ВЕЖБЕ
за среду
22. април

~ Криволинијски интеграли ~

1 КРИВОЛИНИЈСКИ ИНТЕГРАЛИ ПРВЕ ВРСТЕ

потребна нам је ПАРАМЕТРИЗАЦИЈА КРИВЕ (подсећање)

C: крива у $\mathbb{R}^3$:

$$r : [a,b] \to \mathbb{R}^3$$

$$r(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

регуларна: $r'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) \neq \vec{0}$

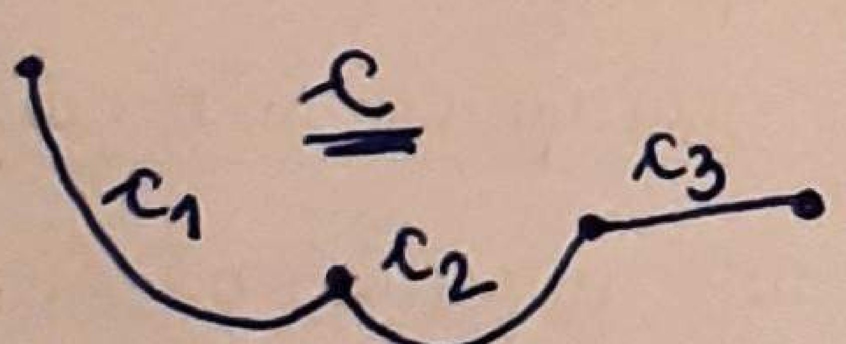
T C - глатка крива, $r : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ регуларна параметризација

f - непрекидна

тада:
$$\underbrace{\int_C f(x,y,z)\, ds}_{\text{ИНТЕГРАЛ по криви } C} = \int_a^b f(r(t)) \cdot \|r'(t)\|\, dt$$

ds - елемент дужине $\quad \|r'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$

* део-по-део глатку криву поделимо на делове где можемо применити теорему:



$$\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3}$$

* аналогна теорема важи у $\mathbb{R}^2$:

$$\int_C f(x,y)\, ds = \int_a^b f(r(t)) \cdot \|r'(t)\|\, dt$$

овде $\|r'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$.

1. Израчунати $I = \int\limits_{\gamma} z\,ds$

γ - крива одређена параметризацијом: $\gamma(t) = (t\cdot\cos t, t\sin t, t)$, $0 \le t \le t_0$

Кад већ имамо параметризацију

и знамо $f(x,y,z) = z$,

потребно нам је само $\|\gamma'(t)\|$:

$$\gamma'(t) = (\cos t - t\cdot\sin t,\ \sin t + t\cdot\cos t,\ 1)$$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1^2}$$

$$= \sqrt{\cos^2 t + t^2\sin^2 t \cancel{- 2t\cdot\cos t\cdot\sin t} + \sin^2 t + t^2\cdot\cos^2 t \cancel{+ 2t\sin t\cos t} + 1}$$

$$= \sqrt{1 + t^2\cdot 1 + 1}$$

$$= \sqrt{t^2+2}$$

$$\Rightarrow I = \int\limits_{\gamma} z\,ds \overset{T}{=} \int_0^{t_0} f(\gamma(t))\cdot\|\gamma'(t)\|\,dt$$

$$= \int_0^{t_0} t\cdot\sqrt{t^2+2}\,dt$$

смена: $e = t^2+2$

$de = 2t\,dt$

$$= \int_2^{t_0^2+2} \sqrt{e}\,\frac{1}{2}\,de$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\,e^{3/2}\Big|_2^{t_0^2+2}$$

$$= \frac{1}{3}\left((t_0^2+2)^{3/2} - 2\sqrt{2}\right) \quad \square$$

$\boxed{2}$ Израчунати: $I=\int_{\gamma}\sqrt{x^2+y^2}\,ds$ ако је крива γ задата са:

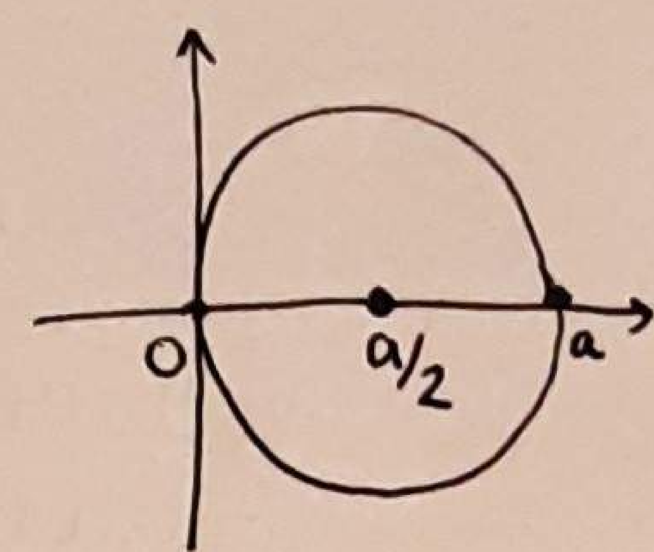
$$\gamma:\ x^2+y^2=ax \quad (a>0)$$

Нађимо параметризацију криве γ:

$$x^2+y^2-ax=0$$

$$x^2-2\cdot\frac{a}{2}\cdot x+\frac{a^2}{4}+y^2=\frac{a^2}{4}$$

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$$



$$\boxed{\begin{aligned}x-\frac{a}{2}&=\frac{a}{2}\cdot\cos t\\ y&=\frac{a}{2}\cdot\sin t\end{aligned}}$$

