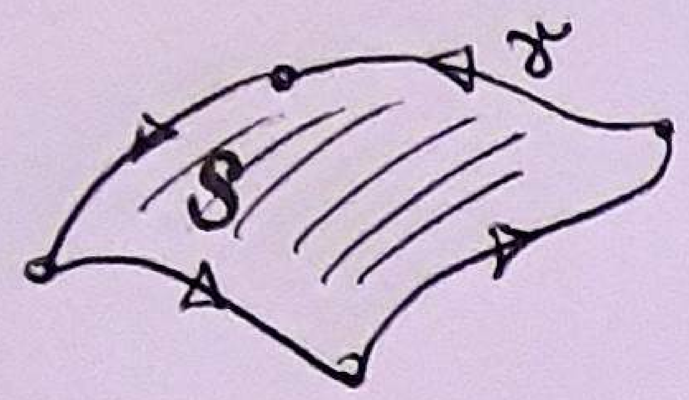
ВЕЖБЕ
за среду
13.5.2020.

~ Стоксова формула ~

- веза између криволинијског интеграла II врсте и површинског II врсте
  - \+ затворена крива γ
  - \+ област ограничена са γ



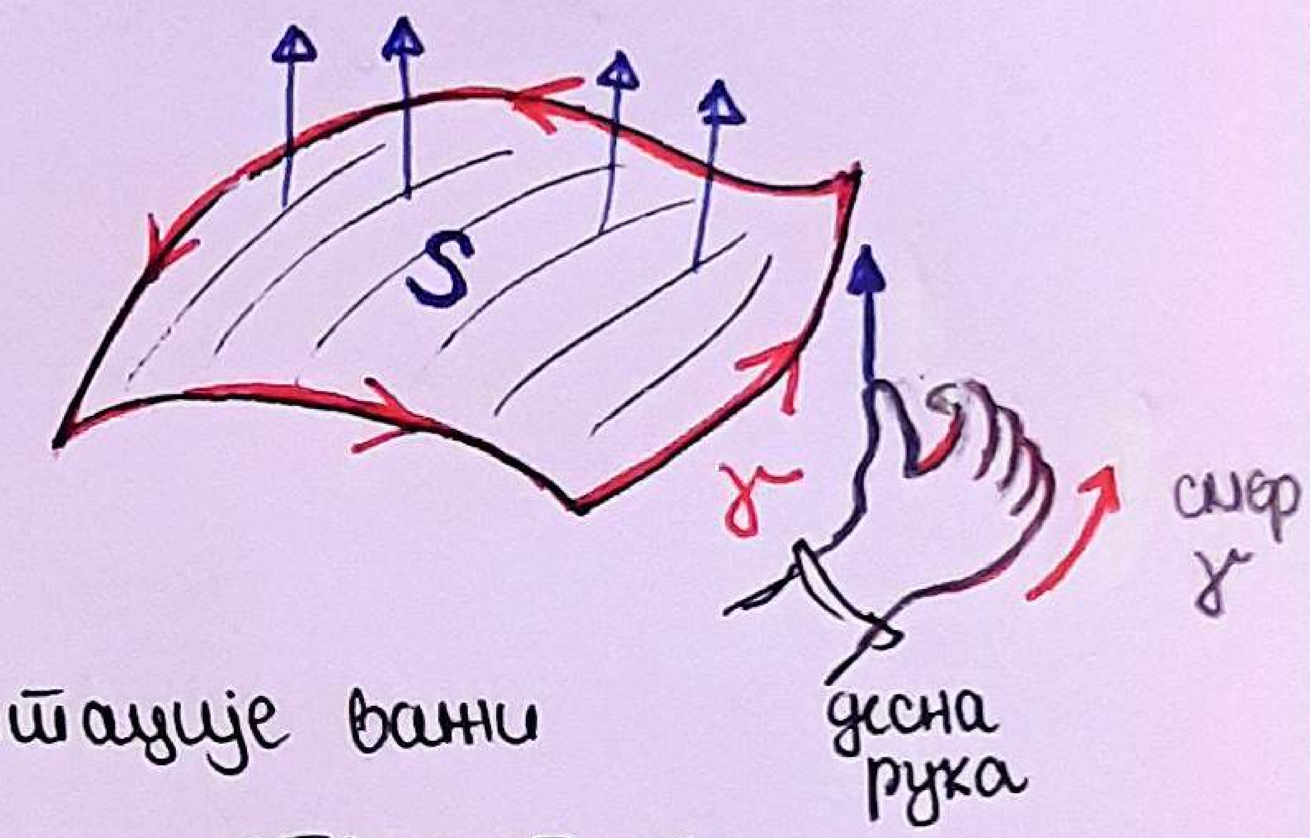
прво дефинишемо:

- за векторско поље $F=(P,Q,R): \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

⇝ векторско поље $\nabla \times F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ које се назива <u>РОТОР</u>

$$\nabla \times F = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (P,Q,R) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

тј. $\nabla \times F = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y)$



- појам <u>сагласне</u> оријентације површи и криве:

S - део-по део глатка површ

$\gamma = \partial S$ њена граница, део по део глатка крива

γ и S су <u>САГЛАСНО ОРИЈЕНТИСАНЕ</u> ако за њихове оријентације важи

<u>правило десне руке</u>: када прсти десне шаке показују смер кретања по γ, палац показује смер вектора нормале на S.

Сада можемо формулисати:

$\boxed{\text{СТОКСОВА ФОРМУЛА}}$ S-део по део глатка површ; γ и S <u>сагласно</u> оријентисане

$\gamma = \partial S$ део-по-део глатка крива

⇒ за непрекидно-диференцијабилно поље F на S важи:

$$\oint_\gamma F \cdot dr = \iint_S (\nabla \times F) \cdot \vec{dS}$$

$$= \iint_S (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y) \cdot \vec{dS}$$

* <u>Пажња</u>: кад бирамо површ S којој је граница γ (γ дато), морамо да пазимо да F буде дефинисано на целом S!

