{\rho^2\sin\varphi}^{|J|}\Big)\,d\rho}_{\text{по }\rho}\right)d\varphi\,d\theta$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\sin\varphi\cdot\frac{\rho^3}{3}+\sin\varphi\cdot\cos\theta\cdot\frac{\rho^4}{4}\right)\Big|_0^1\,d\varphi\,d\theta$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cos\theta\right)\cdot\sin\varphi\,d\varphi\right)d\theta$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cos\theta\right)\underline{\cos\varphi}\Big|_0^{\pi}\,d\theta$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}2\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cos\theta\right)d\theta$$

$$=\left(\frac{2}{3}\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$=\frac{2}{3}\cdot 2\pi=\frac{4\pi}{3}$$

□

4. Израчунати: $I = \iiint\limits_D \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$

где је D унутрашњост сфере:

$$x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

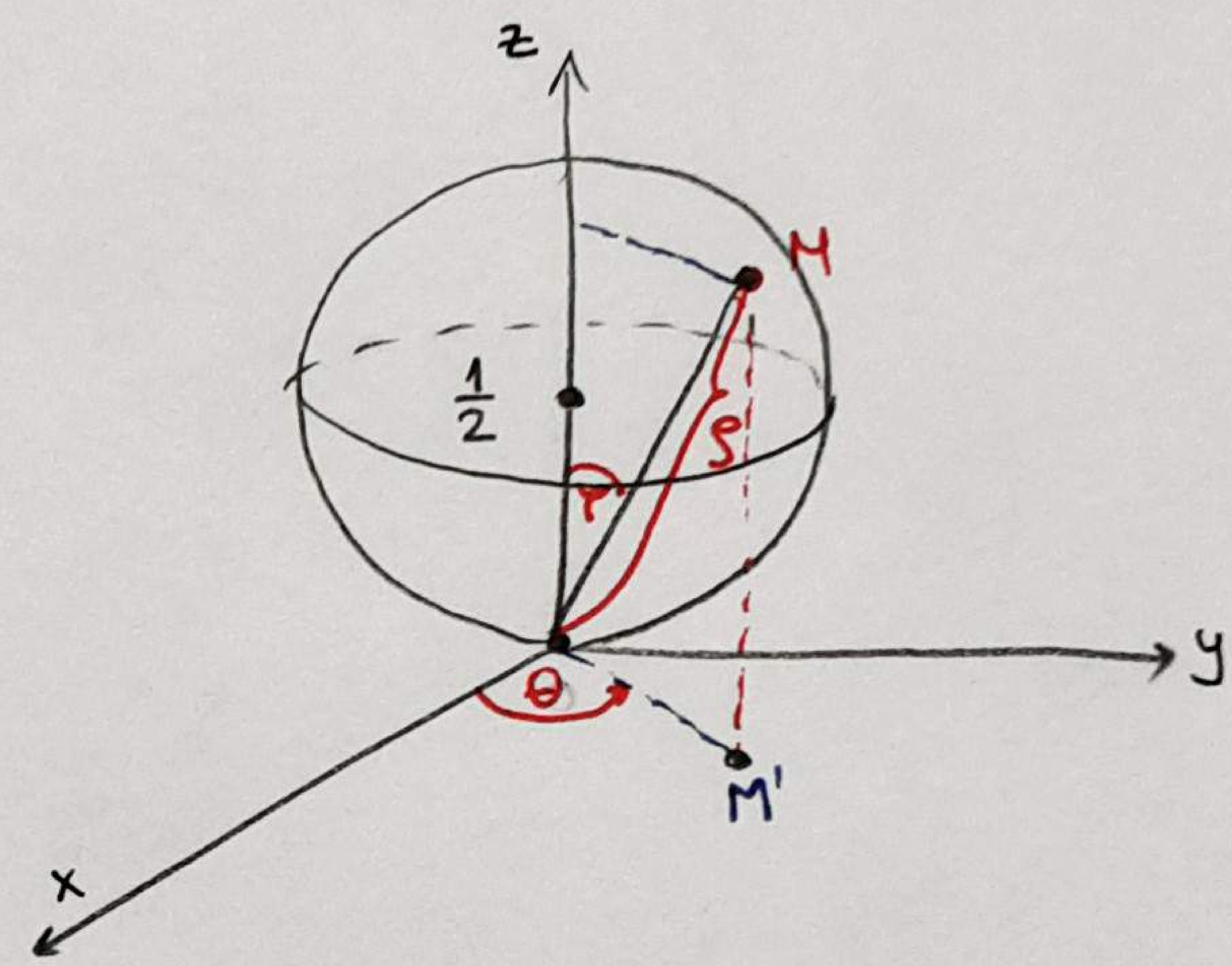
иако би услов за D сугерисао померене сферне координате, ипак узимамо обичне сферне координате због функције у интегралу - да се не би закомпликовала :) !

