ВЕЖБЕ за среду 6.5.

~ Површински интеграли ~

Имамо: • површински интеграл функције – I врсте

• површински интеграл векторског поља – II врсте

~ Површински интеграл I врсте ~

Потребна нам је параметризација површи:

$S \subset \mathbb{R}^3$ површ

$r : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$ непрекидно-диференцијабилно, 1-1 на D, D-област

$r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

r је параметризација површи

r је регуларна ако су вектори $r'_u(u,v)$ и $r'_v(u,v)$ линеарно независни за $\forall (u,v) \in D$.

$r'_u(u,v) = (x'_u(u,v), y'_u(u,v), z'_u(u,v))$

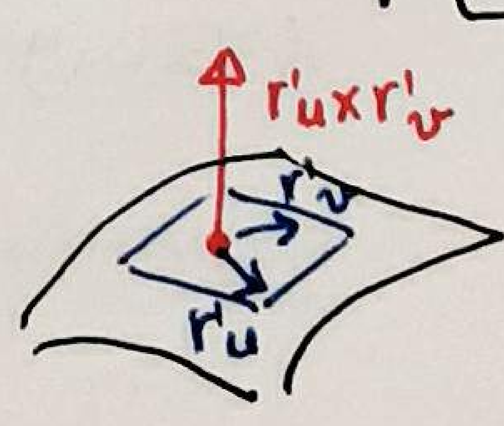
$r'_v(u,v) = (x'_v(u,v), y'_v(u,v), z'_v(u,v))$

$\boxed{\text{ВАЖНО}}$ Разумети и научити параметризације важних површи (стр. 90. у књизи)

Овде ће нам бити потребан векторски производ:

$r'_u \times r'_v$ ← подсетимо се да га рачунамо као: $\begin{vmatrix} i & j & k \\ \multicolumn{3}{c}{r'_u} \\ \multicolumn{3}{c}{r'_v} \end{vmatrix}$

ово је вектор нормале на дату површ у посматраној тачки



ПОВРШИНСКИ ИНТЕГРАЛ функције $f : S \to \mathbb{R}$ (S-површ):

$$\iint_S f\,dS = \iint_{\overline{D}} f(r(u,v)) \cdot \| r'_u(u,v) \times r'_v(u,v) \| \, du\,dv$$

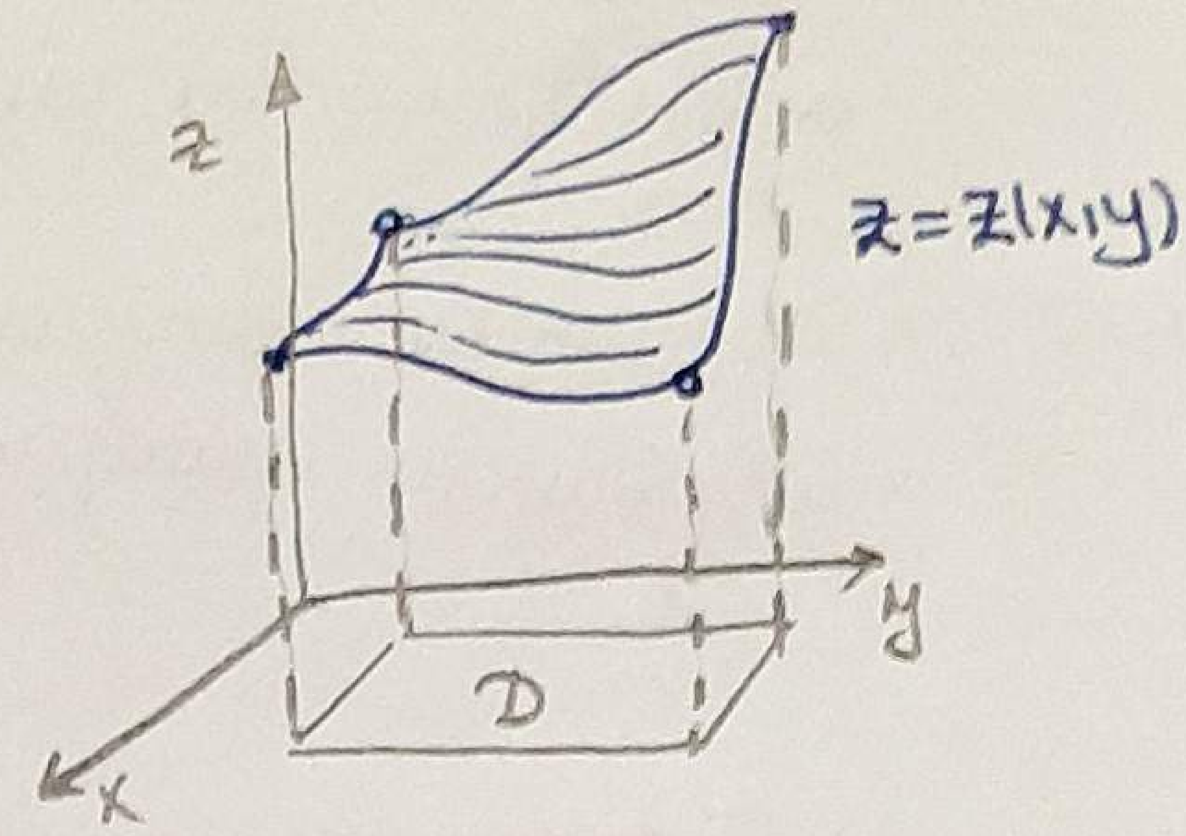
$dS = \| r'_u(u,v) \times r'_v(u,v) \| \, du\,dv$ ЕЛЕМЕНТ ПОВРШИНЕ

ПОВРШИНА ПОВРШИ S: $P(S) = \iint_D \| r'_u(u,v) \times r'_v(u,v) \| \, du\,dv$

(користили смо овде ознаке са предавања, али ћемо од сада писати D уместо $\overline{D}$, као у књизи.

$\boxed{\text{ВАЖАН СЛУЧАЈ}}$: ако је S график неке функције

$$z = z(x,y), \quad (x,y) \in D$$



тада је једна параметризација дата са:

$$r(x,y) = (x, y, z(x,y))$$

па имамо:

$$r'_x = (1, 0, z'_x)$$
$$r'_y = (0, 1, z'_y)$$

$$r'_x \times r'_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & z'_x \\ 0 & 1 & z'_y \end{vmatrix} = (-z'_x, -z'_y, 1)$$

$$\Rightarrow \quad \|r'_x \times r'_y\| = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}$$

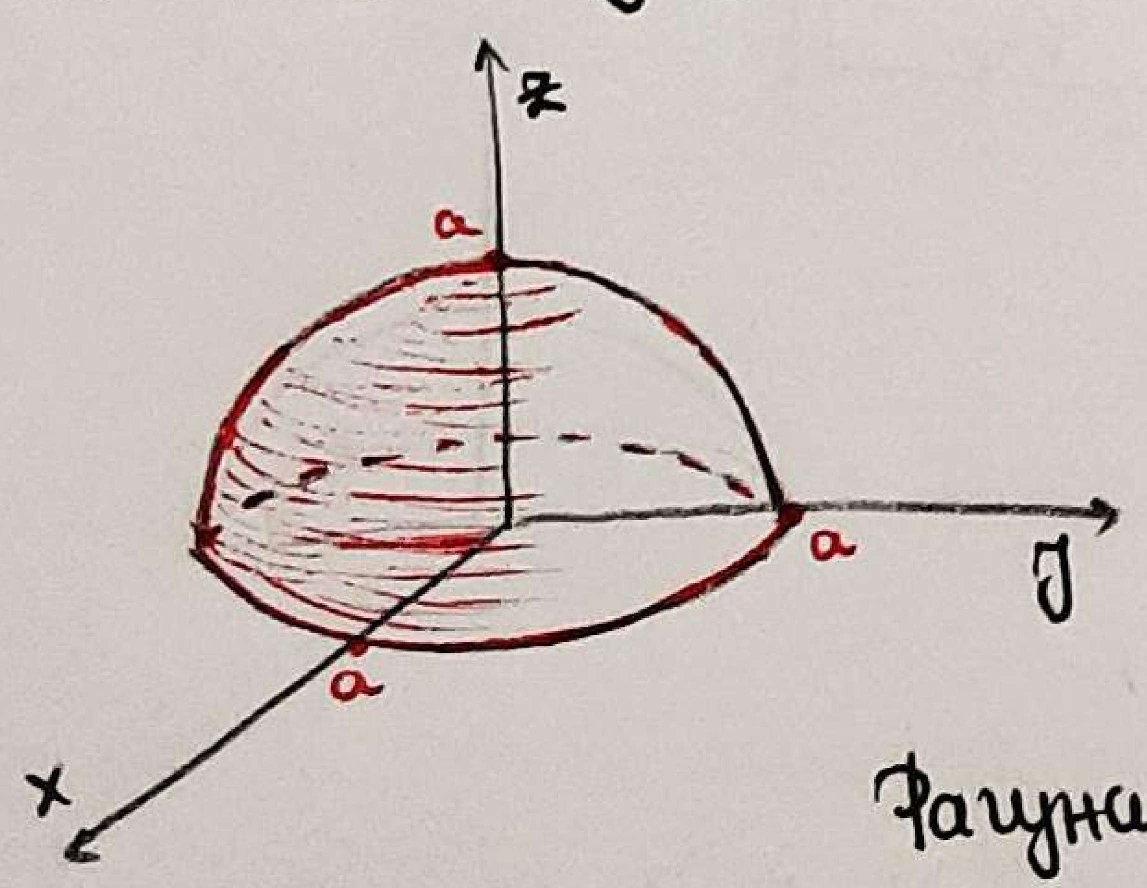
тј. елемент површине је лако изражен: $dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dx\, dy$

$\boxed{1.}$ Израчунати интеграл: $I = \iint\limits_S (x+y+z)\, dS$ где је

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = a^2,\ z \geq 0\}, \quad a > 0.$$

Видимо да је S полусфера (горња) сфере полупречника a са центром у коорд. почетку.