тј. $$\boxed{\begin{aligned}x&=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cdot\cos t\\ y&=\frac{a}{2}\sin t\end{aligned}} \qquad t\in[-\pi,\pi]$$

$$\gamma(t)=\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos t,\ \frac{a}{2}\sin t\right)$$

$$\gamma'(t)=\left(-\frac{a}{2}\sin t,\ \frac{a}{2}\cos t\right)$$

$$\|\gamma'(t)\|=\sqrt{\frac{a^2}{4}\sin^2 t+\frac{a^2}{4}\cos^2 t}=\sqrt{\frac{a^2}{4}}=\frac{|a|}{2}\overset{a>0}{=}\frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow\ I=\int_{-\pi}^{\pi}\overbrace{\sqrt{\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos t\right)^2+\left(\frac{a}{2}\sin t\right)^2}}^{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\overbrace{\frac{a}{2}}^{\|\gamma'(t)\|}\,dt$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}\cos^2 t+\frac{a^2}{2}\cos t+\frac{a^2}{4}\sin^2 t}\cdot\frac{a}{2}\,dt$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}\cdot 1+\frac{a^2}{2}\cos t}\cdot\frac{a}{2}\,dt=\frac{a}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{\frac{a^2}{2}\underbrace{(1+\cos t)}_{2\cos^2\frac{t}{2}}}\,dt$$

$$=\frac{a}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{a^2\cdot\cos^2\frac{t}{2}}\,dt$$

$\sqrt{a^2}=a$ јер $a>0$

$\sqrt{\cos^2\frac{t}{2}}=\cos\frac{t}{2}$ јер $\frac{t}{2}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

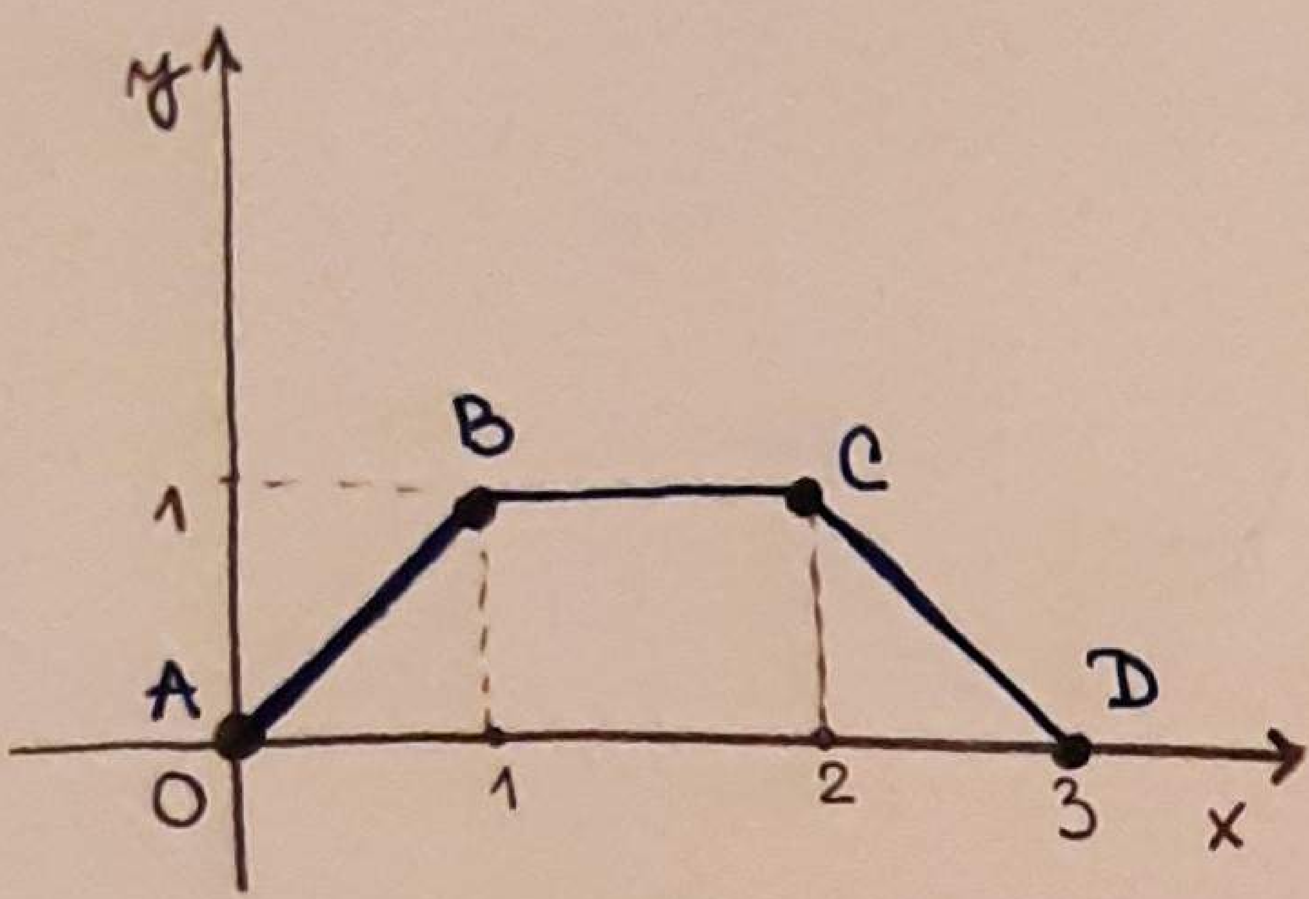
$$=\frac{a}{2}\int_{-\pi}^{\pi}a\cdot\cos\frac{t}{2}\,dt$$

$$\overset{\text{парна}}{=}\frac{a}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\cdot\underbrace{\int_{0}^{\pi}\cos\frac{t}{2}\,dt}_{2\sin\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi}}=2a^2 \quad \square$$

3. Израчунати интеграл: $\int_\gamma (x+y)\,ds$

Где је γ изломљена линија ABCD:

$A(0,0)$, $B(1,1)$, $C(2,1)$, $D(3,0)$.