$x = \rho \cdot \sin\varphi \cos\theta$

$y = \rho \cdot \sin\varphi \sin\theta$

$z = \rho \cdot \cos\varphi$

$|J| = \rho^2 \cdot \sin\varphi$



које су границе, тј. шта даје D ?

$$x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

$$\iff x^2+y^2+z^2-z+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

$$\iff x^2+y^2+z^2=z \quad ⊛$$

угао θ: $\boxed{\theta \in [-\pi, \pi)}$

угао φ: $\boxed{\varphi \in [0, \frac{\pi}{2})}$ јер све у полупростору где $z \geq 0$

ρ ?: из ⊛ заменом x и y и z добијамо:

$$x^2+y^2+z^2=\rho^2 = z = \rho \cdot \cos\varphi$$

$\rho^2 = \rho \cdot \cos\varphi$ је граница $\Rightarrow$ $\boxed{0 \leq \rho \leq \cos\varphi}$

$$\Rightarrow I = \iiint\limits_D \sqrt{\underbrace{x^2+y^2+z^2}_{\rho^2}}\,dx\,dy\,dz \overset{\boxed{T}}{=} \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\cos\varphi} \underbrace{\sqrt{\rho^2}}_{\substack{\| \\ \rho \text{ јер } \rho \geq 0}} \cdot \underbrace{\rho^2 \sin\varphi}_{|J|}\,d\rho\right)d\varphi\,d\theta$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\cos\varphi} \sin\varphi \cdot \rho^3\,d\rho\right)d\varphi\,d\theta$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} \sin\varphi \cdot \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^{\cos\varphi} d\varphi\right)d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} \sin\varphi \cdot \frac{\cos^4\varphi}{4}\,d\varphi\right)d\theta$$

$$\overset{\boxed{\text{смена } t=\cos\varphi}}{=} \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_1^0 \frac{1}{4}t^4 \cdot -dt\right)d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{t^5}{20}\Big|_0^1 d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{20}\,d\theta = \boxed{\frac{\pi}{10}}$$

□

~ Криволинијски интеграли ~

1 КРИВОЛИНИЈСКИ ИНТЕГРАЛИ ПРВЕ ВРСТЕ

потребна нам је ПАРАМЕТРИЗАЦИЈА КРИВЕ (подсетање)

c: крива у $\mathbb{R}^3$:

$$r : [a,b] \to \mathbb{R}^3$$

$$r(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

регуларна: $r'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) \neq \vec{0}$

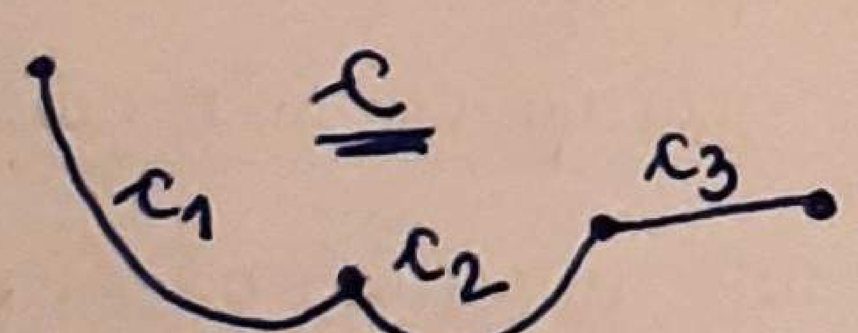
$\boxed{T}$ c - глатка крива, $r : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ регуларна параметризација

f - непрекидна.

тада:
$$\underbrace{\int_c f(x,y,z)\, ds}_{\text{ИНТЕГРАЛ по кривој } c} = \int_a^b f(r(t)) \cdot \|r'(t)\|\, dt$$

ds - елемент дужине $\quad \|r'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$

* део-по-део глатку криву поделимо на делове где можемо применити теорему:



$$\int_c = \int_{c_1} + \int_{c_2} + \int_{c_3}$$

* аналогна теорема важи у $\mathbb{R}^2$:

$$\int_c f(x,y)\, ds = \int_a^b f(r(t)) \cdot \|r'(t)\|\, dt$$

овде $\|r'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$.