Примећујемо да је можемо параметризовати као график функције:



$$z = z(x,y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

дефинисане на пројекцији ове полусфере на xy-раван:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq a^2\}$$

Рачунамо: $I = \iint\limits_S f(x,y,z)\, dS \qquad f(x,y,z) = x+y+z$

На основу дискусије пре задатка имамо:

$$dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dx\,dy \qquad z'_x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \cdot -2x = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

$$z'_y \overset{\text{слично}}{=} \frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

$$\Rightarrow \quad dS = \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy = \sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy$$

$a>0$

$$\Rightarrow \boxed{dS = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy}$$

Сада рачунамо интеграл:

$$I = \iint_S (x+y+z)\,dS = \iint_D \overbrace{\left(x+y+\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)}^{f} \cdot \overbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy}^{dS}$$

$$= \iint_D \left(\frac{ax}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} + \frac{ay}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} + a\right) dx\,dy$$

Даље рачунамо као стандардан двоструки интеграл на диску D.
тј. уводимо поларне координате:

$x = \rho\cos\theta \qquad 0 \le \rho \le a$

$y = \rho\sin\theta \qquad -\pi \le \theta \le \pi$

тада $x^2+y^2=\rho^2$

Јакобијан: $J=\rho$

$$\Rightarrow I = \int_0^a \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a\cdot\rho\cos\theta}{\sqrt{a^2-\rho^2}} + \frac{a\cdot\rho\cdot\sin\theta}{\sqrt{a^2-\rho^2}} + a \right)\rho\, d\theta \right) d\rho$$

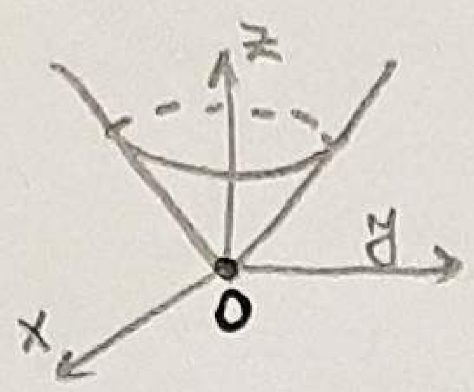
$$= \int_0^a \left(\underbrace{\frac{a\rho^2}{\sqrt{a^2-\rho^2}}}_{\text{конст. по } \theta} \cdot \cancel{\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} (\cos\theta+\sin\theta)\,d\theta}_{=(+\sin\theta-\cos\theta)\big|_{-\pi}^{\pi} = 0}} + a\cdot\rho\cdot\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} d\theta}_{=2\pi} \right) d\rho$$

$$= \int_0^a a\cdot 2\pi\cdot\rho\, d\rho$$

$$= a\cdot 2\pi\cdot\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^a = \boxed{a^3\pi} \quad \square$$

2. Израчунати $I=\iint_S (xy+yz+zx)\,dS$ где је S део конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$ ограничен цилиндром $x^2+y^2=2ax$, $a>0$.

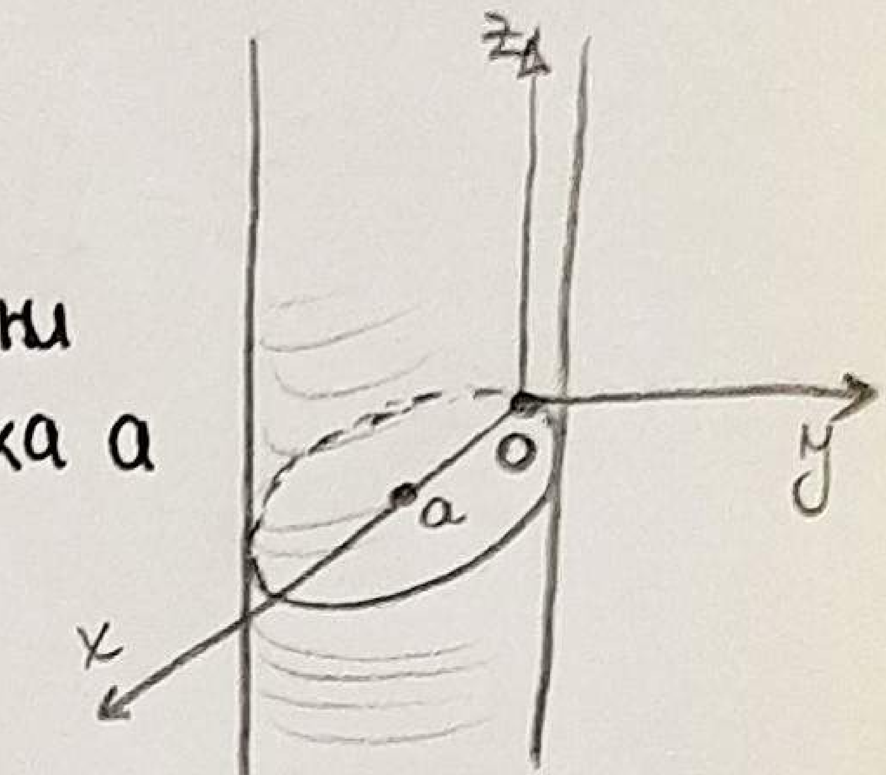
Како изгледа S?

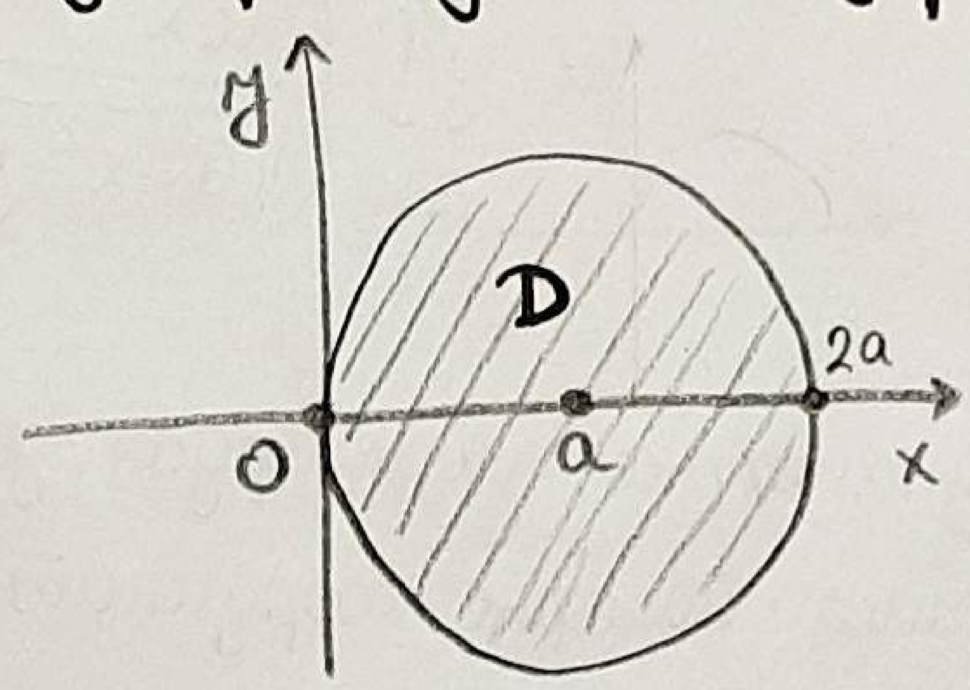


$z=\sqrt{x^2+y^2}$ - конус

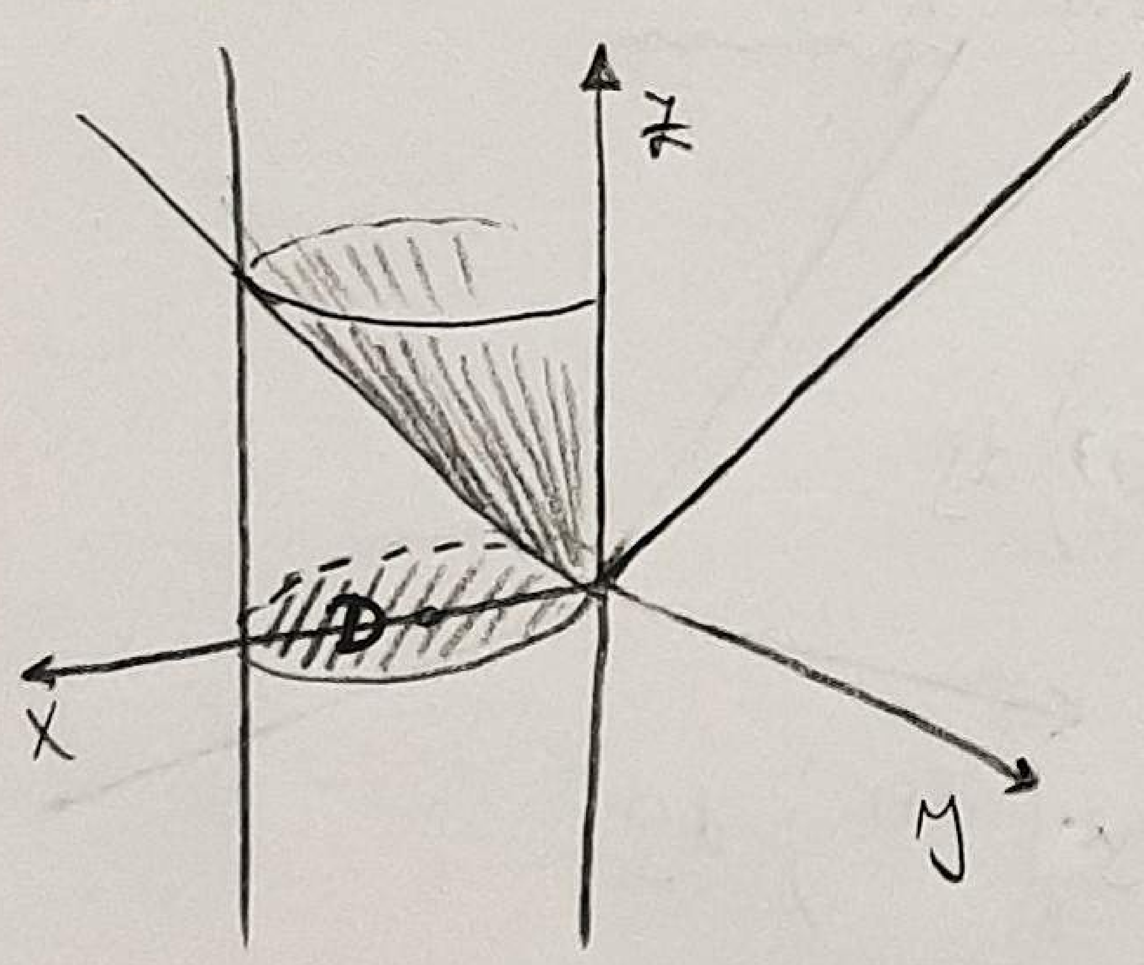
$x^2+y^2=2ax \iff x^2-2ax+a^2+y^2=a^2$

$\iff (x-a)^2+y^2=a^2$ - цилиндар над кругом у xy-равни са центром у $(a,0)$ полупречника a





S је део конуса унутар овог цилиндра:



$\Rightarrow$ можемо параметризовати као график фје

$$z=z(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

где $z: D\to\mathbb{R}$

D је диск у xy-равни са центром у $(a,0)$ полупречника a

Тада:

$$dS=\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dx\,dy \qquad z'_x=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dx\,dy$$

$$\Rightarrow \boxed{dS=\sqrt{2}\,dx\,dy}$$

$$\Rightarrow I=\iint_S (xy+yz+zx)\,dS=\iint_D \left(xy+(x+y)\sqrt{x^2+y^2}\right)\cdot\sqrt{2}\,dx\,dy$$

како решавамо овај двоструки интеграл?