* <u>корисне примене</u>: кад крива γ није глатка већ се ломи много пута

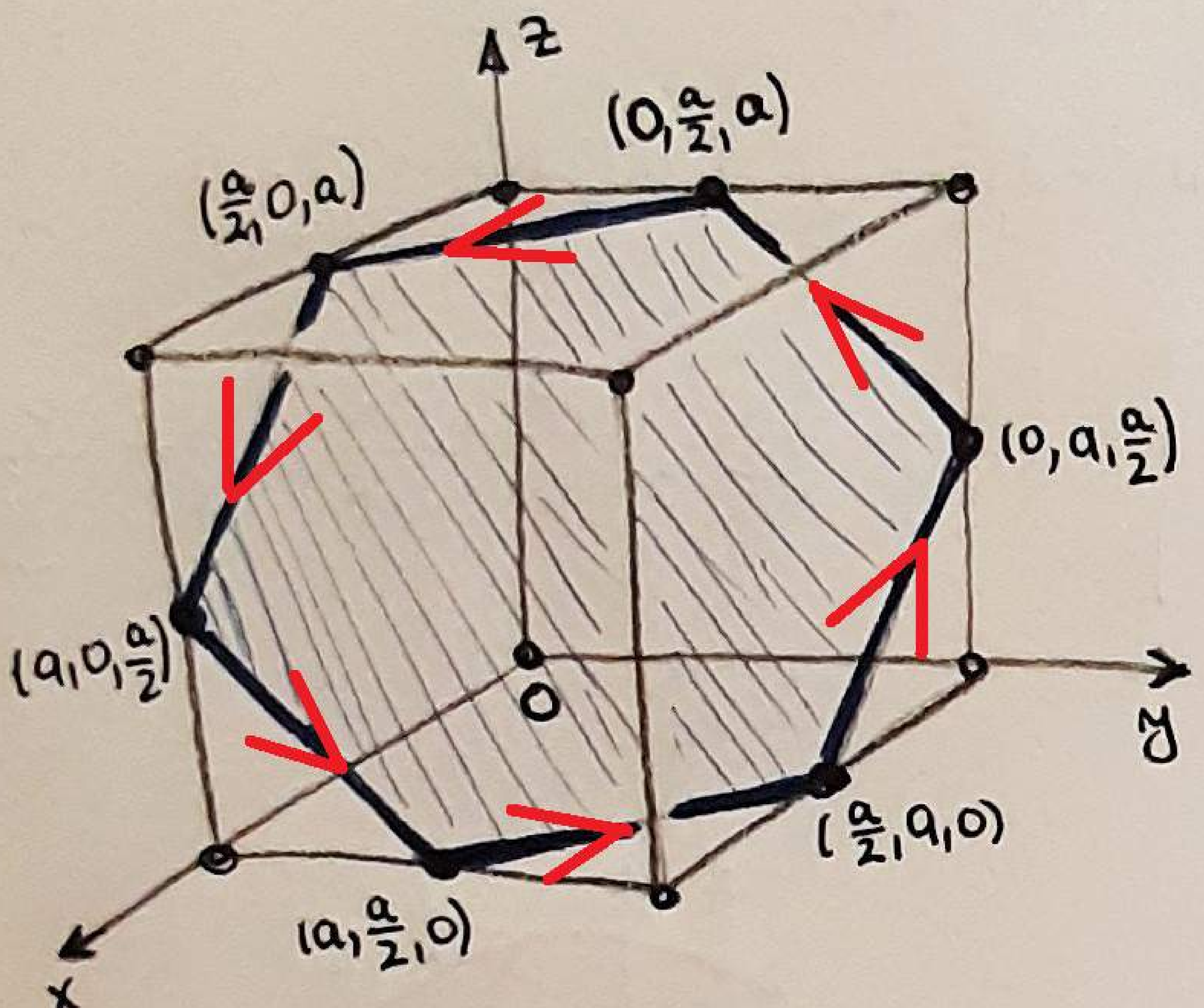
наш $\boxed{1}$ задатак ☺ → пређемо на површински јер то не утиче на њега

1 Израчунати: $I = \oint_\gamma F\cdot dr$ ако је $F(x,y,z)=(y,z,x)$

а γ је пресек омотача коцке $0\le x,y,z\le a$ и равни $x+y+z=\frac{3a}{2}$ $(a>0)$.

Смер кретања је супротан смеру кретања казаљке на сату кад се гледа из $(5a,5a,5a)$.

Како изгледа γ?



темена ове коцке су:

(x,y,z) $\quad x,y,z\in\{0,a\}$

Видимо да су темена $(0,0,0)$, $(a,0,0)$, $(0,a,0)$ и $(0,0,a)$ са једне стране равни α: $x+y+z=\frac{3a}{2}$

а темена $(a,a,0)$, $(a,0,a)$, $(0,a,a)$ и (a,a,a) са друге

(код првих је $x+y+z<\frac{3a}{2}$, а код других $x+y+z>\frac{3a}{2}$)

Тако видимо да ће пресек коцке и равни α бити шестоугао, а његова темена (и ивице) одређујемо рачунајући пресек α са сваком од 6 граничних равни коцке:

$x=0,\ x=a,\ y=0,\ y=a,\ z=0,\ z=a$.

Лако се добија да су темена криве γ тачке:

$$(a,\tfrac{a}{2},0),\ (\tfrac{a}{2},a,0),\ (0,a,\tfrac{a}{2}),\ (0,\tfrac{a}{2},a),\ (\tfrac{a}{2},0,a),\ (a,0,\tfrac{a}{2})$$

(све комбинације a, $\frac{a}{2}$ и 0)

Један начин би био да поделимо γ на 6 делова који су глатки (6 ивица) и после саберемо, али то је доста рачуна.

Зато ћемо прећи на површински помоћу Стоксове теореме:

S – изаберимо да буде део равни α ограничен шестоуглом

оријентације: гледајући из $(5a,5a,5a)$, оријентација γ је као на слици

а изаберимо да S буде оријентисана сагласно γ

што значи да вектор нормале буде $(1,1,1)$

Стоксова формула: $I = \oint_\gamma F\cdot dr = \iint_S (\nabla\times F)\cdot \vec{dS}$

$$F(x,y,z)=(\overset{P}{y},\overset{Q}{z},\overset{R}{x})$$

$$\Rightarrow \nabla\times F = (R'_y-Q'_z,\ P'_z-R'_x,\ Q'_x-P'_y) = (0-1,\ 0-1,\ 0-1) = (-1,-1,-1)$$

$$\Rightarrow I = \iint_S (-1,-1,-1)\cdot \vec{dS}$$

Сада рачунамо површински интеграл II врсте

$$I = \iint_S (-1,-1,-1)\cdot \vec{dS}$$

S параметризујемо као график функције:

$$x+y+z=\frac{3a}{2}$$

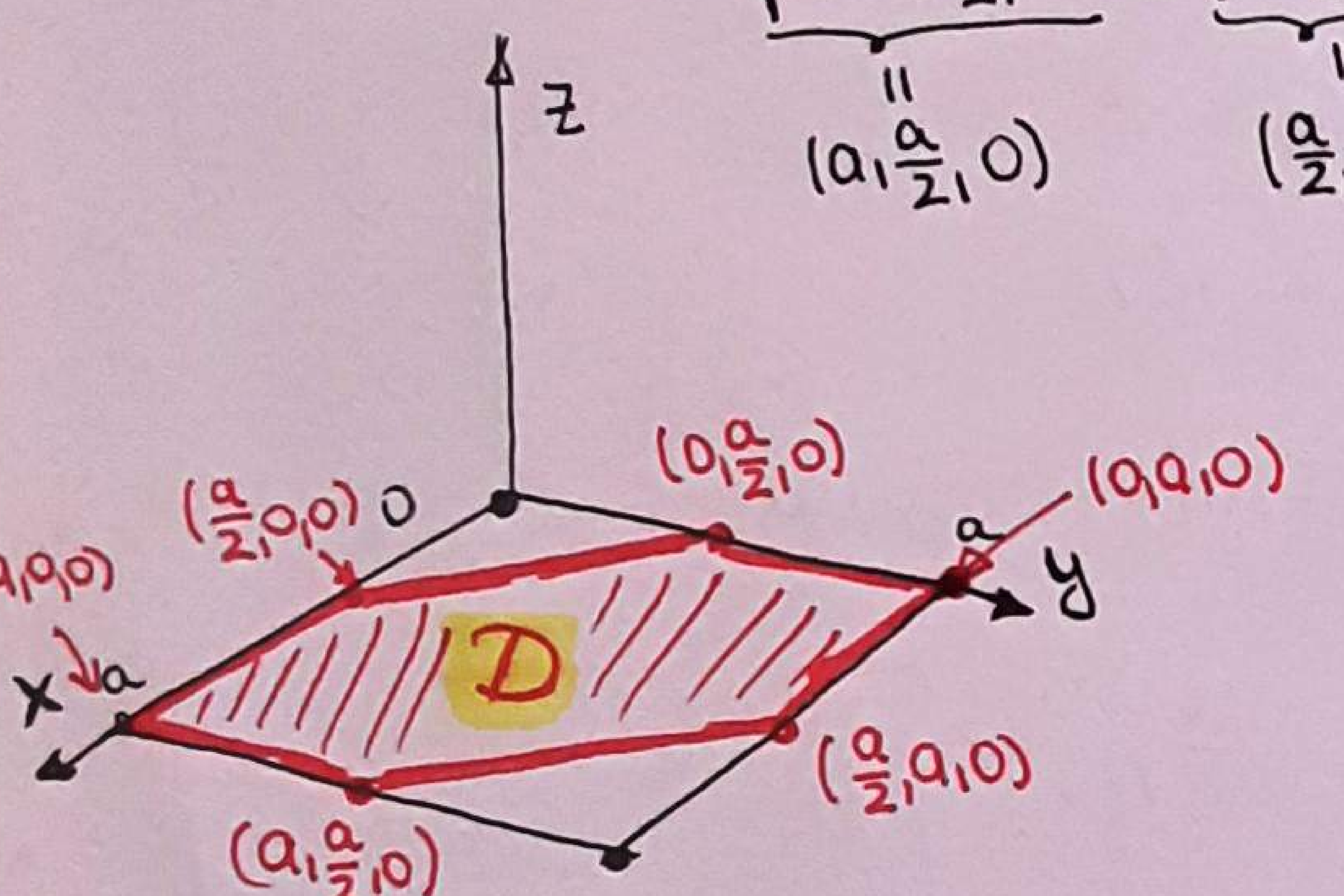
$$\rightarrow \boxed{z(x,y)} = \frac{3a}{2}-x-y$$

