ВЕЖБЕ за среду 29. април

~ Криволинијски интеграли - НАСТАВАК ~

ПОДСЕЋАЊЕ

I врсте: $\int_C f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f(r(t))\,\|r'(t)\|\,dt$

r - регуларна параметризација

II врсте: $\int_C F\cdot dr = \int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz \qquad F=(P,Q,R)$

$= \int_a^b F(r(t))\bullet r'(t)\,dt$

Урадићемо један задатак из претходног градива, а онда ћемо се подсетити нове теорије са предавања.

1. Израчунати дужину криве задате једначинама:

$$z = x^2+y^2$$
$$y = x\cdot tg\, z$$

од тачке $A(0,0,0)$ до тачке $B\left(\sqrt{\frac{\pi}{8}}, \sqrt{\frac{\pi}{8}}, \frac{\pi}{4}\right)$.

Дужина криве γ: $\ell(\gamma) = \int_\gamma ds$

Дакле, треба извршити параметризацију криве и онда израчунати овај интеграл.

$$\gamma: \begin{cases} z = x^2+y^2 & (1) \\ y = x\cdot tg\, z & (2) \end{cases}$$

уведимо: $x = h(t)\cdot \cos t$, $y = h(t)\cdot \sin t$

и нађимо како изгледа $h(t)$ из услова (1) и (2)

(1): $z = h^2(t)\cdot \cos^2 t + h^2(t)\cdot \sin^2 t = h^2(t)$

$z = h^2(t)$

(2): $y = x\cdot tg(h^2(t))$

$\cancel{h(t)}\cdot \sin t = \cancel{h(t)}\cdot \cos t\cdot tg\, h^2(t)$

тражимо: $tg\,t = tg\,h^2(t)$

зато изаберимо $\boxed{h(t) := \sqrt{t}}$

НАПОМЕНА: овде „правимо" параметризацију која даје (1) и (2), не решавамо једначину!

тада: $x = \sqrt{t}\cos t$, $y = \sqrt{t}\sin t$, $z = t$ $\qquad \boxed{t\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]}$

$\boxed{r(t)} = (\sqrt{t}\cos t, \sqrt{t}\sin t, t)$

$\Rightarrow r'(t) = \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\cos t - \sqrt{t}\sin t,\ \frac{1}{2\sqrt{t}}\sin t + \sqrt{t}\cos t,\ 1\right)$

$$\ell(\gamma) = \int_{\gamma} ds = \int_0^{\pi/4} 1 \cdot \|r'(t)\|\, dt$$

$$\|r'(t)\| = \sqrt{\left(\frac{\cos t}{2\sqrt{t}} - \sqrt{t}\sin t\right)^2 + \left(\frac{\sin t}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t}\cos t\right)^2 + 1^2}$$

$$= \sqrt{\underbrace{\frac{\cos^2 t}{4t}} - \cancel{\cos t \sin t} + t\sin^2 t + \underbrace{\frac{\sin^2 t}{4t}} + \cancel{\sin t \cos t} + t\cos^2 t + 1}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4t} + t + 1}$$

$$\Rightarrow \ell(\gamma) = \int_0^{\pi/4} \sqrt{\frac{1}{4t} + t + 1}\, dt = \int_0^{\pi/4} \sqrt{\frac{1 + 4t^2 + 4t}{4t}}\, dt$$

$$= \int_0^{\pi/4} \sqrt{\frac{(2t+1)^2}{4t}}\, dt \underset{\substack{\uparrow \\ 2t+1>0}}{=} \int_0^{\pi/4} \frac{2t+1}{2\sqrt{t}}\, dt = \int_0^{\pi/4} \left(\sqrt{t} + \frac{1}{2\sqrt{t}}\right) dt$$