$\boxed{1.}$ Израчунати $I = \int_\gamma z\,ds$

γ - крива одређена параметризацијом: $\gamma(t) = (t\cdot\cos t, t\sin t, t)$, $0 \le t \le t_0$

кад већ имамо параметризацију
и знамо $f(x,y,z) = z$,
потребно нам је само $\|\gamma'(t)\|$:

$$\gamma'(t) = (\cos t - t\cdot\sin t,\ \sin t + t\cdot\cos t,\ 1)$$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1^2}$$

$$= \sqrt{\underline{\cos^2 t} + \underline{t^2\sin^2 t} - \cancel{2t\cdot\cos t\cdot\sin t} + \underline{\sin^2 t} + \underline{t^2\cdot\cos^2 t} + \cancel{2t\sin t\cos t} + 1}$$

$$= \sqrt{1 + t^2\cdot 1 + 1}$$

$$= \sqrt{t^2+2}$$

$$\Rightarrow I = \int_\gamma z\,ds \overset{(T)}{=} \int_0^{t_0} f(\gamma(t))\cdot\|\gamma'(t)\|\,dt$$

$$= \int_0^{t_0} t\cdot\sqrt{t^2+2}\,dt$$

смена: $l = t^2+2$
$dl = 2t\,dt$

$$= \int_2^{t_0^2+2} \sqrt{l}\,\frac{1}{2}\,dl$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\,l^{3/2}\Big|_2^{t_0^2+2}$$

$$= \frac{1}{3}\left((t_0^2+2)^{3/2} - 2\sqrt{2}\right) \quad \square$$

2. Израчунати: $I=\int_\gamma \sqrt{x^2+y^2}\,ds$ ако је крива γ задата са:

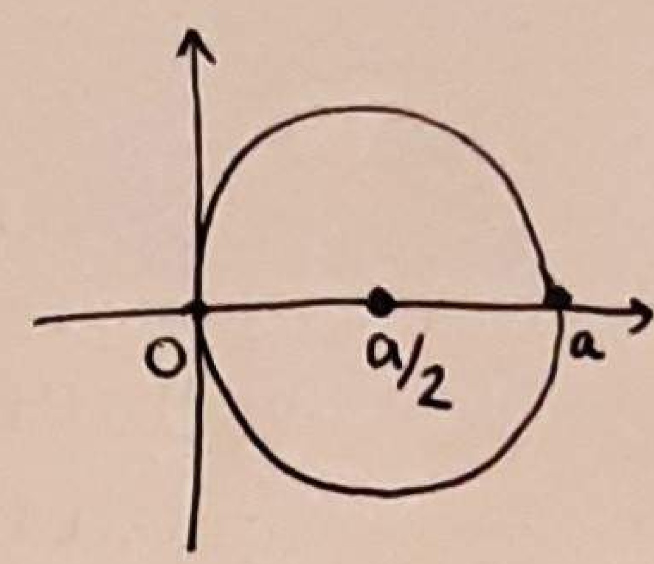
$$\gamma:\ x^2+y^2=ax \quad (a>0)$$

Нађимо параметризацију криве γ:

$$x^2+y^2-ax=0$$

$$x^2-2\cdot\frac{a}{2}\cdot x+\frac{a^2}{4}+y^2=\frac{a^2}{4}$$

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$$



$$\boxed{\begin{aligned} x-\frac{a}{2}&=\frac{a}{2}\cdot\cos t\\ y&=\frac{a}{2}\cdot\sin t\end{aligned}}$$

тј. $$\boxed{\begin{aligned} x&=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cdot\cos t\\ y&=\frac{a}{2}\sin t\end{aligned}} \qquad t\in[-\pi,\pi]$$

$$\gamma(t)=\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos t,\ \frac{a}{2}\sin t\right)$$

$$\gamma'(t)=\left(-\frac{a}{2}\sin t,\ \frac{a}{2}\cos t\right)$$

$$\|\gamma'(t)\|=\sqrt{\frac{a^2}{4}\sin^2 t+\frac{a^2}{4}\cos^2 t}=\sqrt{\frac{a^2}{4}}=\frac{|a|}{2}\overset{a>0}{=}\frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow\ I=\int_{-\pi}^{\pi}\overbrace{\sqrt{\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos t\right)^2+\left(\frac{a}{2}\sin t\right)^2}}^{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\overbrace{\frac{a}{2}}^{\|\gamma'(t)\|}\,dt$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}\cos^2 t+\frac{a^2}{2}\cos t+\frac{a^2}{4}\sin^2 t}\cdot\frac{a}{2}\,dt$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}\cdot 1+\frac{a^2}{2}\cos t}\cdot\frac{a}{2}\,dt=\frac{a}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{\frac{a^2}{2}\underbrace{(1+\cos t)}_{2\cos^2\frac{t}{2}}}\,dt$$

$$=\frac{a}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{a^2\cdot\cos^2\frac{t}{2}}\,dt$$

$\sqrt{a^2}=a$ јер $a>0$

$\sqrt{\cos^2\frac{t}{2}}=\cos\frac{t}{2}$ јер $\frac{t}{2}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