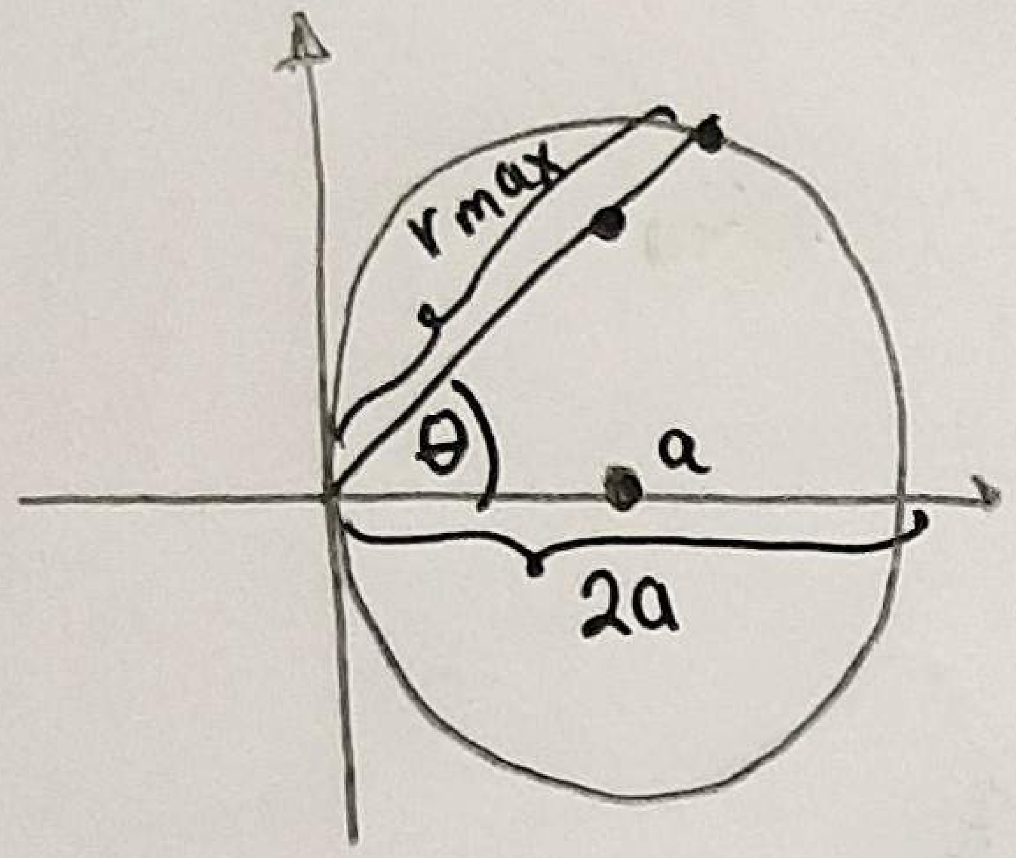
Иако је D „померен" круг, уводимо обичне поларне координате јер нам је под интегралом $\sqrt{x^2+y^2}$ 🙂 ! :

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

Јакобијан $J = r$, $\sqrt{x^2+y^2} = r$

Границе за r и θ?

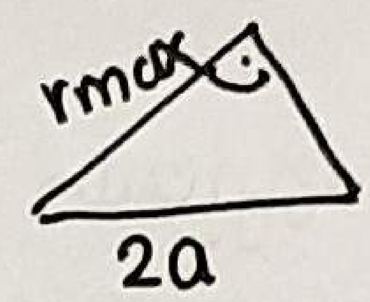


$\boxed{\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$

за фиксирано θ где је r?

$r_{max} = ?$

$r_{max} = 2a \cdot \cos\theta$ из



$\Rightarrow \boxed{r \in [0, 2a\cdot\cos\theta]}$

$$\Rightarrow I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2a\cos\theta} \left(r^2\cos\theta\sin\theta + r\cdot(\cos\theta + \sin\theta)\cdot r\right)\cdot\sqrt{2}\cdot \overset{\text{Јакобијан}}{\overset{\downarrow}{r}}\, dr \right) d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \left((\cos\theta\sin\theta + \cos\theta + \sin\theta)\cdot\sqrt{2} \int_0^{2a\cos\theta} r^3\, dr \right) d\theta$$

$$= \sqrt{2}\cdot\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos\theta\sin\theta + \cos\theta + \sin\theta)\cdot \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^{2a\cos\theta} d\theta$$

$$= \sqrt{2}\cdot\frac{2^4a^4}{4}\cdot\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Big(\underbrace{\cos^5\theta\sin\theta}_{\substack{\text{непарна фја} \\ \Rightarrow \int_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0}} + \cos^5\theta + \underbrace{\sin\theta\cdot\cos^4\theta}_{\substack{\text{непарна фја} \\ \Rightarrow \int_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0}}\Big)\, d\theta$$

$$= 4\sqrt{2}\cdot a^4 \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^5\theta\, d\theta$$

$$= 4\sqrt{2}\cdot a^4 \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1-\sin^2\theta)^2\cdot\cos\theta\, d\theta$$

$t = \sin\theta \in [-1, 1]$

$dt = \cos\theta\, d\theta$

$$= 4\sqrt{2}\cdot a^4 \cdot \int_{-1}^{1} (1-t^2)^2\, dt$$

$$= 4\sqrt{2}\cdot a^4 \cdot \int_{-1}^{1} (1+t^4-2t^2)\, dt$$

$$= 4\sqrt{2}\cdot a^4 \cdot \left.\left(t + \frac{t^5}{5} - \frac{2}{3}t^3\right)\right|_{-1}^{1} \overset{\dots}{=} \frac{64\sqrt{2}}{15}$$

□

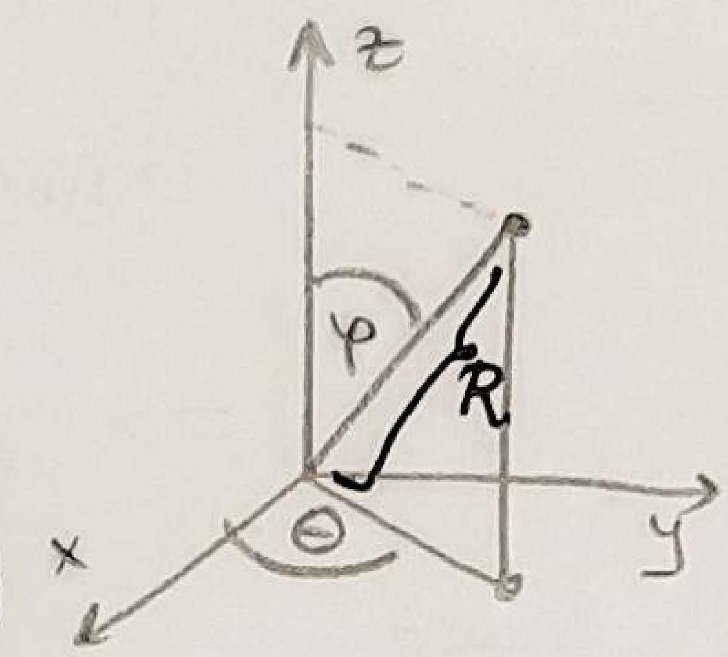
3. Израчунати површину сфере: $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2+z^2=R^2\}$

Ми наравно знамо површину сфере,
али желимо да вежбамо рачунање елемента површине;

За параметризацију $\underline{\underline{r(\theta,\varphi)}}$ имамо

$$P(S) = \iint_D \| r'_\theta \times r'_\varphi \| \, d\theta \, d\varphi$$

како параметризујемо?
сферне координате за фиксирано R:



$$x(\theta,\varphi) = R\cdot \sin\varphi \cdot \cos\theta$$
$$y(\theta,\varphi) = R\cdot \sin\varphi\cdot \sin\theta \qquad \theta\in[-\pi,\pi)$$
$$z(\theta,\varphi) = R\cdot\cos\varphi \qquad \varphi\in[0,\pi]$$

$$\Rightarrow r(\theta,\varphi) = (R\cdot\sin\varphi\cdot\cos\theta,\ R\cdot\sin\varphi\cdot\sin\theta,\ R\cdot\cos\varphi)$$

потребни су нам парцијални изводи:

$$r'_\theta = (-R\sin\varphi\sin\theta,\ R\sin\varphi\cos\theta,\ 0)$$
$$r'_\varphi = (R\cos\varphi\cos\theta,\ R\cos\varphi\sin\theta,\ -R\sin\varphi)$$

$$\Rightarrow r'_\theta \times r'_\varphi = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -R\sin\varphi\sin\theta & R\sin\varphi\cos\theta & 0 \\ R\cos\varphi\cos\theta & R\cos\varphi\sin\theta & -R\sin\varphi \end{vmatrix}$$

$$= \Big(-R^2\cos\theta\sin^2\varphi,\ -R^2\cdot\sin^2\varphi\cdot\sin\theta,\ -R^2\big(\underbrace{\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\theta+\sin\varphi\cos\varphi\cos^2\theta}_{=\sin\varphi\cos\varphi}\big)\Big)$$

$$= -R^2\cdot(\cos\theta\cdot\sin^2\varphi,\ \sin\theta\cdot\sin^2\varphi,\ \sin\varphi\cos\varphi)$$
$$= -R^2\sin\varphi\,(\cos\theta\sin\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\varphi)$$

$$\Rightarrow \|r'_\theta\times r'_\varphi\|^2 = R^4\cdot\sin^2\varphi\cdot\big(\underbrace{\underbrace{\cos^2\theta\sin^2\varphi+\sin^2\theta\sin^2\varphi}_{=\sin^2\varphi}+\cos^2\varphi}_{=1}\big) = R^4\cdot\sin^2\varphi$$

$$\sin\varphi\geq 0 \overset{\sqrt{\ }}{\Rightarrow} \boxed{\|r'_\theta\times r'_\varphi\| = R^2\cdot\sin\varphi}$$ (као Јакобијан за сферне :))

$$\Rightarrow P(S) = \int_{-\pi}^{\pi}\Big(\int_0^{\pi} R^2\sin\varphi\, d\varphi\Big)d\theta = R^2\cdot\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{-\cos\varphi\Big|_0^{\pi}}_{2}\, d\theta = 2R^2\int_{-\pi}^{\pi}d\theta$$

$$= \boxed{4R^2\pi}$$ □

4. Израчунати површину границе тела:

$$T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\leq 1,\ 3x+2y+z\leq 6,\ x+y+z\geq 1\}$$

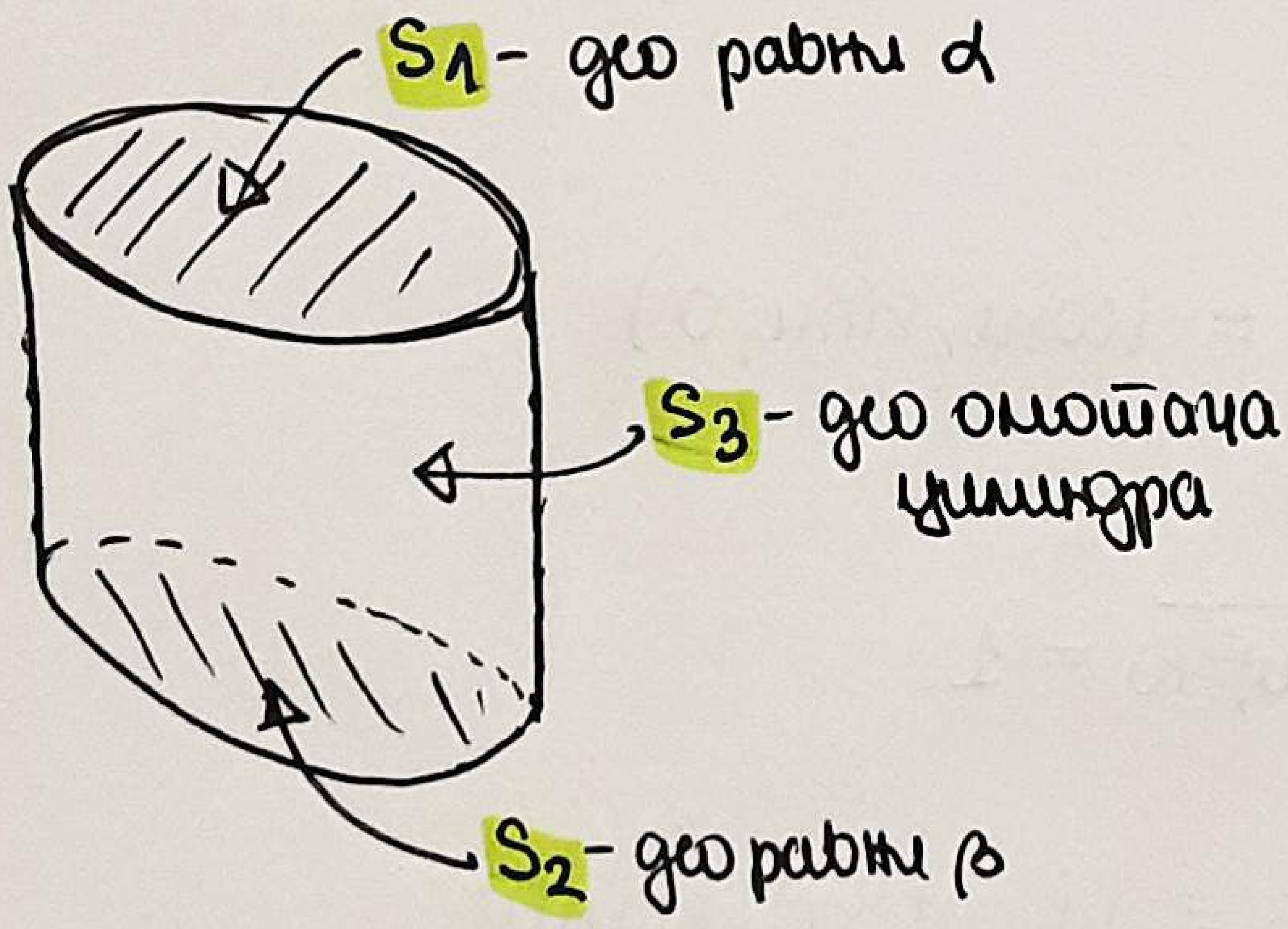
$\underbrace{x^2+y^2\leq 1}$ → унутрашњост цилиндра над диском D са центром у коорд. почетку, полупречника 1