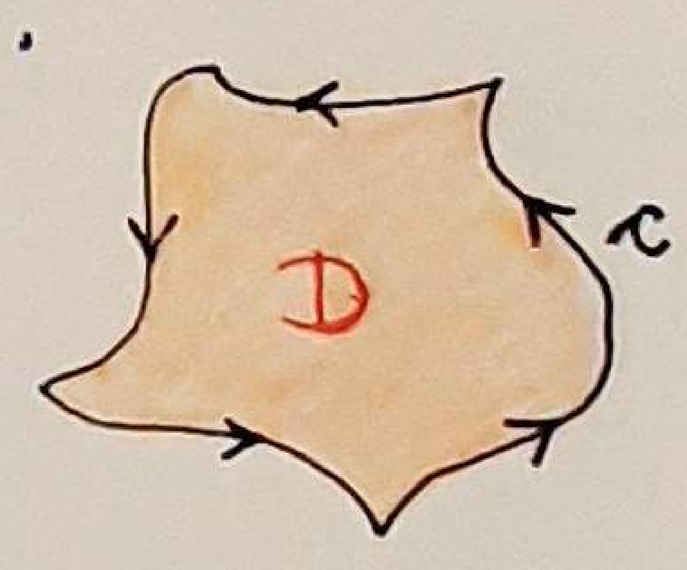
$$= \left(\frac{2}{3} \cdot t^{3/2} + \sqrt{t}\right)\Big|_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{\pi^3}{4^3}} + \sqrt{\frac{\pi}{4}} \quad \square$$

Сада настављамо даље са теоријом.

Гринова формула $D \subset \mathbb{R}^2$ област таква да је њена граница $\partial D = c$ део-по-део глатка, затворена крива, позитивно оријентисана.

$F = (P, Q)$ векторско поље на $\overline{D}$ такво да су P, Q, P'_y и Q'_x непрекидне на $\overline{D}$.



Тада:

$$\oint_c P dx + Q dy = \iint_{\overline{D}} (Q'_x - P'_y)\, dx dy$$

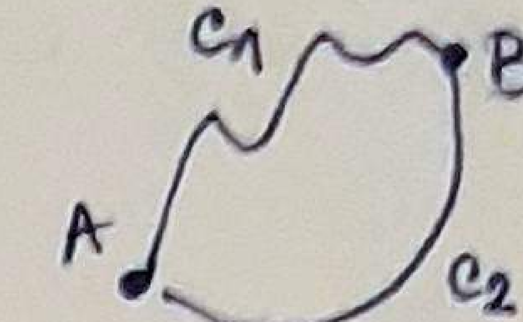
* Гринова формула важи и када се граница D састоји од више кривих тада $\oint_c P dx + Q dy$ означава збир интеграла по тим кривама, $\left(\oint_{c_1} + \oint_{c_2} + \oint_{c_3}\right)$ при чему су све оријентисане тако да је D са леве стране кад се крећемо по свакој од њих

на слици:

$$\oint_{c_1} P dx + Q dy + \oint_{c_2} P dx + Q dy + \oint_{c_3} P dx + Q dy =$$

$$= \iint_{\overline{D}} (Q'_x - P'_y)\, dx dy.$$

НЕЗАВИСНОСТ ИНТЕГРАЛА ОД ПУТАЊЕ



- Када интеграл зависи само од крајњих тачака криве?

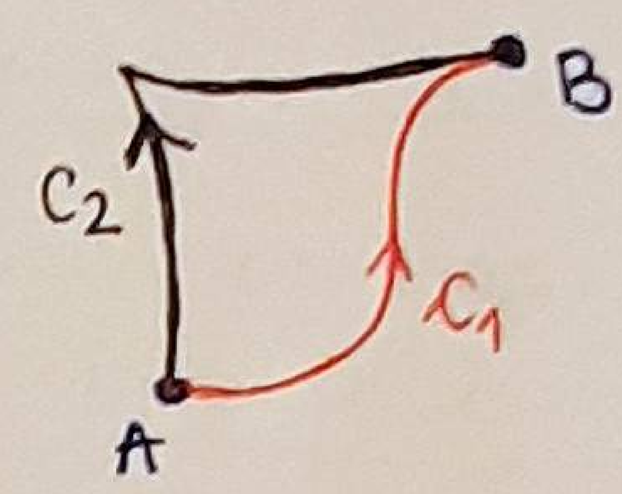
- Кажемо: векторско поље **F је ГРАДИЈЕНТНО** (КОНЗЕРВАТИВНО) на области $D \subset \mathbb{R}^3$ ако постоји функција f тако да на D важи:

$$\underbrace{\nabla f}_{\text{градијент } f} = F$$

ТЕОРЕМА F-непрекидно векторско поље на области $D \subset \mathbb{R}^3$. Следећи услови су еквивалентни:

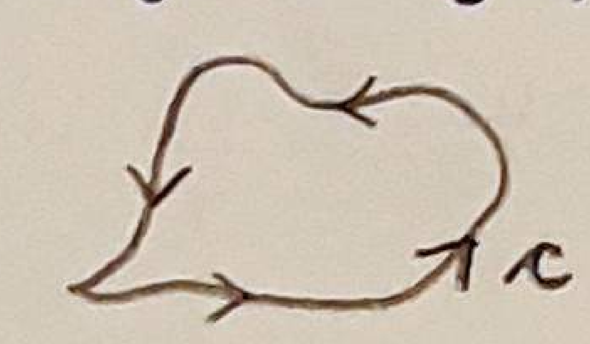
(1) за $\forall$ две тачке $A, B \in D$ и $\forall$ две део-по-део глатке криве $C_1, C_2 \subset D$ које спајају A са B важи:

$$\int_{C_1} F \cdot dr = \int_{C_2} F \cdot dr$$



(2) за $\forall$ затворену оријентисану, део-по-део глатку криву $C \subset D$ важи:

$$\oint_C F \cdot dr = 0$$



(3) F је градијентно на D.

Тада ако је f (било која) функција која задовољава $\nabla f = F$ на D, онда за $A, B \in D$ и било коју криву C која спаја **A** и **B** важи:

$$\int_C F \cdot dr = f(B) - f(A)$$

☺ ово је аналогон Њутн-Лајбницове формуле: $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$

* ова теорема важи и за $D \subset \mathbb{R}^2$ (аналогно)

* ДОДАТАК за $D \subset \mathbb{R}^2$ и додатне услове (са предавања):

Ако је $F = (P, Q)$ непр-диференцијабилно векторско поље и D-просто-повезана област $D \subset \mathbb{R}^2$

Тада важи:

F је градијентно на D $\Longleftrightarrow$ $Q'_x = P'_y$ на D.

Сада можемо прећи на задатке ☺.

$\boxed{2}$ Израчунати $I=\oint_{\gamma} -x^2y\,dx+xy^2\,dy$ ако је γ позитивно орј. кружница $x^2+y^2=a^2$.

I начин: параметризација кружнице:

$\boxed{\begin{aligned} x&=a\cos t\\ y&=a\sin t\end{aligned}}$ $\quad \boxed{r(t)}=(a\cos t, a\sin t)\ \boxed{t\in[-\pi,\pi]}$ $\quad P(x,y)=-x^2y$

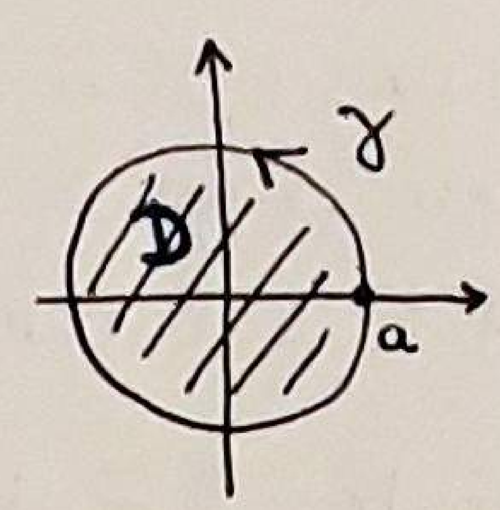
$r'(t)=(-a\sin t, a\cos t)$ $\quad Q(x,y)=xy^2$

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}(\underbrace{-a^2\cos^2 t\cdot a\sin t}_{P},\ \underbrace{a\cos t\cdot a^2\sin^2 t}_{Q})\cdot(-a\sin t, a\cos t)\,dt$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi} a^4\cos^2 t\cdot\sin^2 t+a^4\cos^2 t\sin^2 t\,dt = 2a^4\cdot\int_{-\pi}^{\pi}(\underbrace{\cos t\sin t}_{\frac{1}{2}\sin 2t})^2\,dt$$

$$=\frac{2a^4}{4}\int_{-\pi}^{\pi}(\sin 2t)^2\,dt=\frac{2a^4}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 4t}{2}\,dt=\frac{2a^4}{4}\cdot\pi=\frac{a^4\pi}{2}$$

II начин: $\boxed{\text{Гринова формула}}$



γ ограничава област D

позитивно оријентисана ✓

$F=(P,Q)$ $\quad P(x,y)=-x^2y$ $\quad P'_y(x,y)=-x^2$

$\qquad\qquad Q(x,y)=xy^2$ $\quad Q'_x(x,y)=y^2$

P, Q, P'_y и Q'_x су непрекидне на $\bar{D}$ ✓

$$\Rightarrow \int_{\gamma} -x^2y\,dx+xy^2\,dy \overset{\text{Грин}}{=} \iint_{\bar{D}}(Q'_x-P'_y)\,dx\,dy$$

$$=\iint_{\bar{D}}(y^2+x^2)\,dx\,dy$$

– двоструки интеграл на кругу:

$x=r\cos\theta$ $\quad$ поларне

$y=r\sin\theta$ $\quad$ координате

$r\in[0,a]$

$\theta\in[-\pi,\pi)$ $\quad x^2+y^2=\underline{r^2}$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\int_0^a r^2\cdot \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Јакобијан}}}{r}\,dr\Big)\,d\theta$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\int_0^a r^3\,dr\Big)\,d\theta$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{r^4}{4}\Big|_0^a\,d\theta$$

$$=\frac{a^4}{4}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}d\theta=\frac{a^4\pi}{2}\qquad\square$$

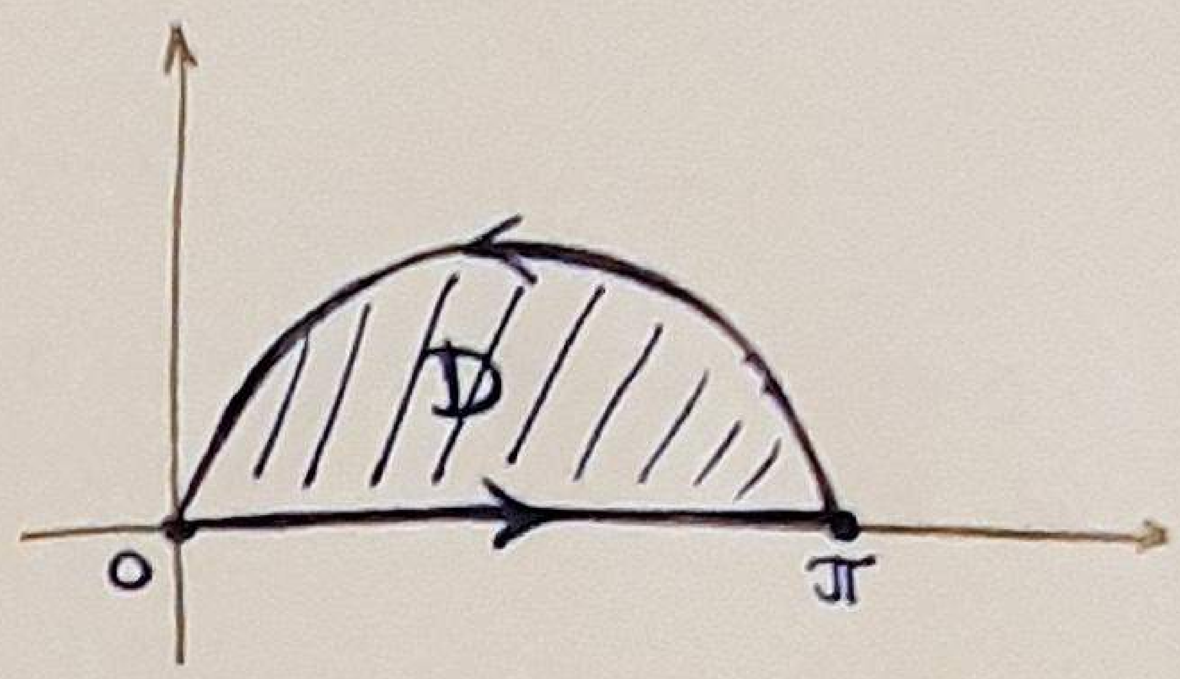
Овде смо могли и без Гринове формуле, али у следећим примерима ћемо видети колико је она згодна кад изводи Q'_x и P'_y доста поједноставе тражени интеграл.

3 Израчунати интеграл: $\oint\limits_{\gamma} F\cdot dr$ где је γ позитивно оријентисана

граница области: $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<x<\pi,\ 0<y<\sin x\}$

док је векторско поље облика: $F(x,y)=(\underbrace{4y+e^{\sin x+\cos x}}_{P(x,y)},\ \underbrace{2x-\sqrt{y^6+2}}_{Q(x,y)})$

Кад бисмо радили преко параметризације имали бисмо компликоване изразе, па ћемо применити Гринову формулу:



испуњени су услови:

- D област ... ✓
- $P'_y(x,y)=4$ непрекидни P, Q, P'_y, Q'_x ✓
  $Q'_x(x,y)=2$

$$\Rightarrow \oint\limits_{\gamma} F\cdot dr \overset{\text{Грин}}{=} \iint\limits_{D}(Q'_x-P'_y)\,dx\,dy=\iint\limits_{D}(2-4)\,dx\,dy$$

$$=(-2)\iint\limits_{D}dx\,dy$$

$$=(-2)\cdot\int_0^{\pi}\int_0^{\sin x}dy\,dx=(-2)\cdot\int_0^{\pi}\sin x\,dx=(-2)\cdot\underbrace{(-\cos x)\Big|_0^{\pi}}_{\substack{-(-1)-(-1)\\=2}}=-4 \quad\square$$

4 Израчунати $I=\int\limits_{\gamma}F\cdot dr$ ако је γ крива $y=-\sqrt{2x-x^2}$,

при чему се интеграција врши од тачке $A(2,0)$ до тачке $B(0,0)$

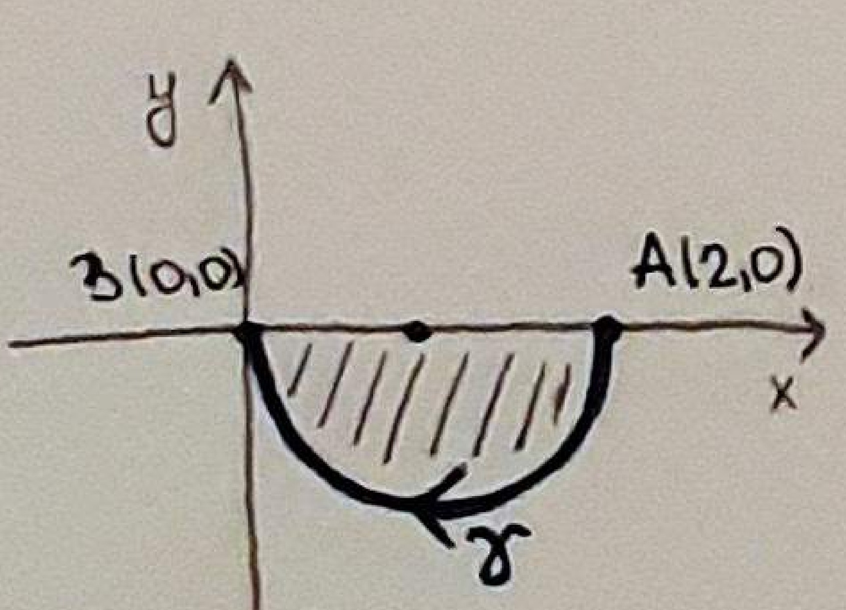
и $F(x,y)=(\underbrace{e^{x+y}\cdot\sin 2y+x+y}_{P(x,y)},\ \underbrace{e^{x+y}\cdot(2\cos 2y+\sin 2y)+2x}_{Q(x,y)})$.

Прво одредимо криву γ: $y=-\sqrt{2x-x^2}$

$\iff y\le 0 \ \wedge\ y^2=2x-x^2$

$\iff y\le 0 \ \wedge\ \underbrace{(x-1)^2+y^2=1}$

од A до B $\Rightarrow$ γ је полукружница од $\uparrow$ за $y\le 0$, као на слици доле.