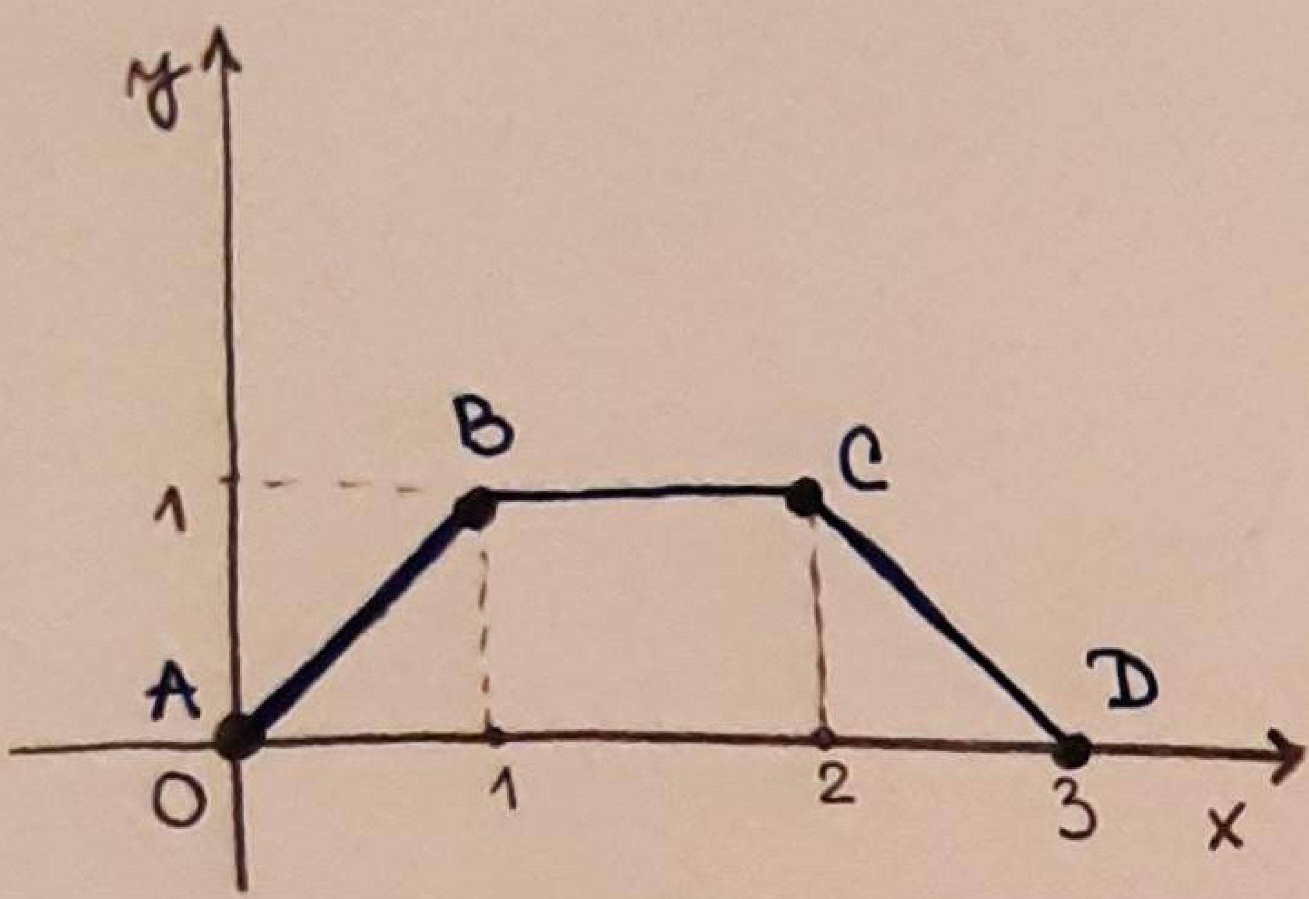
$$=\frac{a}{2}\int_{-\pi}^{\pi}a\cdot\cos\frac{t}{2}\,dt$$

$$\overset{\text{парна}}{=}\frac{a}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\cdot\underbrace{\int_0^{\pi}\cos\frac{t}{2}\,dt}_{2\sin\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi}}=2a^2 \qquad \square$$

3. Израчунати интеграл: $\int\limits_{\gamma} (x+y)\,ds$

Где је γ изломљена линија ABCD:

$A(0,0),\ B(1,1),\ C(2,1),\ D(3,0).$



γ се састоји од три дужи: AB, BC и CD

$$\Rightarrow \int\limits_{\gamma} = \int\limits_{AB} + \int\limits_{BC} + \int\limits_{CD}$$