γ се састоји од три дужи: AB, BC и CD

$$\Rightarrow \int_\gamma = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD}$$

за сваки од ових интеграла правимо одговарајућу параметризацију дужи:

AB $t \in [0,1]$

$x(t) = t$

$y(t) = t$

$r_1(t) = (t,t)$

$r_1'(t) = (1,1)$

$\Rightarrow \|r_1'(t)\| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$$\int_{AB} (x+y)\,ds = \int_0^1 \underbrace{(t+t)}_{\text{функција } f(r(t))} \cdot \underbrace{\sqrt{2}\,dt}_{ds} = 2\sqrt{2}\int_0^1 t\,dt = 2\sqrt{2}\cdot\frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \sqrt{2}$$

BC $t \in [1,2]$

$x(t) = t$, $y(t) = 1$

$r_2(t) = (t,1)$

$r_2'(t) = (1,0)$

$\|r_2'(t)\| = \sqrt{1} = 1$

$$\int_{BC} (x+y)\,ds = \int_1^2 (t+1)\cdot 1\,dt = \frac{(t+1)^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{9-4}{2} = \frac{5}{2}$$

CD $t \in [2,3]$

$x(t) = t$

$y(t) = 3-t$ – ту једначину има права чији је део CD

$r_3(t) = (t, 3-t)$

$r_3'(t) = (1,-1)$

$\|r_3'(t)\| = \sqrt{2}$

$$\Rightarrow \int_{CD} (x+y)\,ds = \int_2^3 (t+3-t)\cdot\sqrt{2}\,dt = \int_2^3 3\sqrt{2}\,dt = 3\sqrt{2}$$

Дакле: $$\int_\gamma (x+y)\,ds = \sqrt{2} + \frac{5}{2} + 3\sqrt{2} = \boxed{4\sqrt{2}+\frac{5}{2}}$$ ■

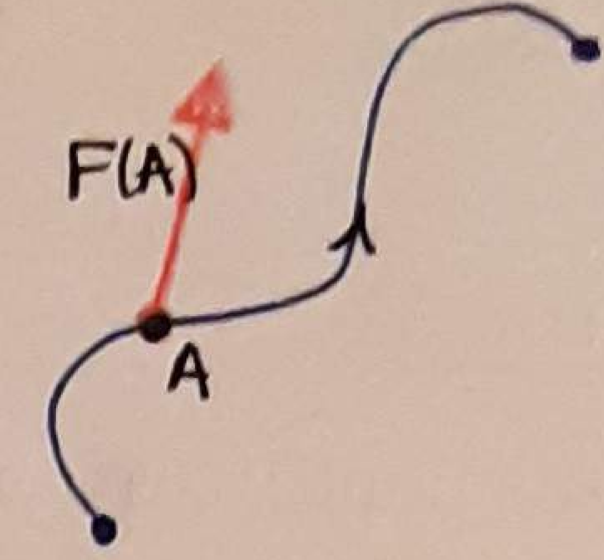
② КРИВОЛИНИЈСКИ ИНТЕГРАЛИ ДРУГЕ ВРСТЕ

* интеграл векторског поља на кривој

нека је c крива у $\mathbb{R}^3$ задата параметризацијом

$r : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, регуларна

$r(t) = (x(t), y(t), z(t))$



и нека је $F : c \to \mathbb{R}^3$ векторско поље

$F = (P, Q, R)$.

Потребан нам је и јединични вектор тангенте на криву:

$$T(r(t)) := \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|}$$

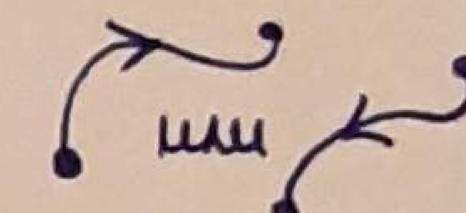
$\boxed{\text{криволинијски интеграл векторског поља } F \text{ на } c}$ дефинишемо као:

$$\int_c F \cdot dr \overset{\text{деф.}}{:=} \int_c F \bullet T \, ds$$

скаларни производ

друга ознака је: $\int_c Pdx + Qdy + Rdz$

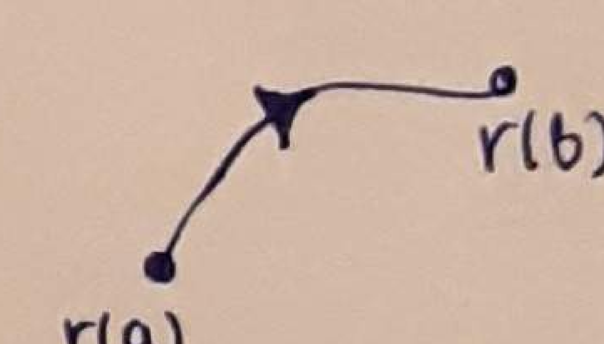
* Важан појам овде: <u>ОРИЈЕНТАЦИЈА</u> криве = смер кретања на кривој



како се може изабрати оријентација?