Компликовани P и Q

→ волели бисмо да применимо Гринову формулу

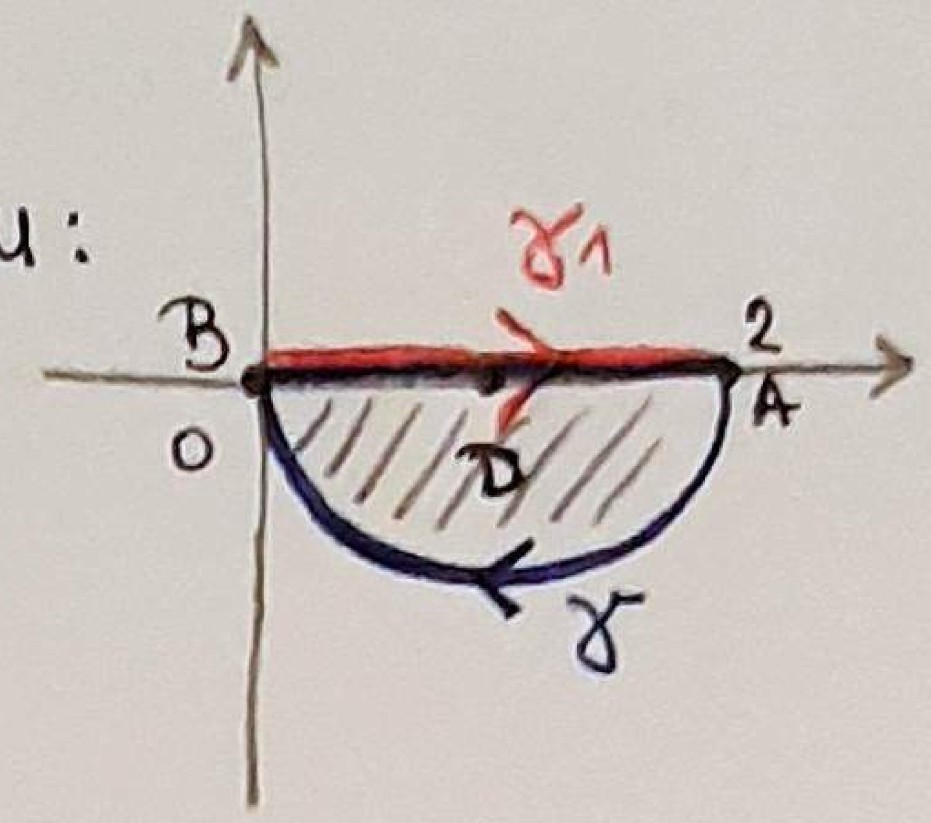
→ али γ није затворена, па не може

→ затворимо је, па после одузмимо додато!

Затворићемо је помоћу хоризонталне дужи BA:

$$\gamma_1 = [B,A] = \{(x,0) \mid x \in [0,2]\}$$

оријентишимо је сагласно са γ, дакле као на слици:



$\boxed{\gamma_1 \cup \gamma}$ ограничава полукруг D

$P(x,y),\ Q(x,y)$

$P'_y(x,y) = e^{x+y}\cdot \sin 2y + e^{x+y}\cdot 2\cdot \cos 2y + 1$

$Q'_x(x,y) = e^{x+y}\cdot(2\cos 2y + \sin 2y) + 2$

P, Q, P'_y, Q'_x непрекидне на D

једино оријентација $\gamma_1 \cup \gamma$ није позитивна већ супротна, па ћемо имати минус:

$$\oint_{\gamma\cup\gamma_1} F\cdot dr \overset{\text{Грин}}{=} -\iint_{\bar{D}} \underbrace{(Q'_x - P'_y)}_{=1}\,dx\,dy = -\iint_{\bar{D}} 1\,dx\,dy = -\underbrace{P(\bar{D})}_{\substack{\text{површина}\\ \text{полукруга}\\ \text{полупречника 1}}} = -\frac{1}{2}1^2\pi = \frac{-\pi}{2}$$

АДИТИВНОСТ ИНТЕГРАЛА:

$$\underbrace{\oint_{\gamma\cup\gamma_1} F\cdot dr}_{-\pi/2} = \underbrace{\oint_{\gamma} F\cdot dr}_{\text{тражени } I} + \underbrace{\oint_{\gamma_1} F\cdot dr}_{\text{одредимо га сада}}$$

$\oint_{\gamma_1} F\cdot dr$: параметризација γ_1 је $r(t) = (t,0),\ t\in[0,2]$

$$\Rightarrow \oint_{\gamma_1} F\cdot dr = \int_0^2 F(r(t))\cdot r'(t)\,dt$$

$$= \int_0^2 (\underbrace{P(t,0)}_{\substack{\parallel\\ t \text{ кад се}\\ \text{израчуна}}}, Q(t,0))\cdot(1,0)\,dt$$

$$= \int_0^2 \underbrace{t\cdot 1 + Q(t,0)\cdot 0}_{=t}\,dt = \int_0^2 t\,dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^2 = 2$$

$$I = \oint_{\gamma\cup\gamma_1} F\cdot dr - \oint_{\gamma_1} F\cdot dr \Rightarrow \boxed{I = \frac{-\pi}{2} - 2}$$