где је домен z:

$\boxed{D}$ = пројекција S на раван Oxy, означимо пројекцију са p:

= шестоугао са теменима:

$$\underbrace{p((a,\tfrac{a}{2},0))}_{\substack{\shortparallel\\(a,\frac{a}{2},0)}},\ \underbrace{p((\tfrac{a}{2},a,0))}_{\substack{\shortparallel\\(\frac{a}{2},a,0)}},\ \underbrace{p(0,a,\tfrac{a}{2})}_{\substack{\shortparallel\\(0,a,0)}},\ \underbrace{p(0,\tfrac{a}{2},a)}_{\substack{\shortparallel\\(0,\frac{a}{2},0)}},\ \underbrace{p(\tfrac{a}{2},0,a)}_{\substack{\shortparallel\\(\frac{a}{2},0,0)}},\ \underbrace{p(a,0,\tfrac{a}{2})}_{\substack{\shortparallel\\(a,0,0)}}$$



дакле, параметризација S:

$$\boxed{r: D\rightarrow \mathbb{R}^3 \quad r(x,y)=(x,y,z(x,y))}$$

- Да ли је ова оријентација коју даје r баш она коју желимо за S?

векторске нормале: $r'_x \times r'_y \overset{\text{график}}{=\!=} (-z'_x,-z'_y,1)$
$= (1,1,1)$

јесте ✓

$$\Rightarrow I = \iint_S (-1,-1,-1)\cdot\vec{dS} = \iint_D \overbrace{(-1,-1,-1)}^{F(r(x,y))}\cdot\overbrace{(1,1,1)}^{r'_x\times r'_y}\,dx\,dy$$