- регуларна параметризација $r : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ задаје оријентацију:

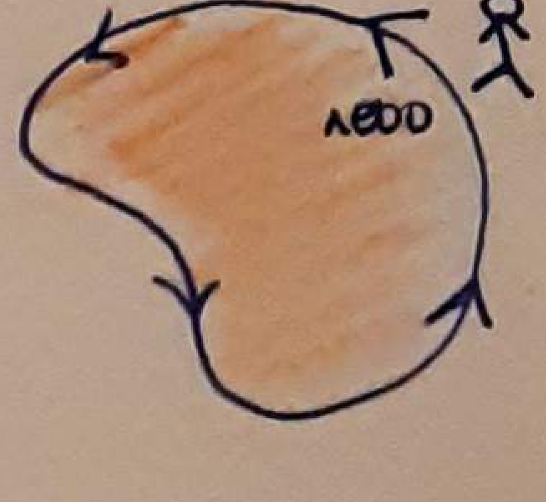
  t иде од a до b ⇝ тачка $r(t)$ иде од $r(a)$ до $r(b)$



- можемо и експлицитно навести смер кретања.

* стандардно узимамо смер кретања супротан казаљки на сату 

* кад кажемо да је нека затворена крива позитивно оријентисана (гледајући из неке тачке) то значи да приликом обиласка криве, област коју она ограничава остаје са <u>леве</u> стране



* шта се дешава ако променимо оријентацију ?

c^- - супротно оријентисана c

Важи: $$\int_{c^-} F\cdot dr = -\int_{c} F\cdot dr$$

* <u>У ЗАДАЦИМА</u>:

када имамо параметризацију криве $r: [a,b] \to \mathbb{R}^3$, $r(t)$

а оријентацију бирамо сами

морамо проверити да ли је та оријентација сагласна са растом параметра t →

тада узимамо $\int_a^b \dots$ или није, тј. супротна је → тада узимамо $-\int_a^b \dots$

* <u>КАКО РАЧУНАМО</u>:

$\boxed{\text{СТАВ}}$ c - глатка оријентисана крива

$r: [a,b] \to \mathbb{R}^3$ регуларна параметризација која одређује задату оријентацију

F - непр. векторско поље на c

тада: $$\int_c F\cdot dr = \int_a^b F(r(t))\cdot r'(t)\, dt$$

скаларни производ

тј. ако је $F=(P,Q,R)$, а $r(t)=(x(t),y(t),z(t))$

овде имамо:

$$\int_a^b \left(P(r(t))\cdot x'(t) + Q(r(t))\cdot y'(t) + R(r(t))\cdot z'(t)\right) dt$$

* све ово важи и у $\mathbb{R}^2$ аналогно!

4. Израчунати $I = \oint\limits_{\gamma} \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$ γ- позитивно оријентисан руб квадрата ABCD: A(1,0), B(0,1), C(-1,0), D(0,-1)

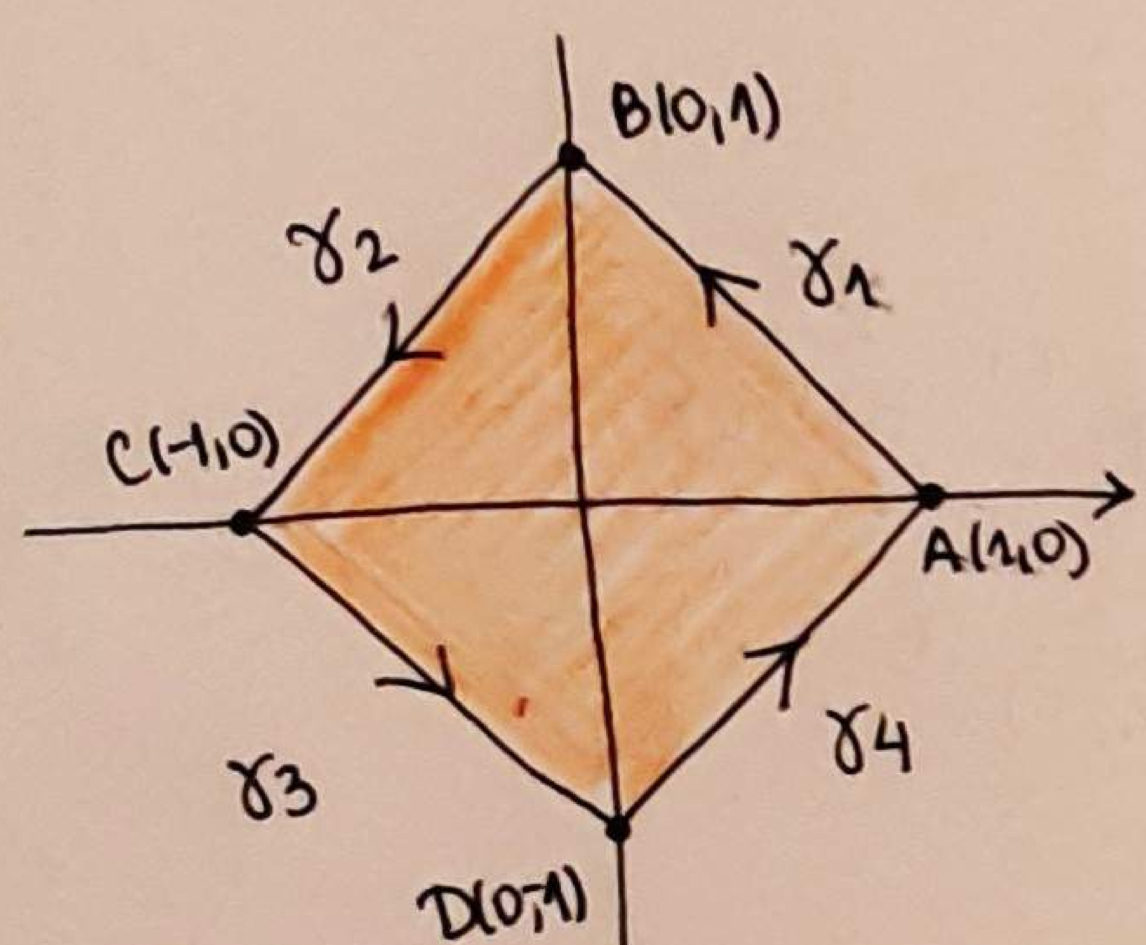
$\oint\limits_{\gamma}$ - ознака за интеграл по затвореној кривој