□

5 Израчунати интеграл $I=\int_{(0,1)}^{(3,-4)} x\,dx+y\,dy$

Интегралимо функцију

$F=(P,Q)$ $\quad P(x,y)=x \quad Q(x,y)=y \quad F(x,y)=(x,y)$

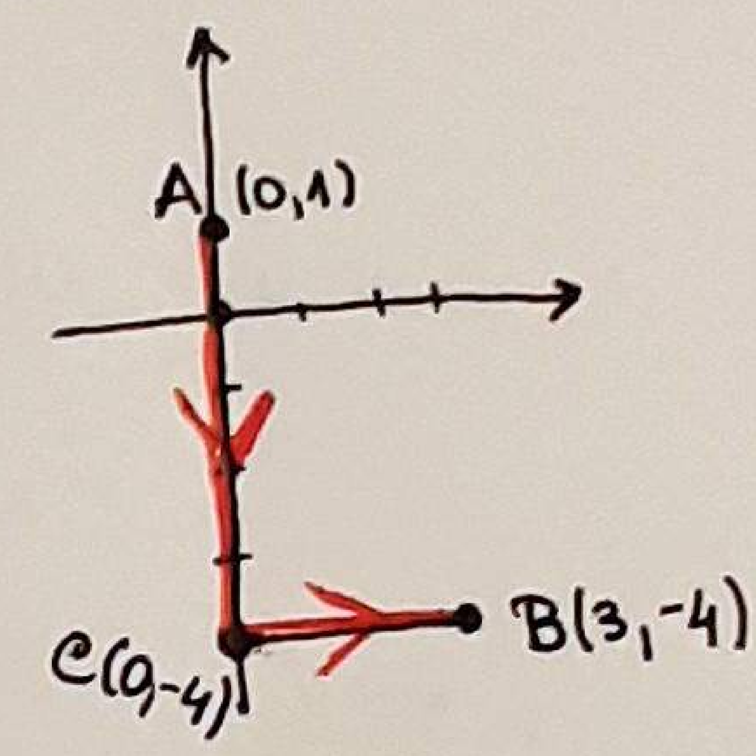
<u>По чему?</u> није речено по којој кривој, само да спаја тачке $A(0,1)$ и $B(3,-4)$

<u>Али</u>: $P'_y=0=Q'_x$ на целом $\mathbb{R}^2$ (просто-повезана област)

$\overset{\text{теорија}}{\Longrightarrow}$ F је градијентно векторско поље на $\mathbb{R}^2$

$\Longrightarrow$ интеграл не зависи од пута, па можемо узети <u>произвољан</u> пут од A до B

Изаберимо да буде што једноставнији рачун – <u>крећемо се паралелно осама</u> као на слици тј. AC па CB (са датом оријентацијом) где $C(0,-4)$



$\Longrightarrow \boxed{I}=\int_{AC} x\,dx+y\,dy+\int_{CB} x\,dx+y\,dy$

Потребна нам је параметризација AC и CB:

$\boxed{AC}$ $\quad x=0,\ y=t \quad t\in[-4,1] \quad r_1(t)=(0,t) \quad r_1'(t)=(0,1)$

оријентација није сагласна $\Rightarrow$ имамо минус:

$$\Rightarrow \int_{AC} x\,dx+y\,dy=-\int_{-4}^{1} F(r_1(t))\cdot r_1'(t)\,dt=-\int_{-4}^{1}(0,t)\cdot(0,1)\,dt=-\int_{-4}^{1} t\,dt=-\frac{t^2}{2}\Big|_{-4}^{1}=\frac{15}{2}$$

$\boxed{CB}$ $\quad x=t,\ y=-4 \quad t\in[0,3] \quad r_2(t)=(t,-4) \quad r_2'(t)=(1,0)$

оријентација јесте сагласна

$$\Rightarrow \int_{CB} x\,dx+y\,dy=\int_{0}^{3} F(r_2(t))\cdot r_2'(t)\,dt=\int_{0}^{3}(t,-4)\cdot(1,0)\,dt=\int_{0}^{3} t\,dt=\frac{t^2}{2}\Big|_{0}^{3}=\frac{9}{2}$$

Дакле: $\quad I=\frac{15}{2}+\frac{9}{2} \quad \boxed{I=12}$

Прикажимо сада други начин за овај задатак, другачијим коришћењем теорије.