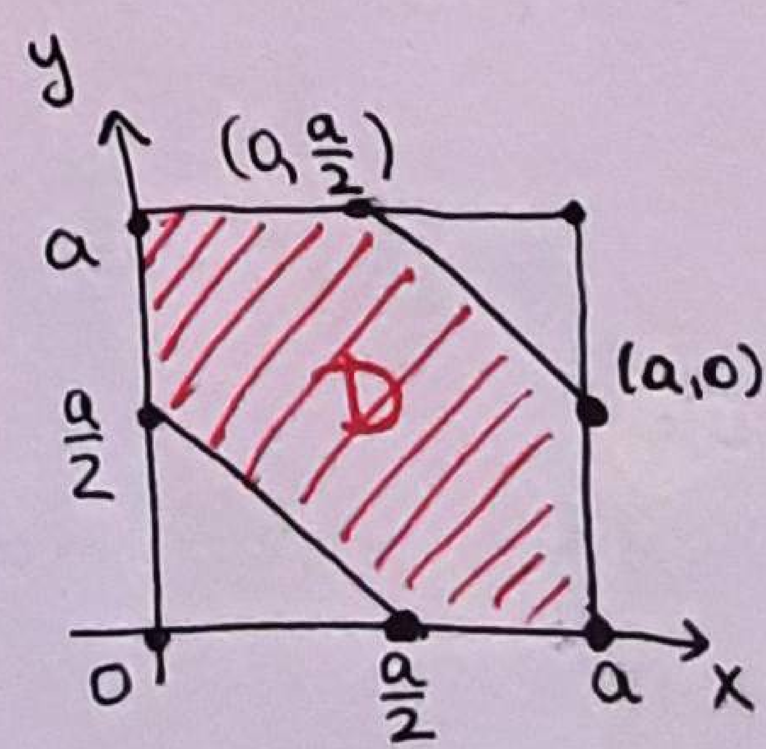
$$= \iint_D (-3)\,dx\,dy$$

$$= (-3)\iint_D dx\,dy$$

$$= (-3)\underbrace{P(D)}_{\text{површина шестоугла}}$$

$$= a^2 - 2\cdot\frac{a/2\cdot a/2}{2}$$

$$= a^2-\frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}a^2$$



$$= (-3)\cdot\frac{3}{4}a^2$$

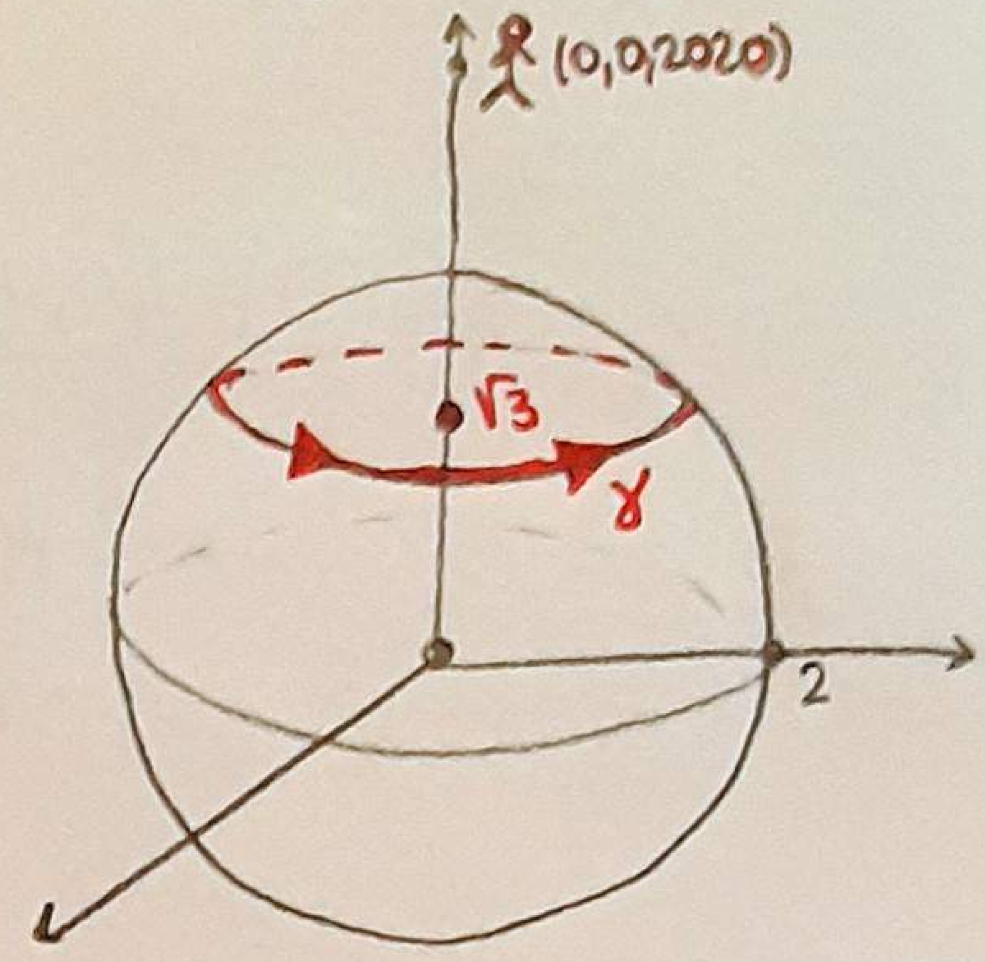
$$= \boxed{\frac{-9}{4}a^2}$$

□

$\boxed{2.}$ Израчунати $I = \oint\limits_{\gamma} y\,dx + z^2\,dy + x^2\,dz$ ако је γ кружница $x^2+y^2+z^2=4$, $z=\sqrt{3}$

смер кретања је супротан смеру кретања казаљке на сату ако се гледа из $(0,0,2020)$.

$\gamma: \left.\begin{matrix} x^2+y^2+z^2=4 \\ z=\sqrt{3} \end{matrix}\right\}$ $x^2+y^2=1$ – γ је кружница: $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=1,\ z=\sqrt{3}\}$ у равни $z=\sqrt{3}$.



$\boxed{\text{I начин}}$ стандардно рачунање крив. интеграла II врсте:

параметризација:

$x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=\sqrt{3}$

$\underline{r(t)=(\cos t, \sin t, \sqrt{3}),\ -\pi \le t \le \pi}$

$\underline{r'(t)}=(-\sin t, \cos t, 0)$

раст параметра t даје жељену оријентацију ✓

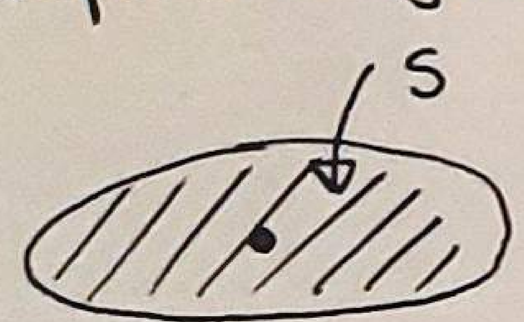
$$\Rightarrow I = \int_{-\pi}^{\pi} F(r(t))\cdot r'(t)\,dt \qquad \text{где је } F(x,y,z)=(y,z^2,x^2)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} (\sin t, 3, \cos^2 t)\cdot(-\sin t, \cos t, 0)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} (-\sin^2 t + 3\cos t)\,dt =$$

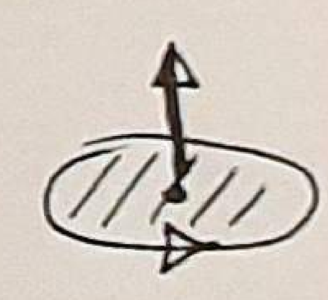
$$= -2\int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt + \cancel{3\cdot \sin t\Big|_{-\pi}^{\pi}}^{\,0} = \left(-t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi} = -\pi$$

$\boxed{\text{II начин}}$ Стоксова формула:

потребна нам је површ S којој је γ граница – узимамо круг који ограничава у равни $z=\sqrt{3}$



$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\le 1,\ z=\sqrt{3}\}$ – оријентишемо га сагласно γ



$F=(\underbrace{y}_{P}, \underbrace{z^2}_{Q}, \underbrace{x^2}_{R})$

$$\Rightarrow I = \oint\limits_{\gamma} F\cdot dr \overset{\text{Стокс}}{=} \iint\limits_S (\nabla\times F)\cdot \vec{dS} = \iint\limits_S (R'_y - Q'_z,\ P'_z - R'_x,\ Q'_x - P'_y)\cdot \vec{dS}$$

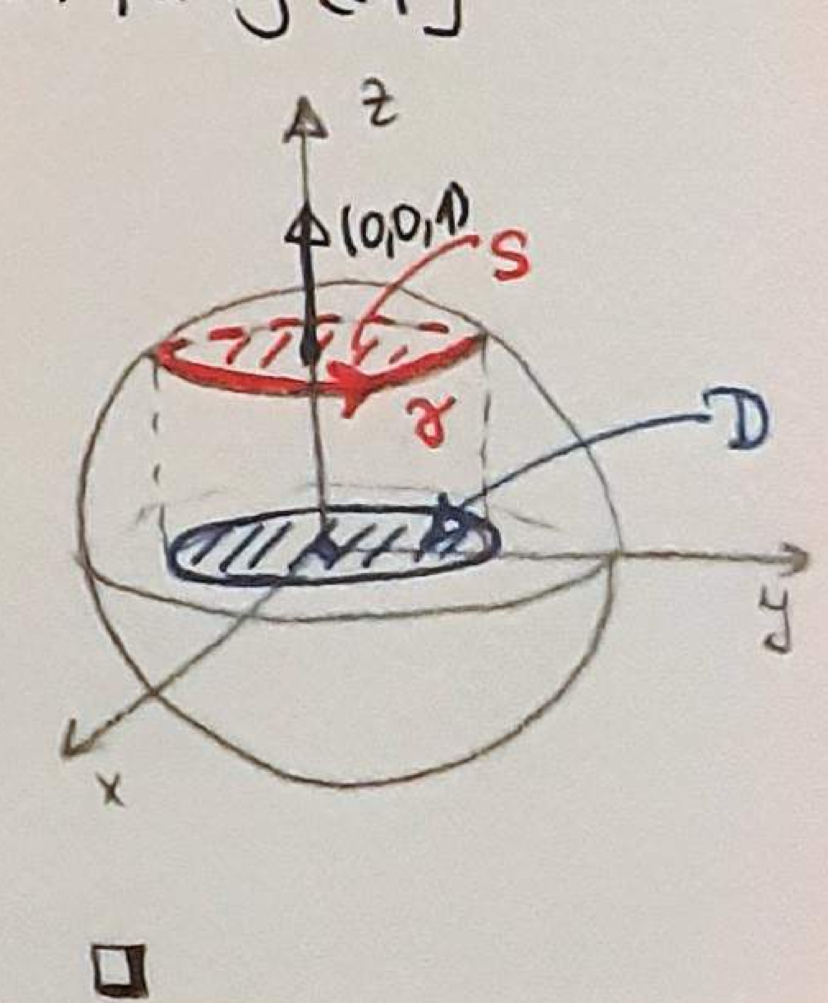
$$= \iint\limits_S (0-2z, 0-2x, 0-1)\cdot\vec{dS} = \iint\limits_S (-2z,-2x,-1)\cdot\vec{dS}$$

параметризујмо S као график: $z(x,y)=\sqrt{3}$ где $(x,y)\in D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 1\}$

јер је D пројекција S на раван xy.