I: назива се ЦИРКУЛАЦИЈА ВЕКТ. ПОЉА дуж γ

Ово је крива у равни и интеграл је записан као:

$$I = \oint\limits_{\gamma} \frac{1}{|x|+|y|}dx + \frac{1}{|x|+|y|}dy = \int\limits_{\gamma} F\cdot dr \quad \text{где} \quad \underline{\underline{F = \left(\frac{1}{|x|+|y|}, \frac{1}{|x|+|y|}\right)}}$$

део по део глатка па делимо на четири глатка дела:

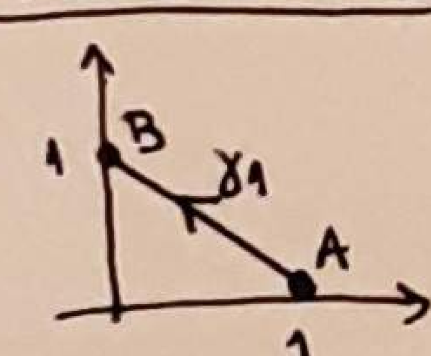


позитивна оријентација - као на слици!

$$I = \int\limits_{\gamma_1} + \int\limits_{\gamma_2} + \int\limits_{\gamma_3} + \int\limits_{\gamma_4}$$

ПАРАМЕТРИЗАЦИЈЕ:

- γ_1:

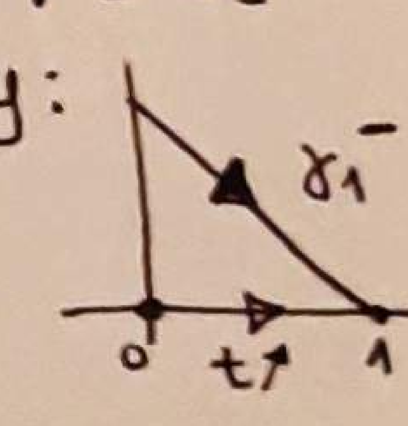


$x = t, \ t \in [0,1]$

$y = 1-t$

тј. $r_1(t) = (t, 1-t) \Rightarrow r_1'(t) = (1,-1)$

жељена оријентација γ_1 није сагласна са параметризацијом тј. раст параметра t даје супротну оријентацију:



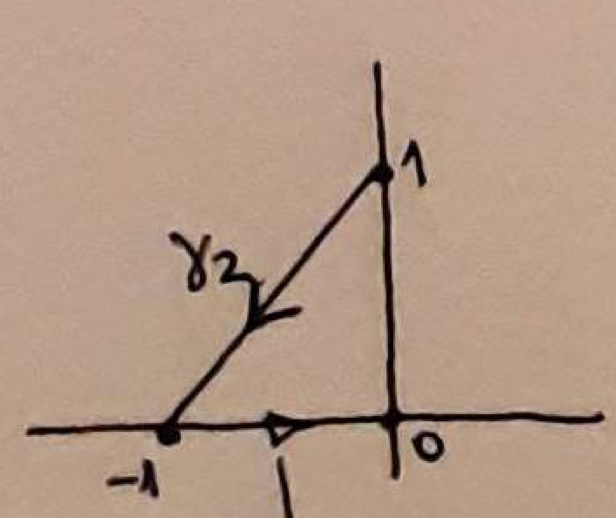
$\Rightarrow$ узимамо $-$:

$$\int\limits_{\gamma_1} F\cdot dr \overset{\text{став}}{=\!=} -\int_0^1 F(r_1(t))\cdot r_1'(t)\,dt$$

$$= -\int_0^1 \left(\frac{1}{|t|+|1-t|}, \frac{1}{|t|+|1-t|}\right)\cdot(1,-1)\,dt$$

$$= -\int_0^1 \left(\frac{1}{|t|+|1-t|} + (-1)\cdot\frac{1}{|t|+|1-t|}\right)dt = -\int_0^1 0\,dt = \boxed{0}$$

- γ_2:



раст t није сагласан са γ_2 => имамо -

$x = t, \ t \in [-1,0] \quad y = t+1$

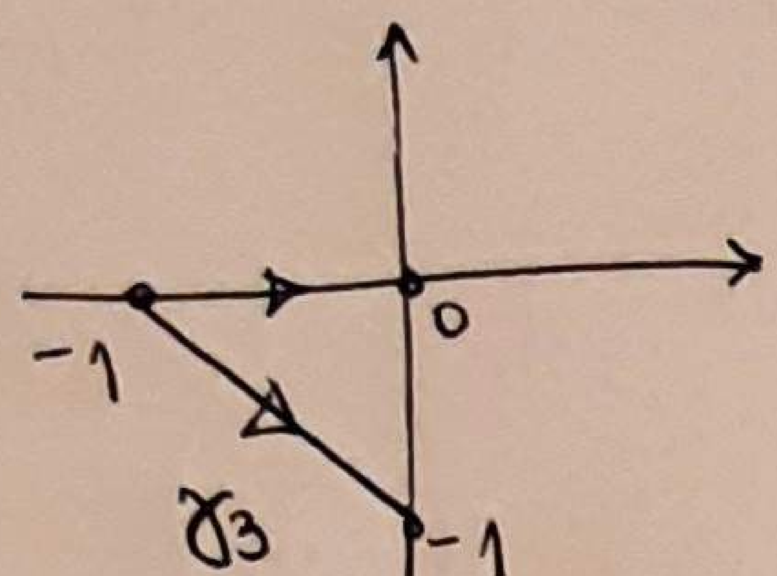
тј. $r_2(t) = (t, t+1) \quad r_2'(t) = (1,1)$

$$\int\limits_{\gamma_2} F\cdot dr = -\int_{-1}^{0} F(r_2(t))\cdot r_2'(t)\,dt =$$

$$= -\int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{|t|+|t+1|}, \frac{1}{|t|+|t+1|}\right)\cdot(1,1)\,dt$$

$$= -\int_{-1}^{0} 2\cdot\frac{1}{|t|+|t+1|}\,dt \underset{t\in[-1,0]}{=\!=} -\int_{-1}^{0} 2\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{-t+(t+1)}\right)}_{=1}dt = -2$$

• γ_3 :

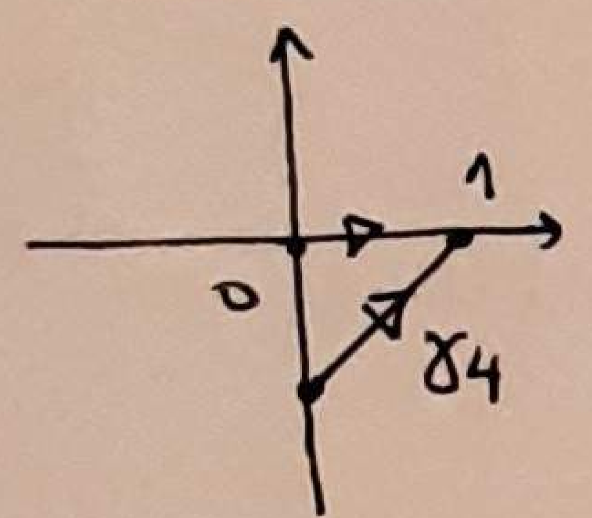


$x=t,\ y=-t-1,\ t\in[-1,0]$ $\quad r_3(t)=(t,-t-1)\quad r_3'(t)=(1,-1)$

$$\int_{\gamma_3} F\cdot dr = \int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{|t|+|-t-1|}\cdot 1 + \frac{1}{|t|+|-t-1|}\cdot(-1)\right)dt = 0$$

расте t сагласан 🙂

• γ_4 :



$x=t,\ y=t-1,\ t\in[0,1]$

$r_4(t)=(t,t-1)\quad r_4'(t)=(1,1)$

сагласан расте t
са њеном оријентацијом:

$$\int_{\gamma_4} F\cdot dr = \int_{0}^{1}\left(\frac{1}{|t|+|t-1|}\cdot 1 + \frac{1}{|t|+|t-1|}\cdot 1\right)dt$$