за сваки од ових интеграла правимо одговарајућу параметризацију дужи:

AB $t \in [0,1]$

$x(t) = t$

$y(t) = t$

$r_1(t) = (t,t)$

$r_1'(t) = (1,1)$

$\Rightarrow \|r_1'(t)\| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$$\int\limits_{AB} (x+y)\,ds = \int_0^1 \underbrace{(t+t)}_{\substack{\text{функција}\\ f(r(t))}} \cdot \underbrace{\sqrt{2}\,dt}_{ds} = 2\sqrt{2}\int_0^1 t\,dt = 2\sqrt{2}\cdot\frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \sqrt{2}$$

BC $t \in [1,2]$

$x(t) = t,\ y(t) = 1$

$r_2(t) = (t,1)$

$r_2'(t) = (1,0)$

$\|r_2'(t)\| = \sqrt{1} = 1$

$$\int\limits_{BC} (x+y)\,ds = \int_1^2 (t+1)\cdot 1\,dt = \frac{(t+1)^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{9-4}{2} = \frac{5}{2}$$

CD $t \in [2,3]$

$x(t) = t$

$y(t) = 3-t$ – ту једначину има права чији је део CD

$r_3(t) = (t, 3-t)$

$r_3'(t) = (1,-1)$

$\|r_3'(t)\| = \sqrt{2}$

$$\Rightarrow \int\limits_{CD} (x+y)\,ds = \int_2^3 (t+3-t)\cdot\sqrt{2}\,dt = \int_2^3 3\sqrt{2}\,dt = 3\sqrt{2}$$

Дакле: $$\int\limits_{\gamma} (x+y)\,ds = \sqrt{2} + \frac{5}{2} + 3\sqrt{2} = \boxed{4\sqrt{2}+\frac{5}{2}}$$ ■

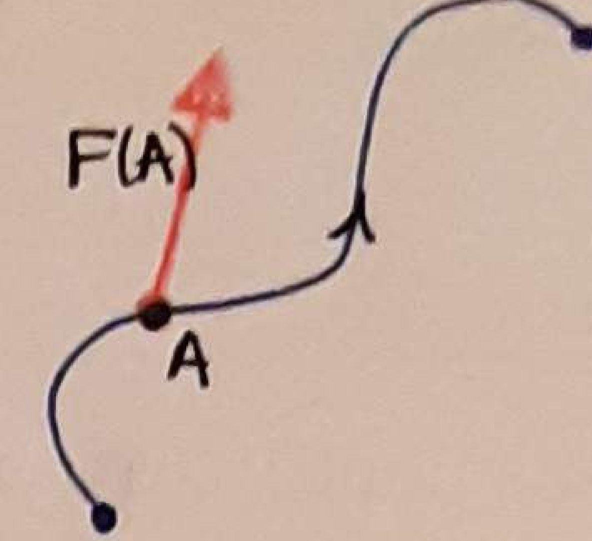
② КРИВОЛИНИЈСКИ ИНТЕГРАЛИ ДРУГЕ ВРСТЕ

* интеграл векторског поља на кривој

нека је c крива у $\mathbb{R}^3$ задата параметризацијом

$r : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, регуларна

$r(t) = (x(t), y(t), z(t))$



и нека је $F : c \to \mathbb{R}^3$ векторско поље

$F = (P, Q, R)$.

потребан нам је и јединични вектор тангенте на криву:

$$T(r(t)) := \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|}$$

$\boxed{\text{криволинијски интеграл векторског поља } F \text{ на } c}$

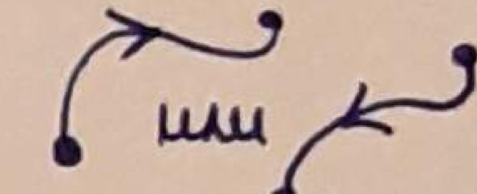
дефинишемо као:

$$\int_c F \cdot dr \overset{\text{деф.}}{:=} \int_c F \bullet T \, ds$$

скаларни производ

друга ознака је: $\int_c P dx + Q dy + R dz$

* Важан појам овде: ОРИЈЕНТАЦИЈА криве = смер кретања на кривој



како се може изабрати оријентација?