$3x+2y+z\leq 6$ – испод једне равни $\alpha:\ 3x+2y+z-6=0$

$x+y+z\geq 1$ – изнад друге равни $\beta:\ x+y+z-1=0$

⇒ T личи на ваљак, само има искошене основе 🙂 (неформално говорећи)

T:



$S=\partial T$

$\Rightarrow S=S_1\cup S_2\cup S_3$

$P(S)=P(S_1)+P(S_2)+P(S_3)$

па рачунамо ова три површинска интеграла

$\boxed{S_1}$ ово је график фје: $z(x,y)=6-3x-2y$ ← из $3x+2y+z-6=0$

над диском $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 1\}$

$$\Rightarrow P(S_1)=\iint\limits_D \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dx\,dy=\iint\limits_D\sqrt{1+(-3)^2+(-2)^2}\,dx\,dy=\iint\limits_D\sqrt{14}\,dx\,dy$$

$$=\sqrt{14}\underbrace{\iint\limits_D dx\,dy}_{\text{ово је површина D а то је круг}}=\sqrt{14}\cdot P(D)=\sqrt{14}\cdot 1^2\pi=\sqrt{14}\pi$$

$$\boxed{P(S_1)=\sqrt{14}\cdot\pi}$$

$\boxed{S_2}$ потпуно аналогно: $z=1-x-y$ овде, над D

урадити за вежбу ☺

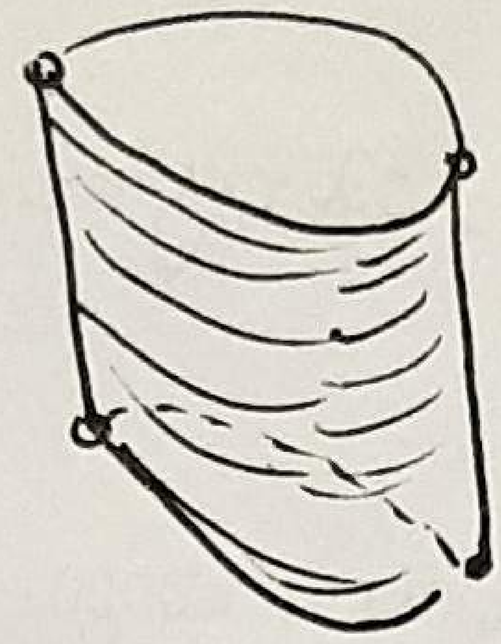
добија се $\boxed{P(S_2)=\pi\cdot\sqrt{3}}$

$\boxed{S_3}$ параметризујемо омотач цилиндра (полупречник базе је $=1$)

$x = \cos u$

$y = \sin u$

$z = v$



параметризација:

$r(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$

Границе: $-\pi \leq u \leq \pi$

а услов за v добијамо из:

$$1 - x - y \leq z \leq 6 - 3x - 2y$$

$$\Rightarrow \quad 1 - \cos u - \sin u \leq v \leq 6 - 3\cos u - 2\sin u$$

Потребно нам је још $\|r'_u \times r'_v\|$:

$$r'_u = (-\sin u, \cos u, 0)$$

$$r'_v = (0, 0, 1)$$

$$r'_u \times r'_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & k \\ -\sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos u, \sin u, 0)$$

$$\Rightarrow \quad \|r'_u \times r'_v\| = \sqrt{(\cos u)^2 + (\sin u)^2 + 0} = 1$$

Сада имамо:

$$P(S_3) = \iint_{S_3} dS = \iint_D \|r'_u \times r'_v\| \, du\, dv$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \Bigg(\int_{1-\cos u - \sin u}^{6 - 3\cos u - 2\sin u} \underbrace{\|r'_u \times r'_v\|}_{=1} \, dv \Bigg) du$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \big((6 - 3\cos u - 2\sin u) - (1 - \cos u - \sin u) \big) \, du$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} (5 - 2\cos u - \sin u) \, du$$

$$= 10\pi$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{P(S_3) = 10\pi}$$

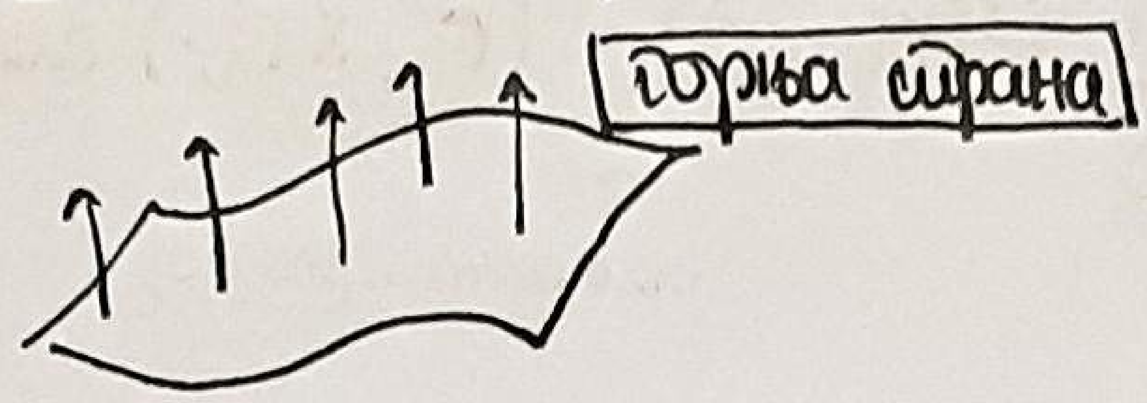
Све заједно: $P(S) = P(S_1) + P(S_2) + P(S_3) = \boxed{\sqrt{14}\pi + \sqrt{3}\pi + 10\pi}$ $\square$

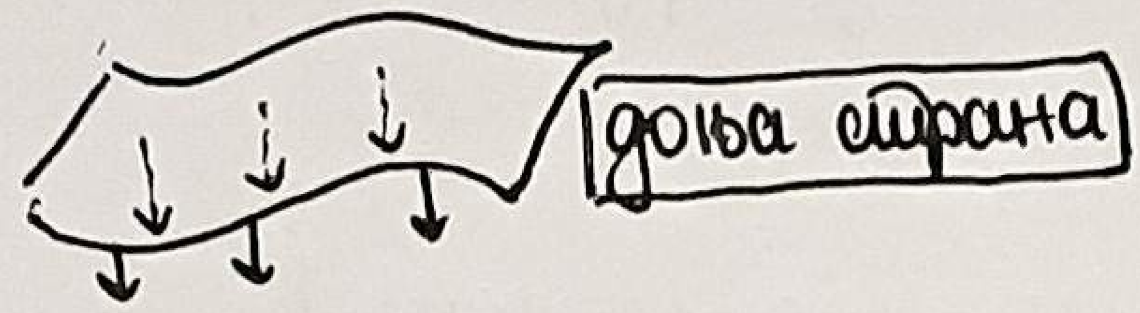
~ Површински интеграл друге врсте ~

* Ово је површински интеграл векторског поља.

* битан појам: оријентација површи - избор једне од две стране површи

• ако је S график функције:





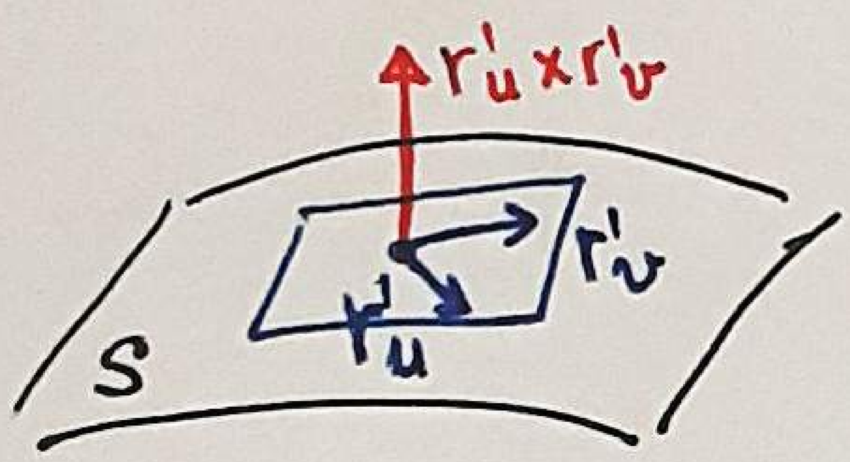
• затворене површи имају спољашњу и унутрашњу страну.

• свака регуларна параметризација површи S

$r: D \to \mathbb{R}^3$ задаје оријентацију површи:

r'_u и r'_v су тангентни вектори → $\boxed{r'_u \times r'_v}$ је вектор нормале

па задаје страну површи



јединични вектор нормале: $\vec{n}: S \to \mathbb{R}^3$

$$\vec{n}(r(u,v)) = \frac{r'_u(u,v) \times r'_v(u,v)}{\| r'_u(u,v) \times r'_v(u,v) \|}$$

ако имамо векторско поље $F: S \to \mathbb{R}^3$ на површи S

$F = (P, Q, R)$ дефинишемо:

$$\iint_S F \cdot \vec{dS} := \iint_S F \cdot \vec{n} \, dS$$

скаларни производ

ПОВРШИНСКИ ИНТЕГРАЛ ВЕКТОРСКОГ ПОЉА F НА ПОВРШ S

ово је површински интеграл прве врсте скаларне функције $F \cdot \vec{n}$

други запис за овај интеграл:

$$\iint_S P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy$$

Став који нам омогућава лакше рачунање:

ако је $r: D \to \mathbb{R}^3$ регуларна параметризација површи S која је глатка и

! оријентисана сагласно са параметризацијом, F - непрекидно вект. поље на S

тада:

$$\iint_S F \cdot \vec{dS} = \iint_D F(r(u,v)) \cdot (r'_u \times r'_v)\, du\, dv$$

скаларни производ

(тиме рачун сводимо на обичан двоструки интеграл)

Важно: пазити да ли је оријентација сагласна!