$r(x,y)=(x,y,\sqrt{3}),\ (x,y)\in D$

вектор нормале $r'_x\times r'_y=(-z'_x,-z'_y,1)=\underline{(0,0,1)}$ $\Rightarrow$ даје жељену оријентацију ✓



$$\Rightarrow I = \iint\limits_D (-2(\overbrace{\sqrt{3}}^{z}), -2x, -1)\cdot(0,0,1)\,dx\,dy$$

$$= \iint\limits_D 0+0-1\,dx\,dy = -\iint\limits_D dx\,dy = -P(D) = -1^2\pi = -\pi$$

∎

~ Диференцијалне једначине ~

ДЈ првог реда: $G(x, y, y') = 0$

$y = y(x)$ непозната фја

I ДЈ са раздвојеним променљивим

облик: $\boxed{y' = f(x) \cdot g(y)}$

решавамо: $y' = \dfrac{dy}{dx} = f(x) g(y)$

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx \quad / \int \text{интегралимо}$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx$$

опште решење: $\boxed{G(y) = F(x) + C}$ ⊛

Уколико је могуће, сада треба изразити y преко x, али чак и ако то није могуће, ⊛ се сматра општим решењем.

! приликом дељења са $g(y)$ могли смо „изгубити" неко решење, па је битно проверити на крају и додати га.

II ЛИНЕАРНА ДЈ првог реда

облик: $\boxed{y' + P(x) \cdot y = Q(x)}$

опште решење: $y = e^{-\int P(x)dx} \left(c + \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx \right), \ c \in \mathbb{R}$

($\int P(x)dx$ означава једну прим. фју фје $P(x)$,
$\int Q(x)dx$ – – || – – – || – – $Q(x)$)

III БЕРНУЛИЈЕВА ЈЕДНАЧИНА

облик: $\boxed{y' + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^{\alpha}}$ за $\alpha \in \mathbb{R}$

(за $\alpha = 0, 1$ заправо је линеарна, па обично претпостављамо $\alpha \notin \{0, 1\}$)

множимо са $y^{-\alpha}$: $\quad y^{-\alpha} \cdot y' + P(x) \cdot y^{1-\alpha} = Q(x)$

смена $z(x) = y^{1-\alpha}(x)$: $\quad z'(x) = (1-\alpha) y^{-\alpha} \cdot y'$

$\Rightarrow$ своди се на: $\dfrac{1}{1-\alpha} z' + P(x) \cdot z = Q(x)$ што је линеарна ДЈ.
коју знамо да решимо

НАПОМЕНА: за $\alpha > 0$ код Бернулијеве д.ј. решење $y=0$ се „изгуби"
приликом смене $z(x) = y^{1-\alpha}(x)$
па га треба додати на крају!

IV ТОТАЛНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛ

облик: $M(x,y) + N(x,y) \cdot y' = 0$

тј. $M(x,y) + N(x,y)\dfrac{dy}{dx} = 0$ или $\boxed{M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0}$

Ако постоји функција $f(x,y)$ за коју важи:

$$\boxed{f'_x = M \quad f'_y = N}$$

онда је опште решење имплицитно задато са:

$$\boxed{f(x,y) = c}\ c \in \mathbb{R}$$

Неопходан услов ако је f непр. диференцијабилна:

$$f''_{xy} = f''_{yx} \quad \text{тј.} \quad M'_y = N'_x$$

V СМЕНА ПРОМЕНЉИВЕ

ту има много случајева и идеја :)

пример 1 ако је облика

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \rightarrow \text{смена } \boxed{z(x) = \frac{y}{x}}$$

пример 2 $y' = f(ax+by+c) \rightarrow$ смена $\boxed{z(x) = ax+by+c}$

1 Решити диференцијалну једначину:

$$\boxed{y'+3x^2y-x^2y^2=0} \quad (*)$$

Запишимо ову једначину у погоднијем облику:

$$y'=-3x^2y+x^2y^2$$

$$\frac{dy}{dx}=x^2\cdot(y^2-3y)$$

$$\boxed{\frac{dy}{y^2-3y}=x^2dx}$$

приметујемо да имамо једначину која раздваја променљиве.

$y\neq 0,3$

$$\Rightarrow \int\frac{dy}{y^2-3y}=\int x^2dx$$

$$\int\frac{1}{3}\left(\frac{1}{y-3}-\frac{1}{y}\right)dy=\frac{x^3}{3}+C \qquad C\text{-константа} \in \mathbb{R} \qquad \int\frac{1}{t}dt=\ln|t|$$

$$\frac{1}{3}(\ln|y-3|-\ln|y|)=\frac{x^3}{3}+C$$

$$\ln\sqrt[3]{\left|\frac{y-3}{y}\right|}=\frac{x^3}{3}+C \qquad /\text{дижемо на } e$$

$$\Rightarrow \left|\frac{y-3}{y}\right|^{1/3}=e^{\frac{x^3}{3}}\cdot e^{C} \Rightarrow \left|\frac{y-3}{y}\right|=e^{x^3}\cdot e^{3C}=C_1, \boxed{C_1>0}$$

Решавамо $\boxed{\left|\frac{y-3}{y}\right|=C_1\cdot e^{x^3}}$ (1)

Имамо случајеве $y\in(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$ или $y\in(0,3)$ за знак $\frac{y-3}{y}$:

1° $y\in(-\infty,0)\cup(3,+\infty) \rightarrow \frac{y-3}{y}>0$

(1) постаје: $\frac{y-3}{y}=C_1\cdot e^{x^3} \rightarrow 1-\frac{3}{y}=C_1\cdot e^{x^3} \rightarrow 1-C_1\cdot e^{x^3}=\frac{3}{y} \rightarrow \boxed{y=\frac{3}{1-C_1\cdot e^{x^3}}}\ \boxed{C_1>0}$

заиста проверавамо:

за $C_1\cdot e^{x^3}>1 \rightarrow y<0$, за $0<C_1\cdot e^{x^3}<1 \rightarrow y>3$ ✓

2° $y\in(0,3) \rightarrow \frac{y-3}{y}<0$

(1) постаје: $\frac{3-y}{y}=C_1\cdot e^{x^3} \rightarrow \frac{3}{y}-1=C_1\cdot e^{x^3} \rightarrow \boxed{y=\frac{3}{1+C_1\cdot e^{x^3}}}\ \boxed{C_1>0}$

заиста $y\in(0,3)$

1°: $y=\frac{3}{1-C_1\cdot e^{x^3}}$, $C_1>0$, 2°: $y=\frac{3}{1+C_1\cdot e^{x^3}}$, $C_1>0$

можемо објединити као: $\boxed{y=\frac{3}{1-C\cdot e^{x^3}},\ C\in\mathbb{R},\ C\neq 0}$

Остаје још да проверимо да ли смо „изгубили" неко решење при дељењу са y^2-3y

тј. $y=0$ и $y=3$:

① $y=0$: ⊛ постаје: $0+3x^2\cdot 0-x^2\cdot 0=0$ ✓

Важи! => јесте решење.

Да ли је део општег за неку вредност c?