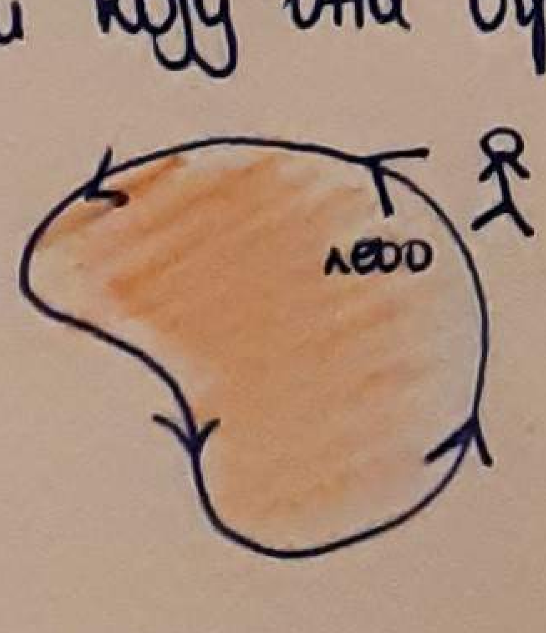
- регуларна параметризација $r : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ задаје оријентацију:

  t иде од a до b ⇝ тачка $r(t)$ иде од $r(a)$ до $r(b)$

- можемо и експлицитно навести смер кретања.

* стандардно узимамо смер кретања супротан казаљки на сату 

* кад кажемо да је нека затворена крива позитивно оријентисана (гледајући из неке тачке) то значи да приликом обиласка криве, област коју она ограничава остаје са леве стране



* шта се дешава ако променимо оријентацију?

c^- - супротно оријентисана c

Важи:
$$\int_{c^-} F \cdot dr = -\int_{c} F \cdot dr$$

* **У ЗАДАЦИМА:**

када имамо параметризацију криве $r : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, $r(t)$

а оријентацију бирамо сами

морамо проверити да ли је та оријентација сагласна са растом параметра t → тада узимамо $\int_a^b \ldots$ или није, тј. супротна је → тада узимамо $-\int_a^b \ldots$

* **КАКО РАЧУНАМО:**

$\boxed{\text{СТАВ}}$ C - глатка оријентисана крива

$r : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ регуларна параметризација која одређује задату оријентацију

F - непр. векторско поље на c

тада:
$$\int_{c} F \cdot dr = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t)\, dt$$

скаларни производ

тј. ако је $F = (P, Q, R)$, а $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$

овде имамо:
$$\int_a^b \left(P(r(t)) \cdot x'(t) + Q(r(t)) \cdot y'(t) + R(r(t)) \cdot z'(t) \right) dt$$

* све ово важи и у $\mathbb{R}^2$ аналогно!

4. Израчунати $I = \oint_\gamma \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$ γ - позитивно оријентисан руб квадрата ABCD: A(1,0), B(0,1), C(-1,0), D(0,-1)

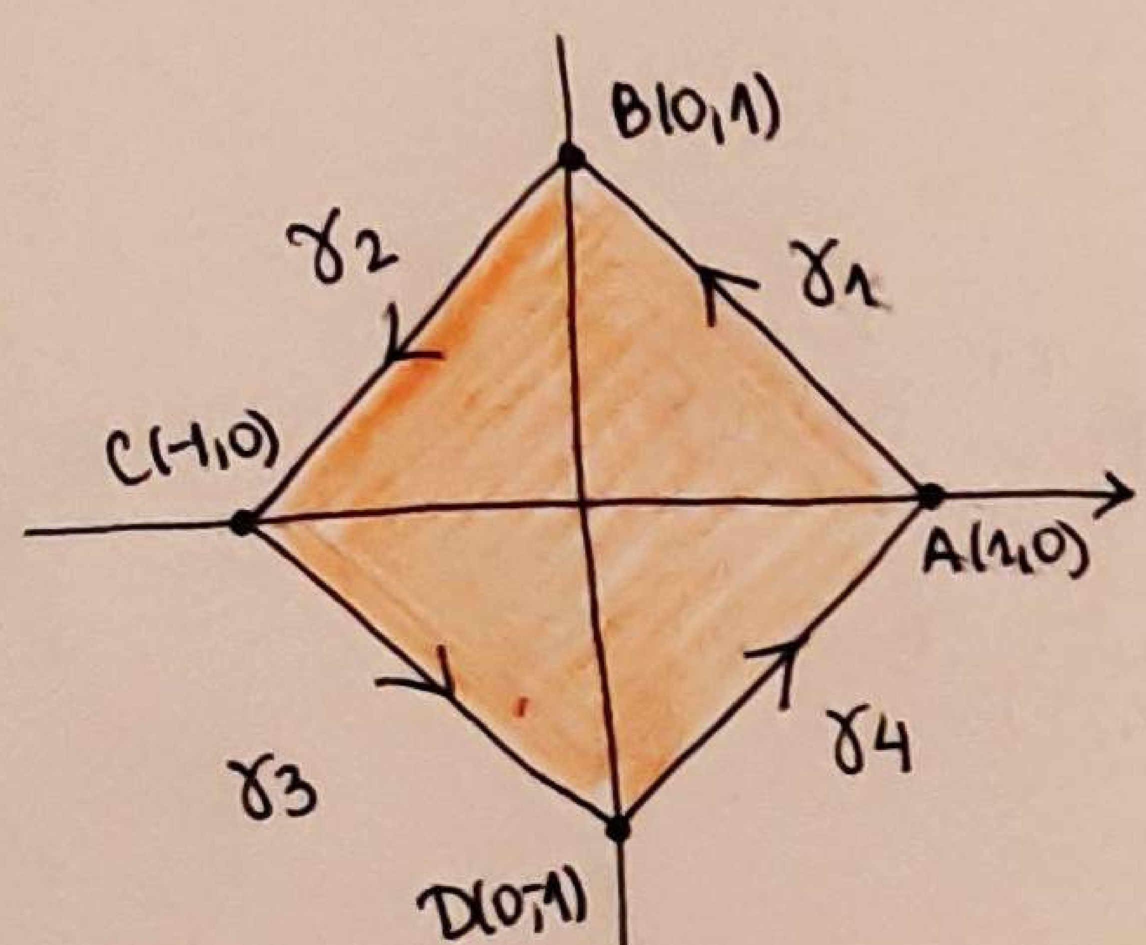
$\oint_\gamma$ - ознака за интеграл по затвореној криви