ако није, имамо минус јер важи:

$$\iint_{S^-} F \cdot \vec{dS} = - \iint_S F \cdot \vec{dS}$$

S^- је иста површ супротно оријентисана

Важан пример: пример 4.37. на сфери

(или пример са предавања)

Ми ћемо радити на неким другим површима, да не понављамо али је веома важно да пређете ове примере да разумете шта се дешава на сфери - она је основни пример ☺.

$\boxed{\text{ОПЕРАТОР } \nabla}$ $\quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ чита се „набла"

• градијент: $\nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$

• дејство на векторско поље: $F=(P,Q,R)$ $\quad \underbrace{F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3}$

скаларни производ $\nabla \cdot F$ је скаларно поље $\underbrace{\nabla \cdot F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}}$ дато са

$$\nabla \cdot F = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (P,Q,R) := \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

тј. $\nabla \cdot F = P'_x + Q'_y + R'_z$

дивергенција векторског поља F

$\operatorname{div} F$

ово нам је потребно за формулацију следеће теореме која даје везу површинског интеграла векторског поља и троструког интеграла у неким ситуацијама.

Теорема (Гаусова формула/формула Гауса и Остроградског)

S-регуларна површ која је граница компактног скупа $T\subset\mathbb{R}^3$: $S=\partial T$.

F-непрекидно-диференцијабилно векторско поље на T , $F=(P,Q,R)$

Тада:

$$\iint_S F\cdot\vec{dS} = \iiint_T \nabla\cdot F\,dxdydz = \iiint_T (P'_x+Q'_y+R'_z)\,dxdydz.$$

при чему на левој страни интегралимо по спољашњој страни површи S.

* подсетимо се још да ако је површ S параметризована као график функције:

$z=z(x,y)$ $\qquad r(x,y)=(x,y,z(x,y))$

тада: $r'_x=(1,0,z'_x)$
$r'_y=(0,1,z'_y)$ и

$$r'_x\times r'_y=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 0 & z'_x\\ 0 & 1 & z'_y\end{vmatrix}=(-z'_x,-z'_y,1)$$

$\boxed{1}$ Израчунати $I=\iint_S F\cdot\vec{dS}$ где је S спољашња страна елипсоида:

$$S:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

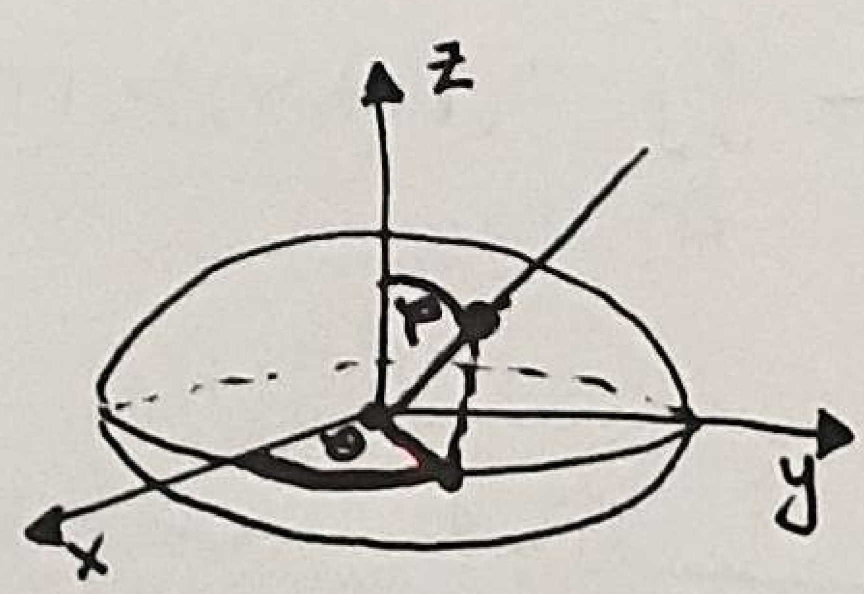
а $F(x,y,z)=\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z}\right)$

Параметризујмо елипсоид по аналогији са сферним координатама (намештамо a, b и c)

$x=a\cdot\sin\varphi\cdot\cos\theta$

$y=b\cdot\sin\varphi\cdot\sin\theta$

$z=c\cdot\cos\varphi$



где: $0\le\varphi\le\pi$, $-\pi\le\theta\le\pi$

Дакле: $r(\theta,\varphi)=(a\cdot\sin\varphi\cdot\cos\theta,\ b\cdot\sin\varphi\cdot\sin\theta,\ c\cdot\cos\varphi)$

$r'_\theta=(-a\sin\varphi\sin\theta,\ b\sin\varphi\cos\theta,\ 0)$

$r'_\varphi=(a\cos\varphi\cos\theta,\ b\cos\varphi\sin\theta,\ -c\sin\varphi)$

За $\vec{dS}$ нам је потребно да одредимо $\boxed{r'_\theta\times r'_\varphi}$

$$\underbrace{r'_\theta \times r'_\varphi}_{\text{вектор нормале}} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -a\sin\theta\sin\varphi & b\cos\theta\sin\varphi & 0 \\ a\cos\theta\cos\varphi & b\sin\theta\cos\varphi & -c\sin\varphi \end{vmatrix}$$

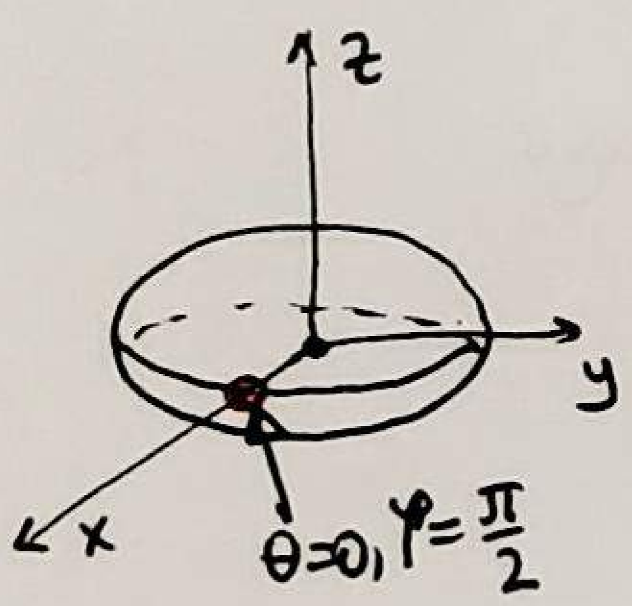
$$= \left(-bc\cos\theta\cdot\sin^2\varphi,\ -ac\sin\theta\sin^2\varphi,\ -ab\,(\underbrace{\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi+\cos^2\theta\cos\varphi\sin\varphi}_{=\sin\varphi\cos\varphi})\right)$$

$$= \left(-bc\cos\theta\cdot\sin^2\varphi,\ -ac\cdot\sin\theta\sin^2\varphi,\ -ab\sin\varphi\cos\varphi\right).$$

Да бисмо применили став о рачунању $\iint_S F\cdot d\vec{S}$, морамо још проверити да ли је оријентација сагласна са параметризацијом, тј. да ли вектори нормале указују на спољашњу страну површи (како се тражи у задатку):

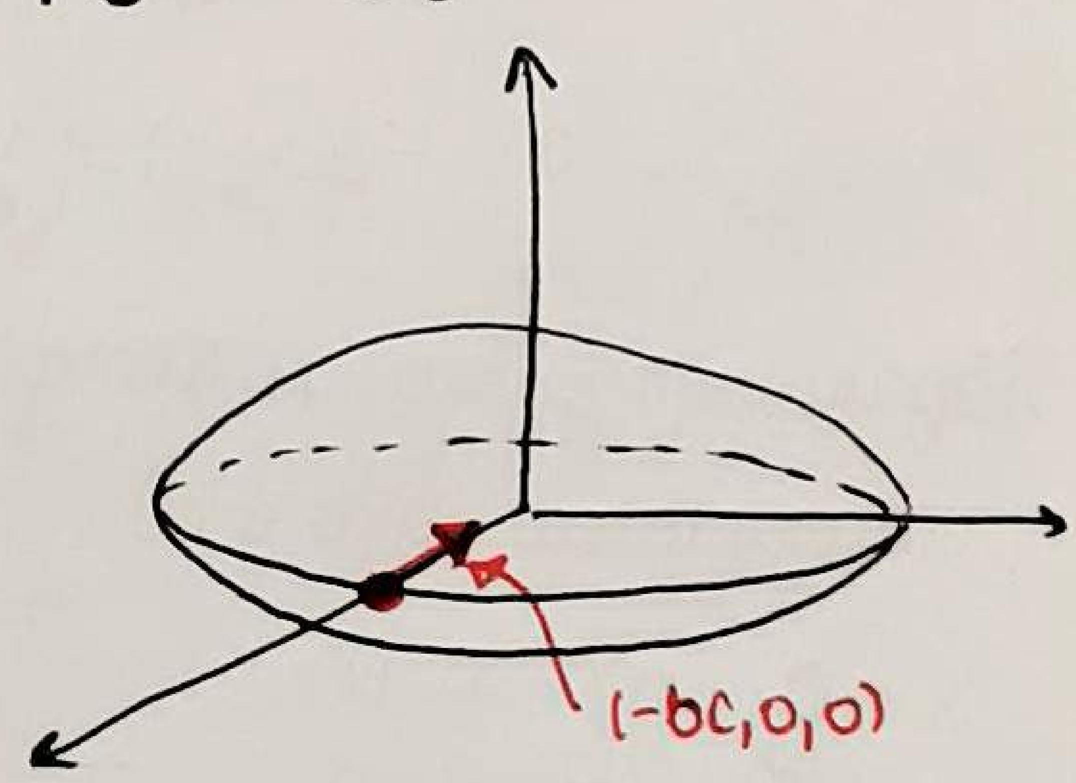
изаберимо неку тачку:

$\theta=0,\ \varphi=\frac{\pi}{2}$ $\qquad r'_\theta\times r'_\varphi\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=(\underbrace{-}_{\text{негативно}}bc,0,0)$



⇒ усмерен је ка унутрашњости елипсоида, супротно од жељене оријентације!