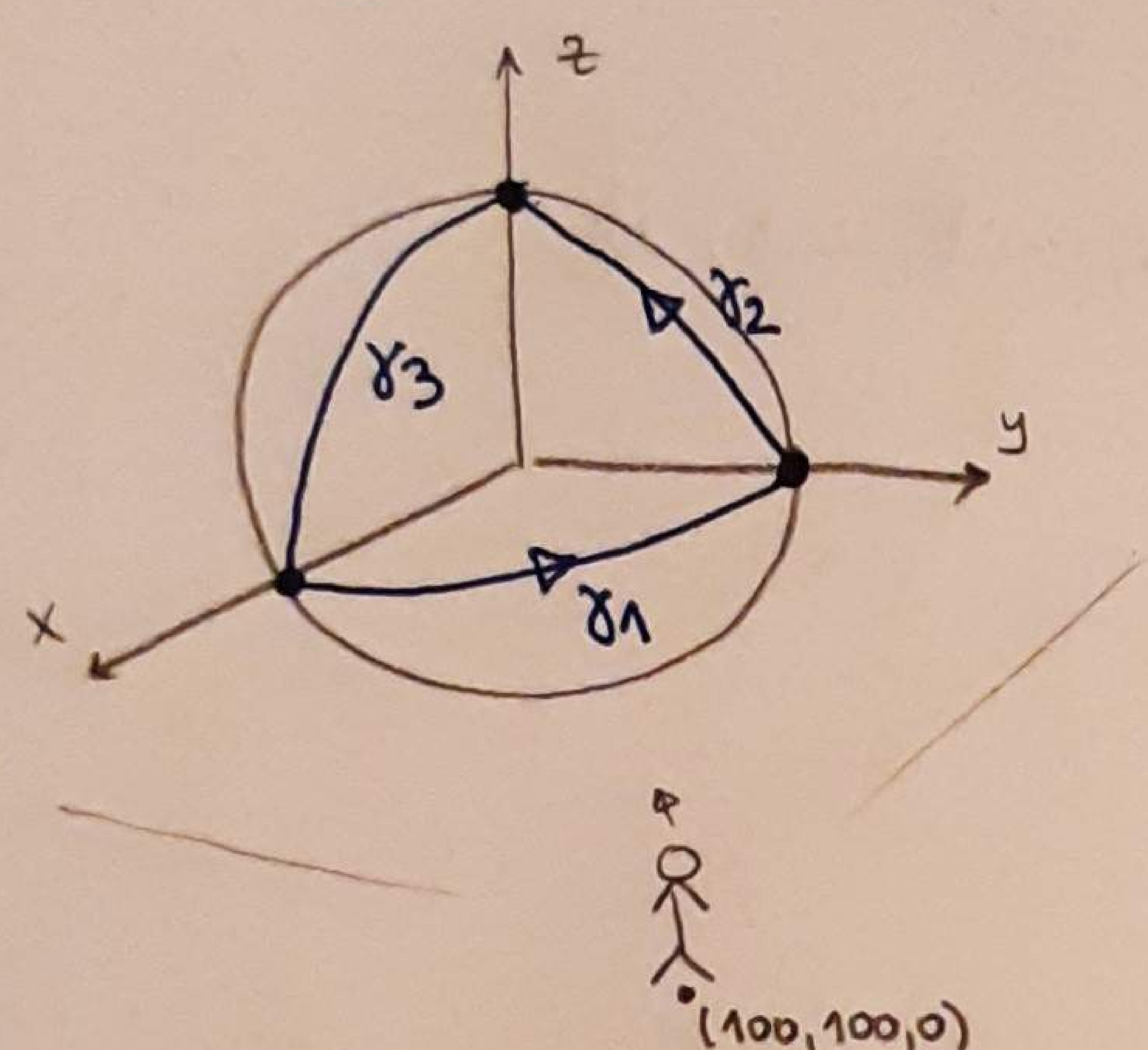
$$= 2\int_0^1 \frac{1}{t+(1-t)}\,dt = 2\int_0^1 1\,dt =$$

$$= 2$$

дакле: $I = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4} = 0 + (-2) + 0 + 2 = 0 \quad \boxed{I=0}$ □

5. Израчунати $I=\oint_{\gamma} F\cdot dr$: $F(x,y,z)=(y^2-z^2,\ z^2-x^2,\ x^2-y^2)$

где је γ контура која ограничава део сфере $x^2+y^2+z^2=1$ у првом октанту, при чему је смер обиласка криве супротан смеру казаљке на сату кад се посматра из тачке $A(100,100,0)$.



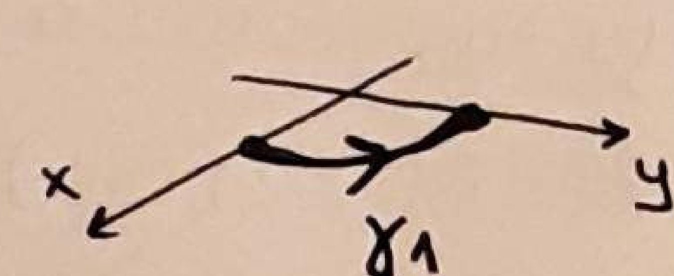
Имамо три глатка дела: $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$

па важи:
$$I=\int_{\gamma_1}+\int_{\gamma_2}+\int_{\gamma_3}$$

Параметризујмо сваку од њих:

$\boxed{\gamma_1}$ - део јединичног круга (четвртина) у равни xy:

$x=\cos t,\ y=\sin t \quad t\in[0,\frac{\pi}{2}]$
$z=0$



тј. $r_1(t)=(\cos t, \sin t, 0)$

$r_1(0)=(1,0,0)\ ,\ r_1(\frac{\pi}{2})=(0,1,0)$

$\Rightarrow$ оријентација се слаже са растом параметра t.

став
$$\Rightarrow \int_{\gamma_1} F\cdot dr=\int_0^{\pi/2} F(r_1(t))\cdot r_1'(t)\,dt$$
$$=\int_0^{\pi/2} F(\cos t, \sin t, 0)\cdot(-\sin t, \cos t, 0)\,dt$$
$$=\int_0^{\pi/2}(\sin^2 t-0,\ 0-\cos^2 t,\ \cos^2 t-\sin^2 t)\cdot(-\sin t, \cos t, 0)\,dt$$
$$=\int_0^{\pi/2}(-\sin^3 t-\cos^3 t)\,dt$$

Рачунамо овај интеграл стандардним методом:
$$\int_{\gamma_1} F\cdot dr=-\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cdot\sin t\,dt-\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\cdot\cos t\,dt=-\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2 t)\sin t\,dt-\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2 t)\cos t\,dt$$