$\frac{3}{1-c\cdot e^{x^3}}=0$ X није => $\boxed{y=0}$ је сингуларно решење (решење које није део општег решења)

② $y=3$: ⊛ постаје: $0+3x^2\cdot 3-x^2\cdot 3^2=0$ ✓

Важи, па такође јесте решење.

Да ли је део општег за неко c?

$\frac{3}{1-c\cdot e^{x^3}}=3$ Да, за $\boxed{c=0}$! ← додајемо и $c=0$ за могуће константе

Дакле: решења су: $\boxed{y(x)=\frac{3}{1-c\cdot e^{x^3}}}$ и $\boxed{y=0}$ □

$c\in\mathbb{R}$ const

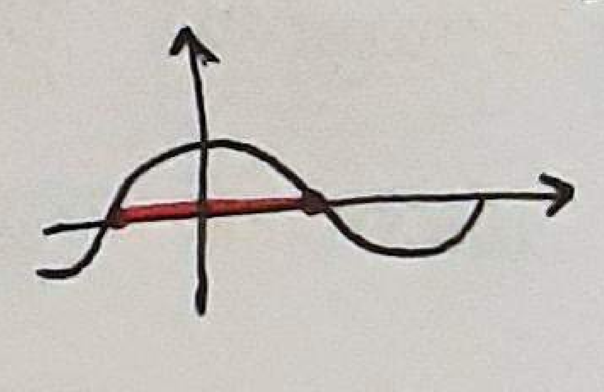
2. Одредити решење ДЈ: $\boxed{y'\cos x-2y\sin x=\cos x}$ које задовољава услов $y(\frac{\pi}{4})=\frac{\pi+2}{4}$.

$y'\cdot\cos x-2y\sin x=\cos x \quad /:\cos x\ , \quad \cos x\neq 0$

$y'-2y\cdot \operatorname{tg}x=1$ ← ово је линеарна ДЈ $y'+P(x)\cdot y=Q(x)$

$\boxed{y'+(-2\operatorname{tg}x)\cdot y=1}$ где је $\boxed{\begin{array}{l}P(x)=-2\operatorname{tg}x\\ Q(x)=1\end{array}}$

Пошто је $\cos x\neq 0$, а желимо да имамо тачку $\frac{\pi}{4}$, ограничимо се на $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$



Знамо формулу за опште решење:

$$y=e^{-\int P(x)dx}\cdot\left(c+\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}dx\right) \quad (1)$$

$$\boxed{\int p(x)dx} = -2\int \operatorname{tg} x\, dx = -2\int \frac{\overset{-dt}{\sin x\, dx}}{\underset{t}{\cos x}} = 2\cdot \ln|\cos x| + C$$

треба нам само једна прим. ф-ја $\rightarrow 2\cdot\ln|\cos x|$

за $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ $\cos x>0 \rightarrow \boxed{2\ln(\cos x)}$ узимамо за $\int p(x)dx$

$\Rightarrow$ (1) постаје:

$$y = e^{-2\ln\cos x}\cdot\left(C+\int 1\cdot e^{2\ln\cos x}dx\right)$$

$$= \frac{1}{(\cos x)^2}\cdot\left(C+\int\cos^2 x\, dx\right)$$

$$= \frac{1}{(\cos x)^2}\cdot\left(C+\int\frac{1+\cos 2x}{2}dx\right)$$

$$= \frac{1}{(\cos x)^2}\cdot\left(C+\frac{1}{2}x+\frac{\sin 2x}{4}\right)$$

$\Rightarrow$ опште решење је $\boxed{y=\frac{1}{(\cos x)^2}\left(\frac{1}{2}x+\frac{\sin 2x}{4}+C\right)}$

оно које задовољава услов $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi+2}{4}$:

$$\frac{\pi+2}{4} = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)^2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{\sin\pi/2}{4}+C\right)$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}+C\right) = 2\left(\frac{\pi+2}{8}+C\right) = \frac{\pi+2}{4}+2C$$

$\Rightarrow \boxed{C=0}$

Дакле тражено решење је:

$$\boxed{y(x)=\frac{1}{(\cos x)^2}\cdot\left(\frac{1}{2}x+\frac{\sin 2x}{4}\right)}$$

$\boxed{3.}$ Решити ДЈ: $\boxed{3xy' - 3xy^4 \ln x - y = 0}$

Запишимо је мало другачије:

$$3x \cdot y' - y = 3xy^4 \ln x \quad /: 3x$$

$$y' - \frac{1}{3x} \cdot y = \ln x \cdot \underbrace{y^4}$$

ово је Бернулијева једначина за $\alpha = 4$.

<u>множимо са y^{-4}</u>: $\quad y' \cdot y^{-4} - \frac{1}{3x} \cdot y^{-3} = \ln x \quad (1)$

<u>смена</u> $z(x) = y^{1-\alpha}(x) = y^{-3}(x)$

$$\boxed{z(x) = y^{-3}(x)}$$

$$z'(x) = (-3) \cdot y^{-4}(x) \cdot y'(x)$$

$\Rightarrow$ (1) постаје: $-\frac{1}{3} z' - \frac{1}{3x} \cdot z = \ln x \quad / \cdot (-3)$

$$\boxed{z' + \frac{1}{x} \cdot z = -3 \ln x}$$

линеарна ДЈ
$P(x) = \frac{1}{x}$, $Q(x) = -3 \ln x$

формула: $z(x) = e^{-\int P(x)dx} \left(c + \int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx \right)$

$$= e^{-\int \frac{1}{x}dx} \left(c + \int -3\ln x \cdot e^{\int \frac{1}{x}dx} dx \right)$$

На почетку смо могли видети област дефинисаности: због $\ln x \rightarrow$ <u>$x > 0$</u>

$\Rightarrow \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C = \ln x + C$

узимамо једну: $\boxed{\ln x}$

$$\Rightarrow z(x) = e^{-\ln x} \left(c + \int -3\ln x \cdot e^{\ln x} dx \right) = \frac{1}{x} \left(c - 3 \underbrace{\int x \ln x \, dx} \right)$$

овај интеграл I решавамо <u>парц. интеграцијом</u>

$$I = \int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} dx = \boxed{\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}}$$

$\left(\begin{array}{l} u = \ln x \rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dv = x dx \rightarrow v = x^2/2 \end{array} \right)$

$$\Rightarrow z(x) = \frac{1}{x} \left(c - \frac{3}{2} x^2 \ln x + \frac{3}{4} x^2 \right) \xrightarrow[y = z^{-1/3}]{z = y^{-3}} \boxed{y(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{c - \frac{3}{4}x^2(2\ln x - 1)}}} \quad c \in \mathbb{R}$$

<u>Не смемо заборавити</u> (делили смо са y^4) решење $\boxed{y = 0}$

Лако проверавамо да $y=0$ јесте решење полазне једначине: $0 \cdot 3x - 3x \ln x \cdot 0 - 0 = 0$ ✓ $\square$

$\boxed{4}$ Решити ДЈ. $\boxed{y' = \frac{x - y^2\cos^2 x}{2xy\cos^2 x}}$ за $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, $y > 0$

$$y' = \frac{1}{2\cos^2 x}\cdot\frac{1}{y} - y\cdot\frac{1}{2x}$$

$$y' + \frac{1}{2x}\cdot y = \frac{1}{2\cos^2 x}\cdot y^{-1}$$

Бернулијева једначина за $\boxed{\alpha = -1}$

па множимо са y:

$$\Rightarrow \quad y'\cdot y + \frac{1}{2x}\cdot y^2 = \frac{1}{2\cos^2 x}$$

смена: $z(x) = y^{1-\alpha}(x) = y^2(x) \rightarrow \underline{z'(x) = 2y\cdot y'}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}z' + \frac{1}{2x}\cdot z = \frac{1}{2\cos^2 x} \qquad /\cdot 2$$