⇒ имаћемо минус



Дакле:

$$I=\iint_S F\cdot d\vec{S} \underset{\text{став}}{=} -\iint_D F(r(\theta,\varphi))\cdot(r'_\theta\times r'_\varphi)\,d\theta\,d\varphi$$

$$= -\int_0^\pi\int_{-\pi}^{\pi}\left(\underbrace{\frac{1}{a\cos\theta\sin\varphi}}_{1/x},\ \underbrace{\frac{1}{b\sin\theta\sin\varphi}}_{1/y},\ \underbrace{\frac{1}{c\cos\varphi}}_{1/z}\right)\overset{\text{скаларни производ}}{\cdot}\left(-bc\cdot\cos\theta\sin^2\varphi,\ -ac\sin\theta\sin^2\varphi,\ -ab\sin\varphi\cos\varphi\right)d\theta\,d\varphi$$

$$= -\int_0^\pi\int_{-\pi}^{\pi}\left(-\frac{bc}{a}\sin\varphi+-\frac{ac}{b}\sin\varphi+-\frac{ab}{c}\sin\varphi\right)d\theta\,d\varphi$$

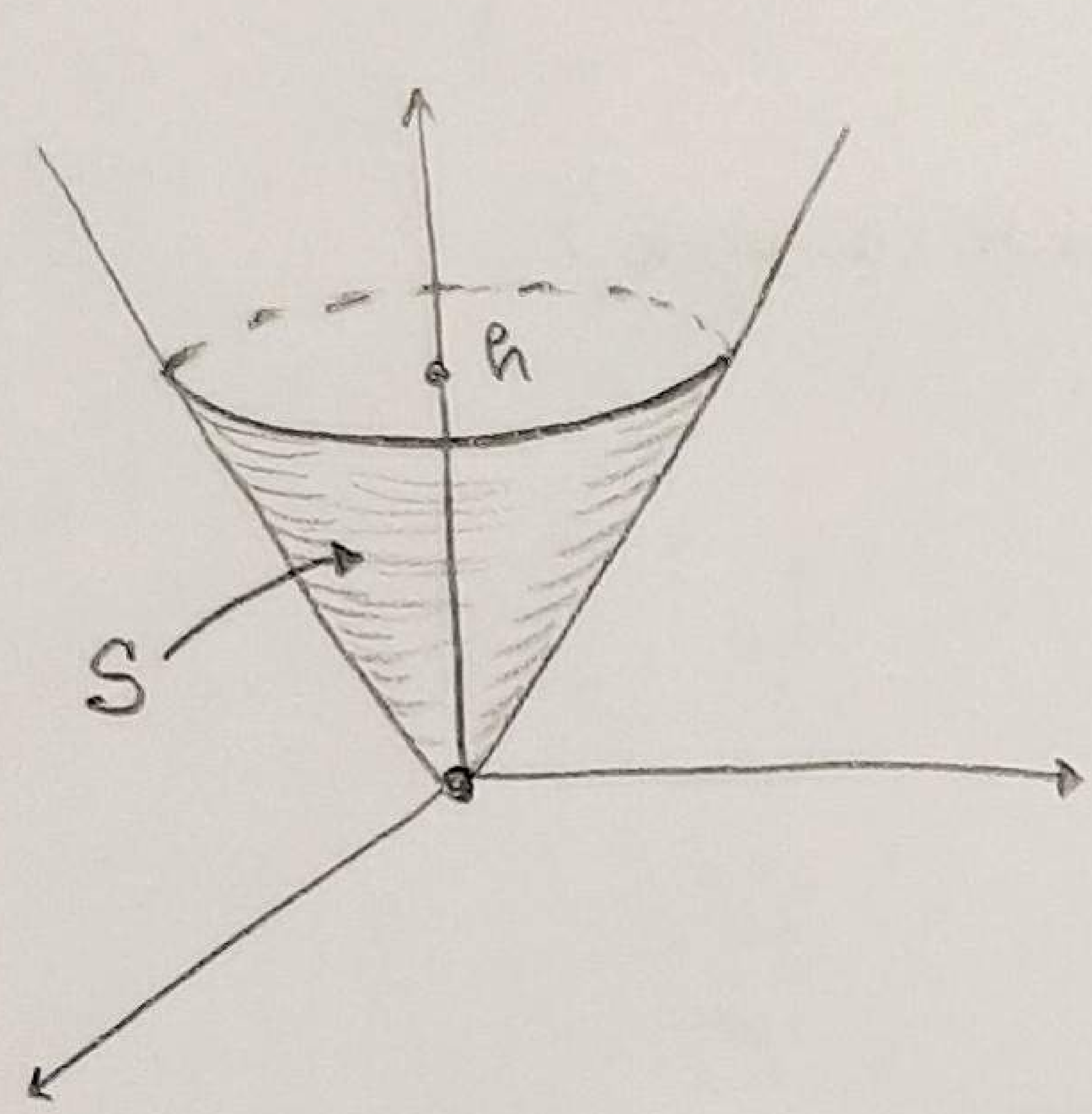
$$= \int_0^\pi\left(\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\right)\sin\varphi\cdot\underbrace{\theta\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{2\pi}\,d\varphi$$

$$= 2\pi\cdot\left(\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\right)\cdot\underbrace{\int_0^\pi\sin\varphi\,d\varphi}_{=-\cos\varphi\big|_0^\pi=2} = \boxed{4\pi\left(\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\right)}$$

□

$\boxed{2.}$ Израчунати интеграл: $I=\iint\limits_S F\cdot\vec{dS}$ ако је $F(x,y,z)=(y-z,\ z-x,\ x-y)$,

а S спољашња страна конуса S: $x^2+y^2=z^2$, $0\leq z\leq h$.



S се може параметризовати као график функције:

$$z=\sqrt{x^2+y^2}$$

где припадају (x,y)?

$0\leq z\leq h \Rightarrow x^2+y^2\leq h^2$

$\Rightarrow \mathbb{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq h^2\}$ диск

$$z: D\to\mathbb{R}$$

Из разматрања пре задатка $\boxed{1}$ знамо шта је $r'_x\times r'_y$ за параметризацију задату са $\boxed{r(x,y)=(x,y,z(x,y))}$ $(x,y)\in D$:

$$r'_x\times r'_y=(-z'_x,-z'_y,1)$$

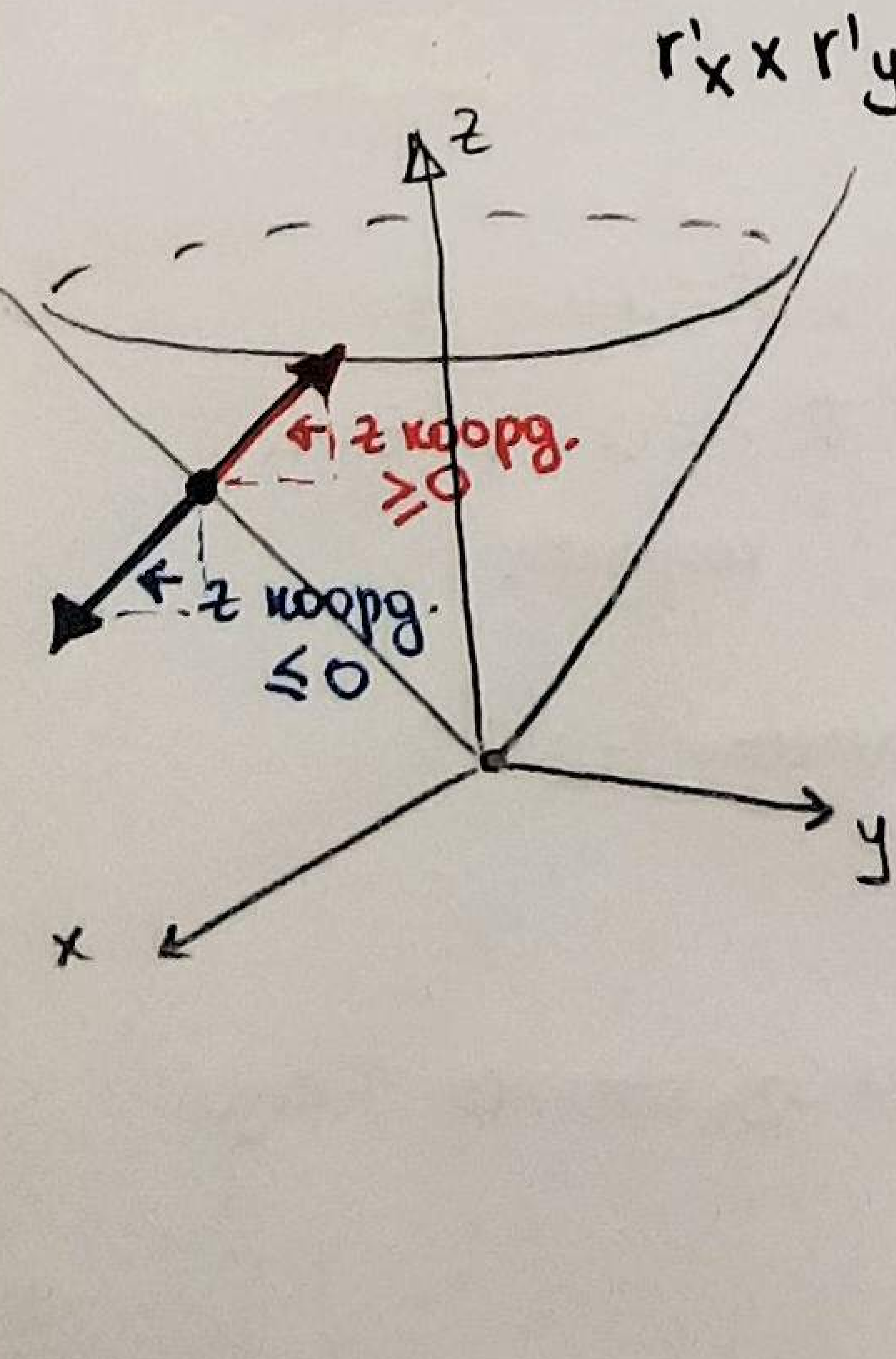
овде $$=\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x,\ -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2y,\ 1\right)$$

$$=\left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ 1\right)$$

Сада рачунамо интеграл I, али морамо проверити да ли ова параметризација даје жељену оријентацију (спољашњу страну конуса)

$$r'_x\times r'_y=\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ 1\right)$$

позитивна z-коорд. код сваког вектора нормале



$\Rightarrow$ они су усмерени „горе"

тј. ка унутрашњости конуса!

$\Rightarrow$ није сагласна оријентација, па имамо минус:

$$I=\iint\limits_S F\cdot\vec{dS}=-\iint\limits_D F(r(x,y))\cdot(r_x\times r'_y)\,dxdy$$

$$=-\iint\limits_D \left(y-\sqrt{x^2+y^2},\ \sqrt{x^2+y^2}-x,\ x-y\right)\cdot\left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ 1\right)dxdy$$

$$= -\iint_D \left(\frac{-yx}{\sqrt{x^2+y^2}} + x + -y + \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} + (x-y)\cdot 1 \right) dx\,dy$$

$$= -\iint_D 2(x-y)\,dx\,dy$$

сад рачунамо овај интеграл по диску коришћењем смене (поларне)

$$x = \rho\cos\theta \qquad 0 \le \rho \le h$$
$$y = \rho\sin\theta \qquad -\pi \le \theta \le \pi$$
$$J = \rho$$

$$\Rightarrow \quad I = (-2)\cdot \int_0^h \int_{-\pi}^{\pi} \rho\cdot(\cos\theta - \sin\theta)\,d\theta\,d\rho$$

$$= (-2)\int_0^h \left(\underbrace{\rho(\sin\theta + \cos\theta)\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{=0} \right) d\rho \quad = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = 0} \quad \blacksquare$$

3. Израчунати $I = \iint_S F\cdot dS$ где је S спољашња страна границе тела:

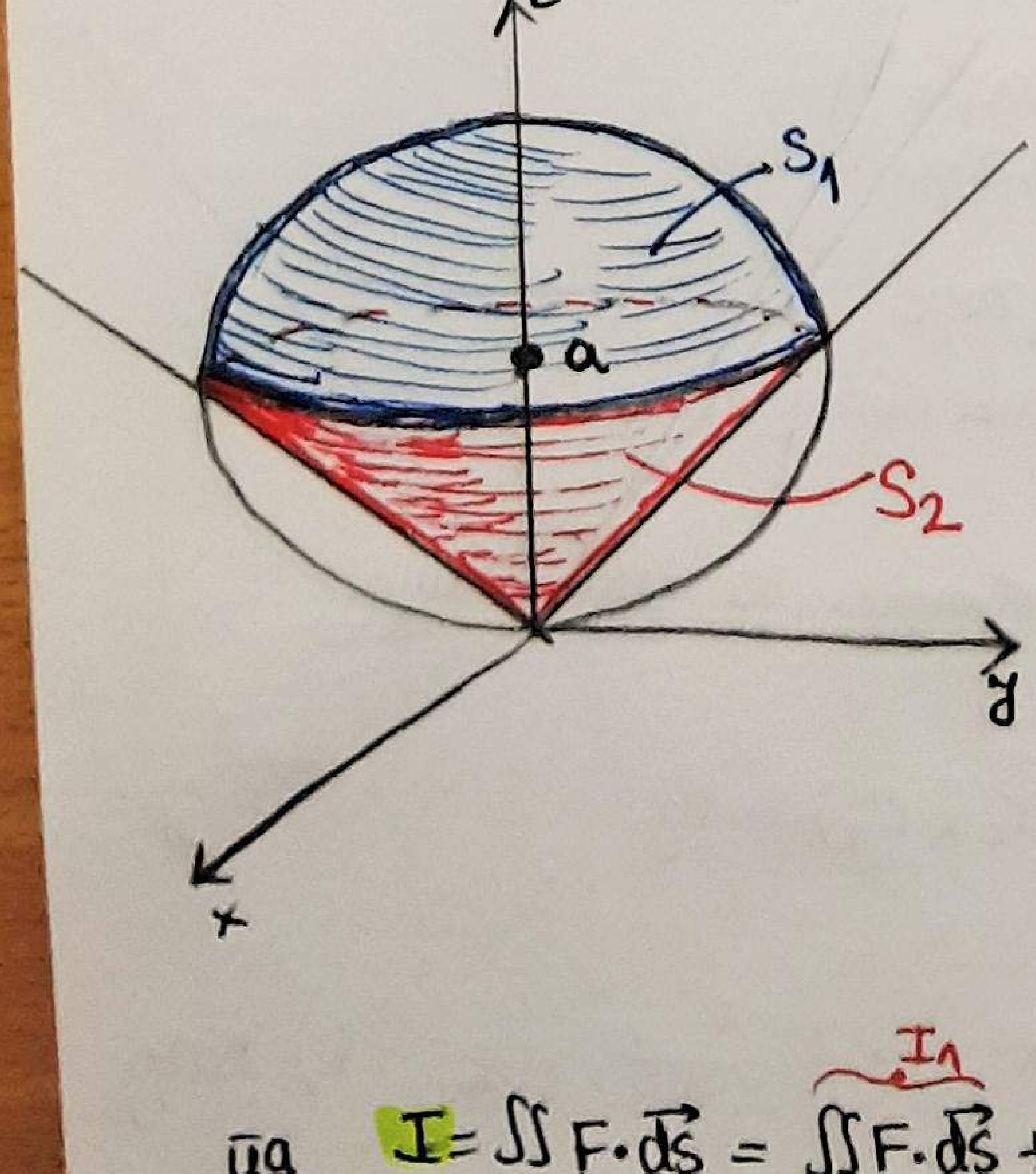
$$x^2+y^2+z^2 \le 2az$$
$$x^2+y^2 \le z^2, \quad a>0$$

а $F(x,y,z) = (x+y,\ y+z,\ z+x)$.

шта је S? $\quad x^2+y^2+z^2 \le 2az \iff x^2+y^2+(z-a)^2 \le a^2$ (већ смо срели ово)

лопта са центром $(0,0,a)$, полупречника a

$x^2+y^2 \le z^2 \iff$ унутрашњост конуса



пресек: $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2 = 2az \\ x^2+y^2 = z^2 \end{array}\right\} \Rightarrow z^2 = az$

$\Rightarrow \underset{\uparrow \text{ коорд. поч}}{z=0} \ \vee\ z=a$

$\Rightarrow$ Пресек је круг на висини $z=a$:

$x^2+y^2=a^2, \ z=a$

$\Rightarrow$ S се састоји од S_1 и S_2, као на слици

S_1 – полусфера

S_2 – део конуса

па $I = \iint_S F\cdot \vec{dS} = \overbrace{\iint_{S_1} F\cdot\vec{dS}}^{I_1} + \overbrace{\iint_{S_2} F\cdot\vec{dS}}^{I_2}$

Одвојено рачунамо за S_1 и S_2, обе површи се могу параметризовати као графици функција, где је домен пројекција на xy-раван:

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le a^2 y\}$$

S_1 је задато параметризацијом: $x^2+y^2+(z-a)^2=a^2 \to (z-a)^2=a^2-x^2-y^2$

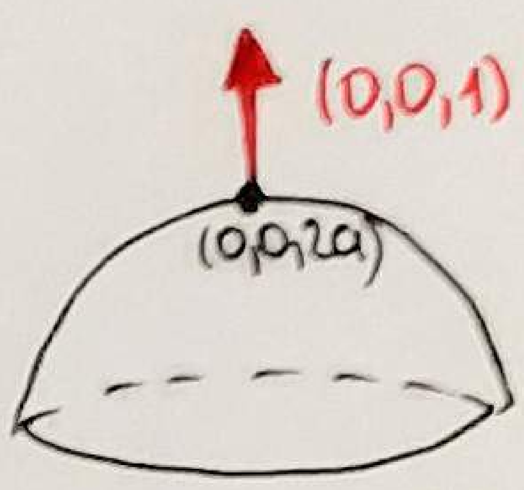
$\Rightarrow$ $z(x,y)=a+\sqrt{a^2-x^2-y^2}$

$z\geq a$

$$r(x,y)=(x,y,a+\sqrt{a^2-x^2-y^2})$$

$$\vec{dS}=(r'_x\times r'_y)\,dx\,dy \overset{\text{график}}{=\!=\!=} (-z'_x,-z'_y,1)\,dx\,dy$$

$$\vec{dS}=\left(\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},1\right)dx\,dy$$



Да ли је сагласна оријентација?

нпр. у тачки $(0,0,2a)$ $r'_x\times r'_y=(0,0,1)$ – споља ✓

$\Rightarrow$ слаже се ✓

$$\Rightarrow I_1=\iint_{S_1}F\cdot\vec{dS}=\iint_D\left(x+y,\,y+a+\sqrt{a^2-x^2-y^2},\,a+\sqrt{a^2-x^2-y^2}+x\right)\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},1\right)dx\,dy$$

$$=\iint_D\left((x+y)\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}+(y+a)\cdot\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}+y+a+\sqrt{a^2-x^2-y^2}+x\right)dx\,dy$$

ово се решава поларним координатама
али видимо да има доста рачуна

S_2 такође параметризовано као график:

$(x,y)\in D$ $\quad z(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

$r(x,y)=(x,y,\sqrt{x^2+y^2})$

$$\vec{dS}=(r'_x\times r'_y)\,dx\,dy\overset{\text{график}}{=\!=\!=}(-z'_x,-z'_y,1)\,dx\,dy=\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}},1\right)dx\,dy$$

Да ли је сагласна оријентација?

опет је z-коорд. $=1$

код сваког вектора нормале $\Rightarrow$ ка унутра

$\Rightarrow$ није сагласна, па имамо минус:

$$I_2=\iint_{S_2}F\cdot\vec{dS}=-\iint_D F(r(x,y))\cdot(r'_x\times r'_y)\,dx\,dy$$

и ово се решава поларним координатама...

Нисмо завршавали овај рачун јер имамо бољи начин !!

Пошто је S граница компактног тела T, применићемо Гаусову формулу:

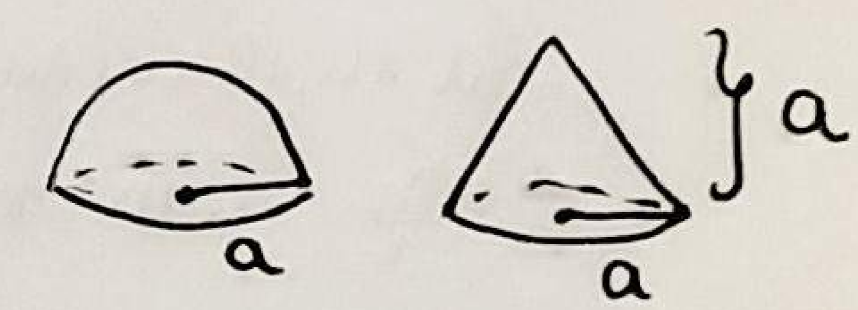
$$F(x,y,z) = (\underbrace{x+y}_{P}, \underbrace{y+z}_{Q}, \underbrace{z+x}_{R}) \qquad P'_x = 1,\quad Q'_y = 1,\quad R'_z = 1$$

$$I = \iint_S F \cdot \vec{dS} = \iiint_T (P'_x + Q'_y + R'_z)\,dxdydz$$

$$= \iiint_T (1+1+1)\,dxdydz$$

$$= 3\iiint_T dxdydz = 3 \cdot V(T) \quad \text{— запремина}$$

$$= 3 \cdot \big(V(\text{полулопте}) + V(\text{купе})\big)$$



$$= 3 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} a^3 \pi + \frac{1}{3} a \cdot a^2 \pi\right)$$

$$= \boxed{3a^3\pi}$$

□

4. Израчунати $I = \iint_S F \cdot \vec{dS}$

$F(x,y,z) = (x-y+z,\ y-z+x,\ z-x+y)$

S — спољашња страна површи: $|x-y+z| + |y-z+x| + |z-x+y| = 1$.

Приметимо да је $S = \partial T$

где је тело T задато са: $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x-y+z| + |y-z+x| + |z-x+y| \le 1\}$

(за вежбу можете доказати да је дато тело заиста компактно)

Примењујемо Гаусову формулу:

$$I = \iint_S F \cdot \vec{dS} = \iiint_T (\underbrace{P'_x}_{1} + \underbrace{Q'_y}_{1} + \underbrace{R'_z}_{1})\,dxdydz = 3 \underbrace{\iiint_T dxdydz}_{\text{овај интеграл рачунамо увођењем природне смене}}$$

смена: $u = x-y+z$
$v = y-z+x$
$w = z-x+y$

Да бисмо одредили Јакобијан J, изражавамо x,y,z преко u,v,w:

$$\left.\begin{array}{l} u = x-y+z \\ v = y-z+x \end{array}\right\} +: \quad u+v = 2x \quad \boxed{x = \frac{u+v}{2}} \quad \text{слично} \quad \boxed{y = \frac{v+w}{2}} \quad \boxed{z = \frac{w+u}{2}}$$

$$J = \det\begin{bmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{2}\cdot\frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{4}$$