II НАЧИН: теорема о независности интеграције од пута

кање да ако је F градијентно на $D=\mathbb{R}^2$

тј. ако постоји фја $f(x,y)$ тако да $\nabla f=(f'_x, f'_y)=F$

тј. $(f'_x, f'_y)=(P,Q)$

онда важи: $\underbrace{\int_A^B F\cdot dr}_{\text{не зависи од пута}} = f(B)-f(A)$

дакле нађимо f тако да: $\left\{\begin{array}{l} f'_x = P = x \\ f'_y = Q = y \end{array}\right\} \xrightarrow{\circledast} f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{2}+C$

изаберимо једну: $\boxed{f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{2}}$

$\Rightarrow$ наш интеграл: $I=f(B)-f(A)=f(3,-4)-f(0,1)=$

$=\frac{9+16}{2}-\frac{0+1}{2}=12$ ✓ □

⊛ како налазимо f?

$f'_x = x \;/\int dx$

$\int f'_x dx = \int x dx = \frac{x^2}{2}$

$\Rightarrow \underbrace{f(x,y)=\frac{x^2}{2}+\varphi(y)}$

није константа обавезно већ нешто што зависи само од y

$\Rightarrow f'_y = \varphi'(y)$

$y = \varphi'(y) \Rightarrow \varphi(y)=\frac{y^2}{2}+C$

дакле: $f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{2}+C$ △

6. Израчунати: $I=\displaystyle\int_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2}$ дуж путање која не сече y-осу

$A(2,1)$, $B(1,2)$

$$F(x,y) = \Big(\underbrace{\frac{y}{x^2}}_{P(x,y)}, \underbrace{-\frac{1}{x}}_{Q(x,y)}\Big)$$

(услов да не сече y-осу је да би било дефинисано дељење са x.)

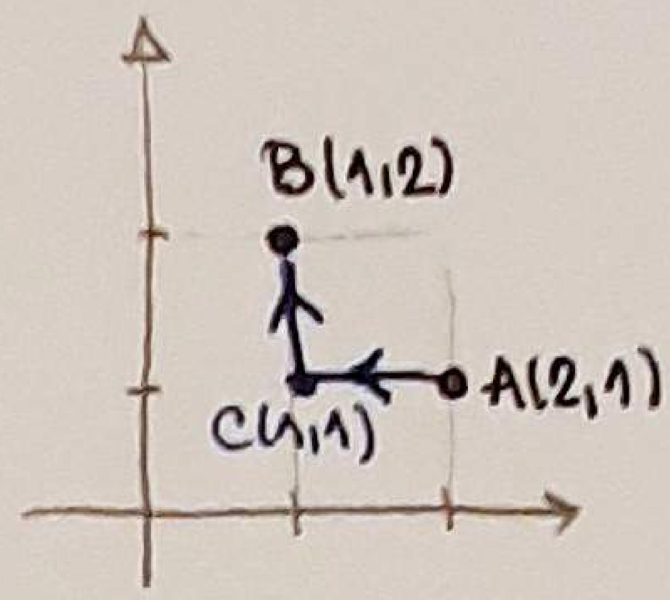
__I НАЧИН:__ (као I начин у претходном.)

приметимо да $P'_y = \frac{1}{x^2} = Q'_x$

$\Rightarrow$ F градијентно

$\Rightarrow$ интеграл не зависи од криве

$\Rightarrow$ изаберимо паралелно осама



$I = \int_{AC} + \int_{CB}$ параметризујемо AC и CB
и добијамо ... - завршити за вежбу ☺

__II НАЧИН:__ (као II начин у претходном)

тражимо фју $f(x,y)$ тако да $\nabla f = (f'_x, f'_y) = F(x,y)$

$f'_x(x,y) = \frac{y}{x^2}$ (1)

$f'_y(x,y) = -\frac{1}{x}$ / $\int dy$

$\underbrace{\int f'_y\,dy}_{f} = -\int \frac{1}{x}\,dy = -\frac{y}{x} + \underset{\text{од } y}{\underline{\underline{C}}}$ $\Rightarrow$ $f(x,y) = -\frac{y}{x} + \varphi(x)$

$\Rightarrow$ $f'_x(x,y) = \frac{y}{x^2} + \varphi'(x)$

из (1) $\Rightarrow$ $\varphi'(x) = 0$

$\Rightarrow$ $\varphi(x) = C$

$\Rightarrow$ $f(x,y) = -\frac{y}{x} + C$

узмимо $\boxed{f(x,y) = -\frac{y}{x}}$

теорема каже: пошто је $F = \nabla f$ градијентно

$\Rightarrow$ $\displaystyle\int_A^B F\cdot dr = f(B) - f(A)$

$I = f(1,2) - f(2,1) = -\frac{2}{1} - \left(-\frac{1}{2}\right) = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$

$\boxed{I = -3/2}$ ∎