$\boxed{z' + \frac{1}{x}\cdot z = \frac{1}{\cos^2 x}}$ добили смо линеарну ДЈ. $z' + P(x)\cdot z = Q(x)$

$P(x) = \frac{1}{x}$ $\quad Q(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

формула

$$\Rightarrow \quad z(x) = e^{-\int P(x)dx}\left(C + \int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}dx\right)$$

$$= e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left(C + \int\frac{1}{\cos^2 x}\cdot e^{\int\frac{1}{x}dx}dx\right) \qquad \int\frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$

$$= e^{-\ln|x|}\left(C + \int\frac{1}{\cos^2 x}\cdot e^{\ln|x|}dx\right)$$

$$\overset{x\in(0,\frac{\pi}{2}) \text{ па } |x| = x}{=\!=} \frac{1}{e^{\ln x}}\left(C + \int\frac{x}{\cos^2 x}dx\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left(C + \underbrace{\int\frac{x}{\cos^2 x}dx}\right)$$

како рачунамо ове интеграле?

парцијална интеграција:

$u = x \rightarrow du = dx$

$dv = \frac{dx}{\cos^2 x} \rightarrow v = \operatorname{tg}x$

$$\int\frac{x\,dx}{\cos^2 x} = x\cdot\operatorname{tg}x - \int\operatorname{tg}x\,dx = x\cdot\operatorname{tg}x + \underbrace{\int\frac{-\sin x\,dx}{\cos x}}_{\ln|\cos x| \underset{x\in(0,\frac{\pi}{2})}{=} \ln(\cos x)} = \underline{\underline{x\operatorname{tg}x + \ln(\cos x)}}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{z(x)}_{y^2(x)} = \frac{1}{x}\left(C + x\operatorname{tg}x + \ln(\cos x)\right)$$

$$\overset{y>0}{\Longrightarrow} \quad \boxed{y(x) = \sqrt{\frac{1}{x}\left(C + x\operatorname{tg}x + \ln(\cos x)\right)}}$$

$\square$

5. Решити ДЈ: $\boxed{x\cdot(y^2+1)dx + (x^2y+2y^3)dy=0}$

ово је једначина са тоталним диференцијалом:

$$M(x,y)=xy^2+x$$
$$N(x,y)=x^2y+2y^3$$

Са предавања имамо тврђење:

Ако су M, N, M'_y и N'_x непрекидне функције на просто повезаној области у $\mathbb{R}^2$ и ако важи $M'_y=N'_x$, тада постоји диференцијабилна фја $f(x,y)$ на тој области за коју важи:

$$f'_x(x,y)=M(x,y) \quad (1)$$
$$f'_y(x,y)=N(x,y). \quad (2)$$

→ тада наш је опште решење $\underline{f(x,y)=C,\ C\in\mathbb{R}}$.

$\boxed{\text{овде}}$

M и N су непрекидне и диф. на $\mathbb{R}^2$

$M'_y=2xy$, $N'_x=2xy$ > непр и $M'_y=N'_x$ ✓

$\Rightarrow \boxed{\exists \text{ тражено } f}$

$\boxed{\text{Како одређујемо } f}$

$$f'_x \overset{(1)}{=} M(x,y)=xy^2+x \qquad \int dx$$

$$\underbrace{\int f'_x\,dx}_{\substack{\text{ово је}\\ f(x,y)+\varphi(y)}} = \int(xy^2+x)\,dx = y^2\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}+C$$

$\varphi(y)$ зависи само од y

$$\Rightarrow \boxed{f(x,y)=\frac{x^2}{2}(y^2+1)+\varphi_1(y)} \quad (3)$$

Сада рачунамо: $f'_y = x^2 y+\varphi_1'(y) \overset{(2)}{=} N(x,y) = x^2y+2y^3$

$$\Rightarrow \varphi_1'(y)=2y^3 \quad /\int dy$$

$$\varphi_1(y)=\frac{2}{4}y^4+C \qquad C\in\mathbb{R} \text{ const}$$

$$\boxed{\varphi_1(y)=\frac{y^4}{2}+C} \quad (4)$$

$$(3)(4) \Rightarrow f(x,y)=\frac{x^2}{2}(y^2+1)+\frac{y^4}{2}+C$$

знамо да је опште решење дато са $f(x,y)=C$ const

$\Rightarrow$ опште: $\frac{x^2}{2}(y^2+1)+\frac{y^4}{2}=C \quad /\cdot 2$ $(2C\in\mathbb{R})$

опште решење: $\boxed{x^2(y^2+1)+y^4=C}$, $C\in\mathbb{R}$ □

6 Решити ДЈ: $\boxed{\frac{1}{x}-\frac{y^2}{(x-y)^2}+\left(\frac{x^2}{(x-y)^2}-\frac{1}{y}\right)\cdot y'=0}$

Запишимо мало другачије: $y'=\frac{dy}{dx}$

$$\frac{1}{x}-\frac{y^2}{(x-y)^2}+\left(\frac{x^2}{(x-y)^2}-\frac{1}{y}\right)\frac{dy}{dx}=0 \quad /\cdot dx$$

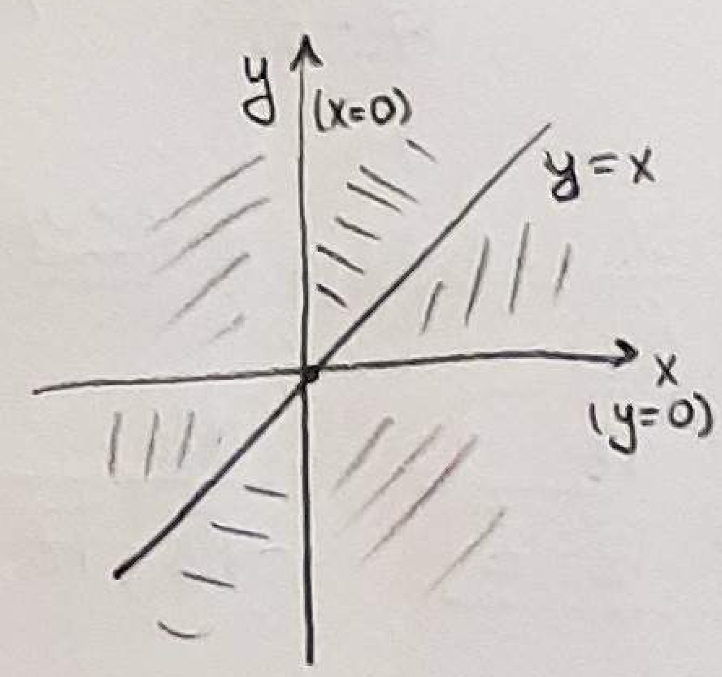
$$\boxed{\underbrace{\left(\frac{1}{x}-\frac{y^2}{(x-y)^2}\right)}_{M(x,y)}dx+\underbrace{\left(\frac{x^2}{(x-y)^2}-\frac{1}{y}\right)}_{N(x,y)}dy=0}$$