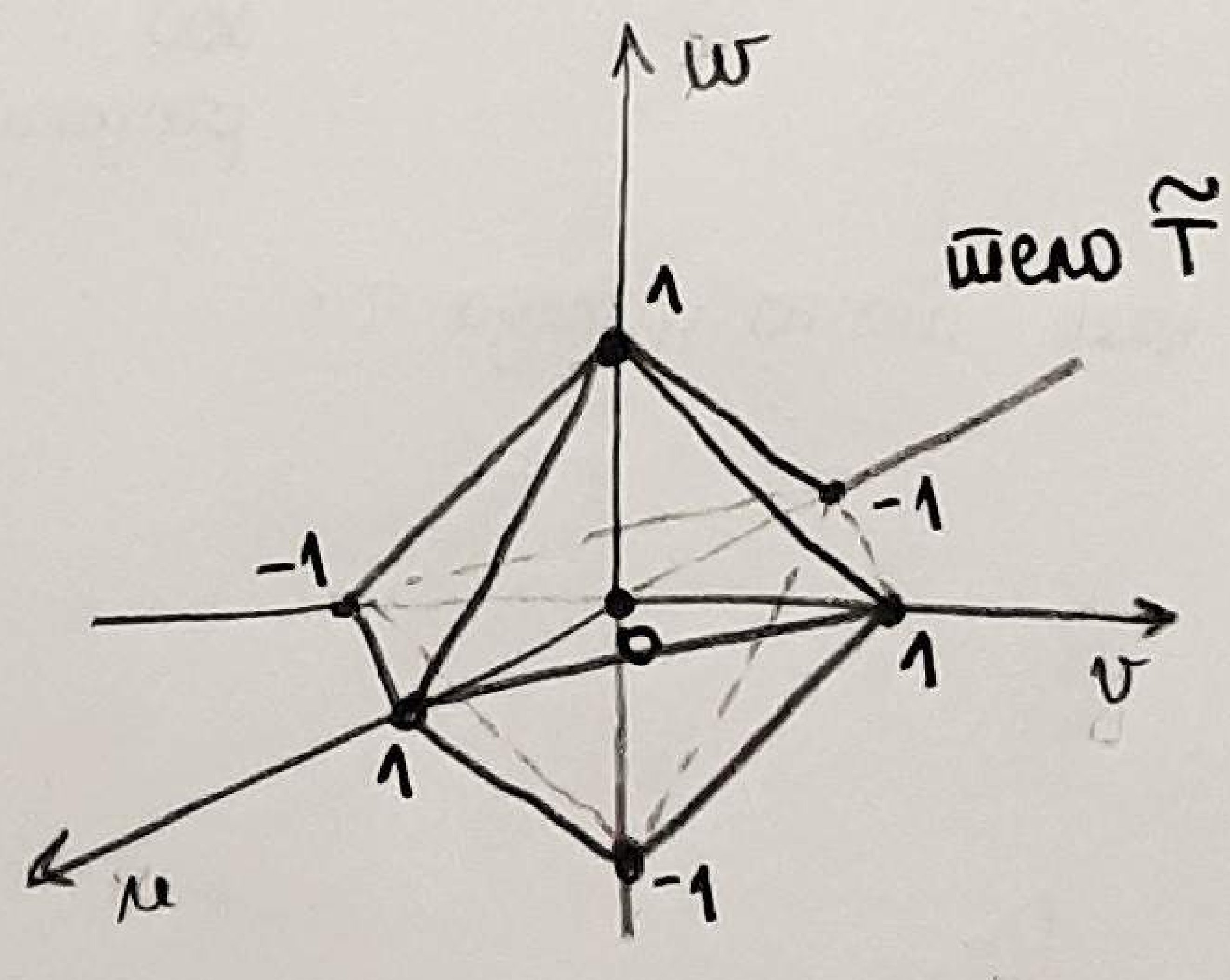
$$\Rightarrow \quad I = 3\iiint\limits_{\tilde{T}} |J| \, du\,dv\,dw$$

где је $\tilde{T}$ задато са: $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y| \leq 1 \leftarrow T$

$$|u|+|v|+|w| \leq 1$$

$$\tilde{T} = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \mid |u|+|v|+|w| \leq 1\}$$

$$\Rightarrow \quad I = 3\iiint\limits_{\tilde{T}} \frac{1}{4} \, du\,dv\,dw = \frac{3}{4} V(\tilde{T})$$

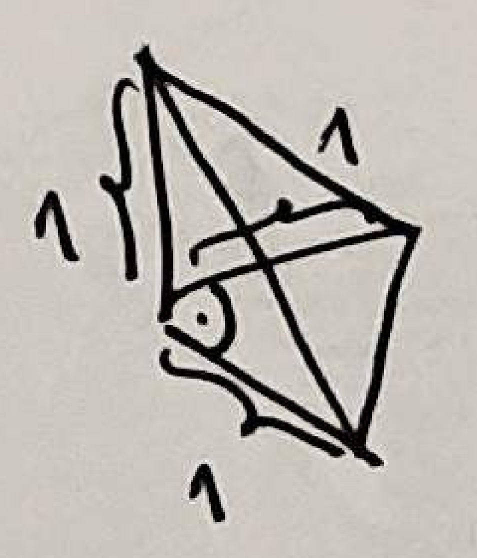


$\tilde{T}$ је симетрично по u,v,w

$$\Rightarrow \quad V(\tilde{T}) = 8 \cdot V(\underbrace{\text{део } \tilde{T} \text{ у првом квадранту}})$$

то је део који одсеца раван $u+v+w=1$ у првом квадранту (тј. $u+v+w \leq 1$ у првом квадранту)

$$\Rightarrow \text{ова запремина је } \frac{1}{3}\cdot 1 \cdot \frac{1\cdot 1}{2} = \frac{1}{6}$$



$$\Rightarrow \quad V(\tilde{T}) = 8 \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{3}{4} \cdot V(\tilde{T}) \quad \text{тј.} \quad \boxed{I = 1}$$

□

$\boxed{5.}$ Израчунати $I=\iint\limits_S F\cdot d\vec{S}$ где је

$$F(x,y,z)=(5x+y^2-z^3,\ x-z^2,\ 2y-z)$$

а S је спољашња страна границе тела

$$T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x-1)^2+y^2\le 1,\ -x\le z\le x\}.$$

Гаусова формула (испуњени су услови)

$$I=\iint\limits_S F\cdot d\vec{S}=\iiint\limits_T \nabla\cdot F\,dx\,dy\,dz \qquad F(x,y,z)=(\underbrace{5x+y^2-z^3}_{P},\underbrace{x-z^2}_{Q},\underbrace{2y-z}_{R})$$

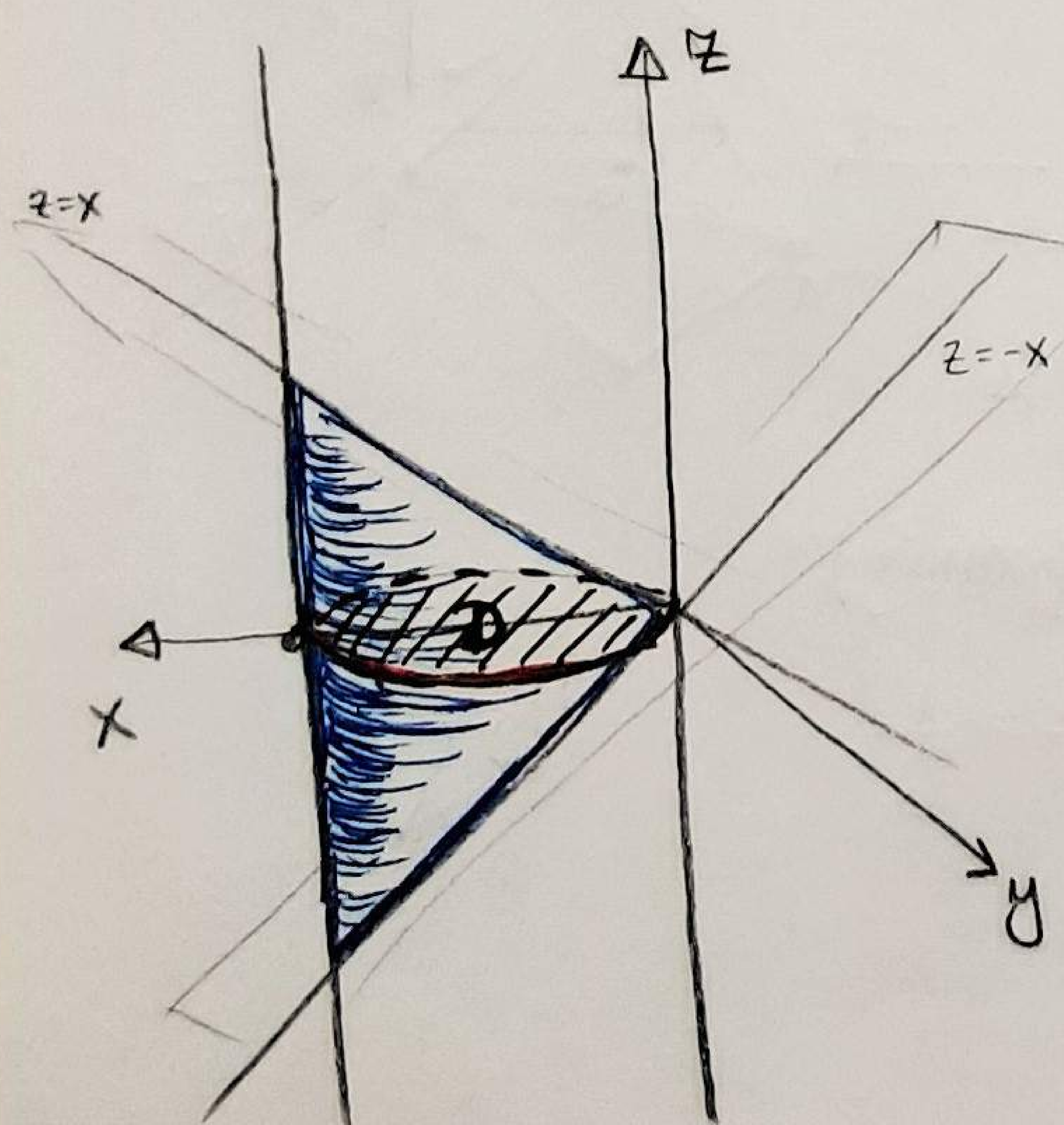
$$=\iiint\limits_T (P'_x+Q'_y+R'_z)\,dx\,dy\,dz \qquad P'_x=5 \quad Q'_y=0,\ R'_z=-1$$

$$=\iiint\limits_T (5+0+(-1))\,dx\,dy\,dz$$

$$=4\underbrace{\iiint\limits_T dx\,dy\,dz}_{}$$

ово је запремина T
рачунамо као просторни интеграл

како тачно изгледа T?



$(x-1)^2+y^2\le 1$ - унутрашњост цилиндра над кругом $\underline{D}$

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+y^2\le 1\}$$

$-x\le z\le x$ → овај услов ограничи тело T

$$\Rightarrow I=4\cdot\iint\limits_D\Big(\int_{-x}^{x}dz\Big)dx\,dy=4\iint\limits_D 2x\,dx\,dy$$

за D уведемо мало померене поларне координате:

$x=1+\rho\cdot\cos\theta \qquad 0\le\rho\le 1 \qquad$ Јакобијан $=\rho$

$y=\rho\cdot\sin\theta \qquad -\pi\le\theta<\pi$

$$\Rightarrow I=8\iint\limits_D x\,dx\,dy \overset{\text{смена}}{=} 8\int_0^1\Big(\int_{-\pi}^{\pi}\overbrace{(1+\rho\cos\theta)}^{x}\rho\,d\theta\Big)d\rho$$

$$=8\int_0^1\Big(\underbrace{(\rho\theta+\rho^2\sin\theta)\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{\rho\cdot 2\pi+0-0}\Big)d\rho=8\int_0^1 2\pi\rho\,d\rho=16\pi\cdot\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^1$$

$$=\boxed{8\pi}$$

□