I: назива се ЦИРКУЛАЦИЈА ВЕКТ. ПОЉА дуж γ

Ово је крива у равни и интеграл је записан као:

$$I = \oint_\gamma \frac{1}{|x|+|y|}dx + \frac{1}{|x|+|y|}dy = \int_\gamma F\cdot dr \quad \text{где} \quad F = \left(\frac{1}{|x|+|y|}, \frac{1}{|x|+|y|}\right)$$

део по део глатка па делимо на четири глатка дела:

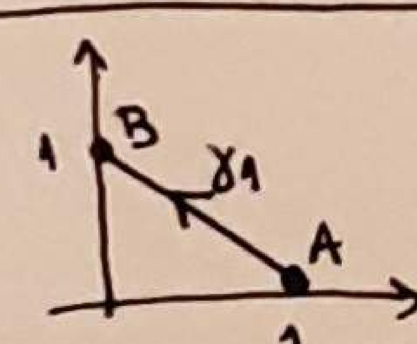


позитивна оријентација - као на слици!

$$I = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4}$$

ПАРАМЕТРИЗАЦИЈЕ:

- γ_1:

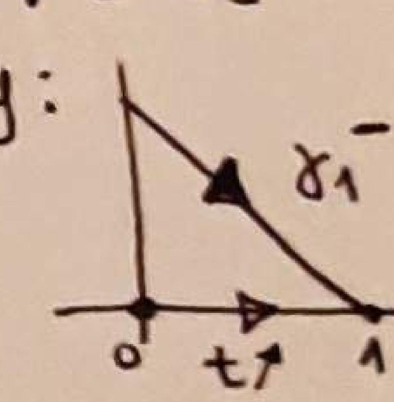


$x = t, \ t \in [0,1]$

$y = 1-t$

тј. $r_1(t) = (t, 1-t) \Rightarrow r_1'(t) = (1,-1)$

жељена оријентација γ_1 није сагласна са параметризацијом тј. раст параметра t даје супротну оријентацију:



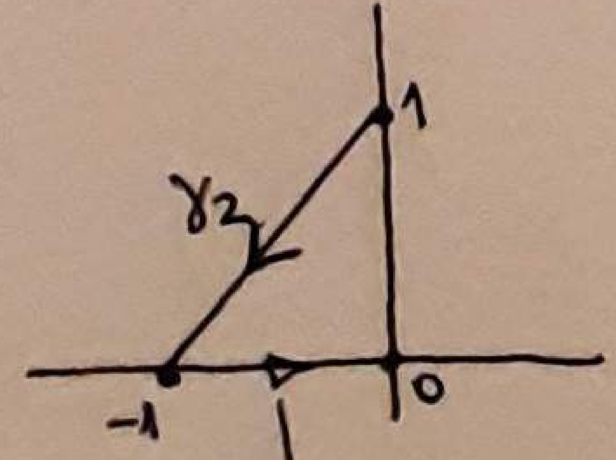
⇒ узимамо ⊖ :

$$\int_{\gamma_1} F\cdot dr \overset{\text{став}}{=} -\int_0^1 F(r_1(t))\cdot r_1'(t)\,dt$$

$$= -\int_0^1 \left(\frac{1}{|t|+|1-t|}, \frac{1}{|t|+|1-t|}\right)\cdot(1,-1)\,dt$$

$$= -\int_0^1 \left(\frac{1}{|t|+|1-t|} + (-1)\cdot\frac{1}{|t|+|1-t|}\right)dt = -\int_0^1 0\,dt = \boxed{0}$$