једначина са тоталним диференцијалом

$$M'_y=-\frac{2y(x-y)^2-y^2\cdot 2(x-y)\cdot(-1)}{(x-y)^4}=-\frac{2(x-y)\cdot(y(x-y)+y^2)}{(x-y)^4}=-\frac{2(x-y)\cdot xy}{(x-y)^4}=-\frac{2xy}{(x-y)^3}$$

$$N'_x=\frac{2x(x-y)^2-x^2\cdot 2(x-y)}{(x-y)^4}=2\,\frac{x(x-y)-x^2}{(x-y)^3}=-\frac{2xy}{(x-y)^3}$$

$\boxed{M'_y=N'_x}$



$M'_y=N'_x$, M, N, M'_y, N'_x непрекидне на свакој од просто-повезаних области које чине $D_M\cap D_N$ $(x\neq 0, y\neq 0, x\neq y)$

тврд5.
$\Rightarrow$ на свакој од ових области постоји ф-ја f за коју важи $\boxed{f'_x=M,\ f'_y=N}$

Одредимо f $\quad f'_x=M=\frac{1}{x}-\frac{y^2}{(x-y)^2} \quad /\int dx$

$$\int f'_x\,dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{y^2}{(x-y)^2}\right)dx=\ln|x|+y^2\cdot\frac{1}{x-y}+\underbrace{\varphi(y)}_{\text{зависи само од } y}$$

$$\Rightarrow f(x,y)=\ln|x|+\frac{y^2}{x-y}+\varphi(y) \quad (1)$$

$$\Rightarrow f'_y=\frac{2y\cdot(x-y)-y^2\cdot(-1)}{(x-y)^2}+\varphi'(y)=\frac{2xy-y^2}{(x-y)^2}+\varphi'(y)$$

$\overset{=}{N}$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{(x-y)^2}-\frac{1}{y}=\frac{2xy-y^2}{(x-y)^2}+\varphi'(y)$$

$$\Rightarrow \varphi'(y)=\frac{x^2+y^2-2xy}{(x-y)^2}-\frac{1}{y}=\frac{(x-y)^2}{(x-y)^2}-\frac{1}{y}=1-\frac{1}{y} \quad /\int dy$$

$$\Rightarrow \varphi(y)=\int\left(1-\frac{1}{y}\right)dy=y-\ln|y|+C$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \boxed{f(x,y)}=\ln|x|+\frac{y^2}{x-y}+y-\ln|y|+C=\ln\left|\frac{x}{y}\right|+\frac{y^2+y(x-y)}{x-y}+C=\boxed{\ln\left|\frac{x}{y}\right|+\frac{xy}{x-y}+C}$$

Опште решење: $f(x,y)=C$: $\boxed{\ln\left|\frac{x}{y}\right|+\frac{xy}{x-y}=C}$ □

$\boxed{7.}$ Решити ДЈ: $\boxed{y' = \sqrt{\frac{y}{x}}}$, $x>0$ ⊛

Природно је увести смену $\boxed{z(x) = \frac{y(x)}{x}}$

$\Rightarrow z \cdot x = y$

$\Rightarrow \boxed{y' = z' \cdot x + z}$

⊛ се своди на: $z' \cdot x + z = \sqrt{z}$

$$\boxed{z' = (\sqrt{z} - z) \cdot \frac{1}{x}}$$ раздваја променљиве 🙂

$$\frac{dz}{dx} = (\sqrt{z} - z) \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{dz}{\sqrt{z} - z} = \frac{dx}{x} \quad / \int$$

десно: $\boxed{\int \frac{dx}{x}} = \ln|x| + C \overset{x>0}{=\!=} \ln x + C$

лево: $\boxed{\int \frac{dz}{\sqrt{z} - z}} = \int \frac{dz}{-\sqrt{z}(\sqrt{z}-1)} \left(\begin{array}{l} \text{смена } t = \sqrt{z} - 1 \\ dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{z}} dz \end{array} \right) = \int \frac{-2\,dt}{t} = -2\ln|t| + C$

$$= -2\ln|\sqrt{z} - 1| + C = \ln|\sqrt{z}-1|^{-2} + C$$

$$= \ln \frac{1}{(\sqrt{z}-1)^2} + C$$

лево = десно: $\ln \frac{1}{(\sqrt{z}-1)^2} = \ln x + C$ (довољно константа $C \in \mathbb{R}$ са једне стране)

степенујемо на e:

$$\frac{1}{(\sqrt{z}-1)^2} = x \cdot e^C = C_1 > 0$$

$$\frac{1}{(\sqrt{z}-1)^2} = C_1 \cdot x$$ – решавамо по z, па по y

$$\Rightarrow |\sqrt{z} - 1| = \frac{1}{\sqrt{C_1 \cdot x}}$$

$$\left|\sqrt{\frac{y}{x}} - 1\right| = \frac{1}{\sqrt{C_1 \cdot x}} \quad / \cdot \sqrt{x}$$ (пошто $x>0$, и $y>0$)

$$|\sqrt{y} - \sqrt{x}| = \frac{1}{\sqrt{C_1}} \Rightarrow \sqrt{y} = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{C_1}} \lor \sqrt{y} = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{C_1}}$$

$$y = (\sqrt{x} + C)^2 \lor y = (\sqrt{x} - C)^2, \text{ за } C > 0$$

Претходне две релације можемо приказати као једну:

$$\boxed{y=(\sqrt{x}-c)^2,\quad c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}} \quad (**)$$

Остаје још да проверимо да ли смо „изгубили" нека решења при дељењу са $\boxed{\sqrt{z}-z}$

$\sqrt{z}-z=0 \iff \sqrt{z}=z \iff z=0 \lor z=1$

$\frac{y}{x}=0 \lor \frac{y}{x}=1$

$\underline{\underline{y=0}} \quad \underline{\underline{y=x}}$ ← кандидати

① $y=0$: $\quad y'=0$ → важи $y'=\sqrt{\frac{y}{x}}$ $\quad 0=0$ ✓

$\Rightarrow \boxed{y=0}$ јесте решење

није део општег $\quad (0=(\sqrt{x}-c)^2$ ✗ $)$

тј. ово је сингуларно решење

② $y=x$: $\quad y'=1$ $\quad y'=\sqrt{\frac{y}{x}} \iff 1=\sqrt{\frac{x}{x}}$ ✓ јесте решење ✓

$(y(x)=x)$

Да ли је део општег?

$y=(\sqrt{x}-c)^2=x \iff \boxed{c=0}$ јесте, за $c=0$

$\Rightarrow$ можемо „додати" и вредност $c=0$ у $(**)$

$\Rightarrow$ Сва решења су дата са:

$$\boxed{y=(\sqrt{x}-c)^2,\ c\in\mathbb{R}} \quad и \quad \boxed{y=0}$$

□

$\boxed{\text{II НАЧИН}}$ $\quad y'=\sqrt{\frac{y}{x}}$ напишемо као:

$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$ ← $x>0$ па и $y>0$

$\frac{dy}{\sqrt{y}}=\frac{dx}{\sqrt{x}} \quad /\int$

$2\sqrt{y}=2\sqrt{x}+C,\ C\in\mathbb{R} \quad \rightarrow \quad \sqrt{y}=\sqrt{x}+C_1$

$\rightarrow \boxed{y=(\sqrt{x}+c)^2,\ c\in\mathbb{R}}$ $\quad$ (и још $\underline{\underline{y=0}}$)

△