- γ_2:



раст t
није сагласан
са γ_2 ⇒ имамо -

$x = t, \ t \in [-1,0] \quad y = t+1$

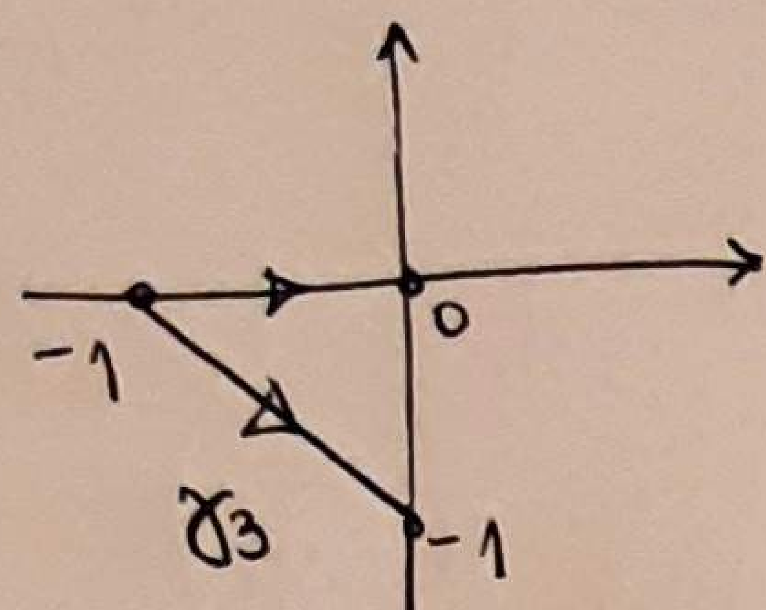
тј. $r_2(t) = (t, t+1) \quad r_2'(t) = (1,1)$

$$\int_{\gamma_2} F\cdot dr = -\int_{-1}^{0} F(r_2(t))\cdot r_2'(t)\,dt =$$

$$= -\int_{-1}^{0} \left(\frac{1}{|t|+|t+1|}, \frac{1}{|t|+|t+1|}\right)\cdot (1,1)\,dt$$

$$= -\int_{-1}^{0} 2\cdot\frac{1}{|t|+|t+1|}\,dt \underset{t\in[-1,0]}{=} -\int_{-1}^{0} 2\cdot\Big(\underbrace{\frac{1}{-t+|t+1|}}_{=1}\Big)\,dt = -2$$

- γ_3:

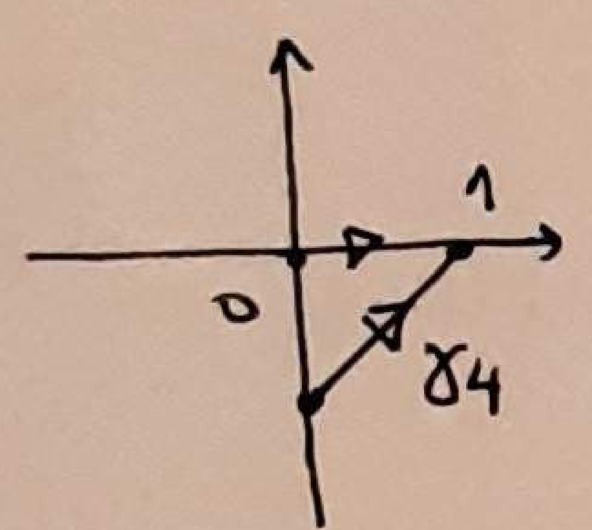


расти t сагласан ☺

$x=t,\ y=-t-1,\ t\in[-1,0]$ $\quad r_3(t)=(t,-t-1)$ $\quad r_3'(t)=(1,-1)$

$$\int_{\gamma_3} F\cdot dr = \int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{|t|+|-t-1|}\cdot 1 + \frac{1}{|t|+|-t-1|}\cdot(-1)\right)dt = 0$$

- γ_4:



$x=t,\ y=t-1,\ t\in[0,1]$

$r_4(t)=(t,t-1)$ $\quad r_4'(t)=(1,1)$

сагласан расти t
са њеном оријентацијом:

$$\int_{\gamma_4} F\cdot dr = \int_{0}^{1}\left(\frac{1}{|t|+|t-1|}\cdot 1 + \frac{1}{|t|+|t-1|}\cdot 1\right)dt$$

$$= 2\int_0^1 \frac{1}{t+(1-t)}\,dt = 2\int_0^1 1\,dt =$$

$$= 2$$

Дакле: $\quad I = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4} = 0+(-2)+0+2 = 0 \quad \boxed{I=0}$ □