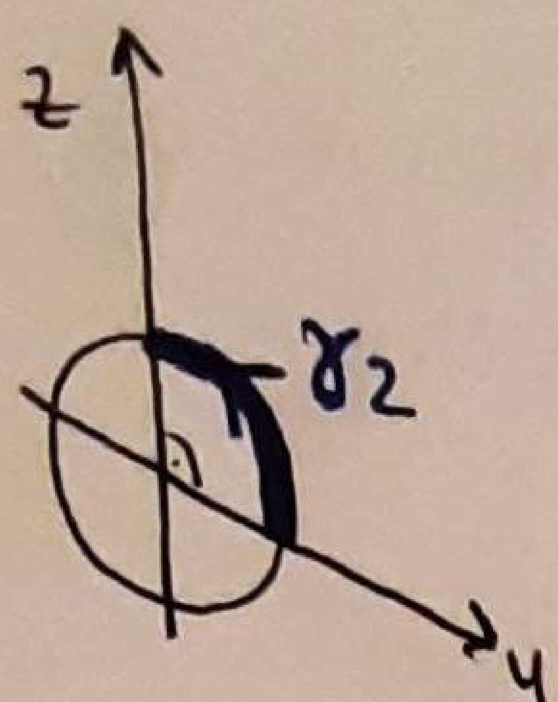
СМЕНА: $u=\cos t\in[1,0]$, $du=-\sin t\,dt$

СМЕНА: $v=\sin t\in[0,1]$, $dv=\cos t\,dt$

$$=+\int_1^0(1-u^2)\,du-\int_0^1(1-v^2)\,dv$$
$$=-2\int_0^1(1-u^2)\,du$$
$$=-2\left(u-\frac{u^3}{3}\right)\Big|_0^1=(-2)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)=-\frac{4}{3}$$

Сада прелазимо на γ_2 и γ_3, потпуно аналогно.

$\boxed{\gamma_2}$ – део јединичног круга у yz-равни



$x=0$
$y=\cos t$
$z=\sin t$
$t\in[0,\frac{\pi}{2}]$
сагласно орј. и

$r_2(t)=(0,\cos t,\sin t)$

$r_2'(t)=(0,-\sin t,\cos t)$

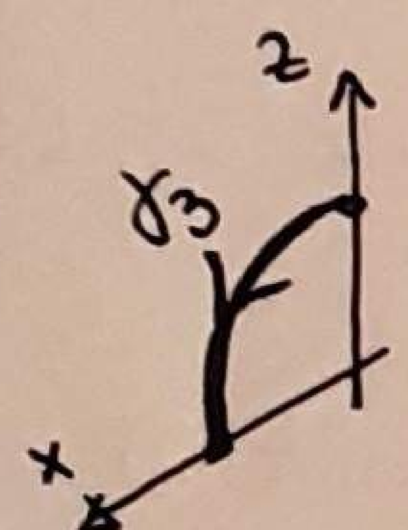
$$\int_{\gamma_2} F\cdot dr=\int_0^{\pi/2}(\cos^2 t-\sin^2 t,\ \sin^2 t-0,\ 0-\cos^2 t)\cdot(0,-\sin t,\cos t)\,dt$$

$$=-\int_0^{\pi/2}(\sin^3 t+\cos^3 t)\,dt$$

као претходни

$$=-\frac{4}{3}$$

$\boxed{\gamma_3}$



$y=0$
$x=\cos t$
$z=\sin t$
$t\in[0,\frac{\pi}{2}]$

сада није сагласна оријентација јер $r_3(0)=(1,0,0)$ није почетна већ крајња тачка $\Rightarrow \ominus$ у $\int$

$r_3(t)=(\cos t,0,\sin t)$

$r_3'(t)=(-\sin t,0,\cos t)$

$$\int_{\gamma_3} F\cdot dr=-\int_0^{\pi/2}(0-\sin^2 t,\ \sin^2 t-\cos^2 t,\ \cos^2 t-0)\cdot(-\sin t,0,\cos t)\,dt$$

$$=-\int_0^{\pi/2}(\sin^3 t+\cos^3 t)\,dt$$

$$\overset{\text{претх.}}{=}-\frac{4}{3}$$

Коначно, $I=\int_{\gamma_1}+\int_{\gamma_2}+\int_{\gamma_3}=3\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)$ $\boxed{I=-4}$ □

6. Крива c је пресек површи:

$$S_1: \ z = 1 - x^2$$
$$S_2: \ z = x^2 + y^2$$

оријентисана супротно од смера казаљке на сату ако се посматра из тачке $(0,0,2020)$.

Израчунати:

$$I = \oint_c y\,dx + z\,dy + x\,dz .$$

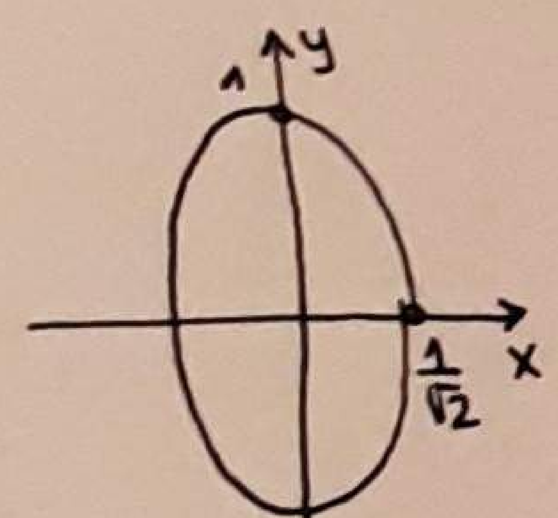
<u>параметризација c</u>:

$$1 - x^2 = z = x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow \ 2x^2 + y^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \ \frac{x^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1$$ – што је елипса:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos t$$
$$y = \sin t$$
$$t \in [0, 2\pi]$$



(ово је <u>пројекција</u> криве c на xy-раван)

☺ ЕЛИПСА:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$x = a \cdot \cos t$
$y = b \cdot \sin t$ $\quad t \in [0, 2\pi]$ или $[-\pi, \pi]$

померена: $$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

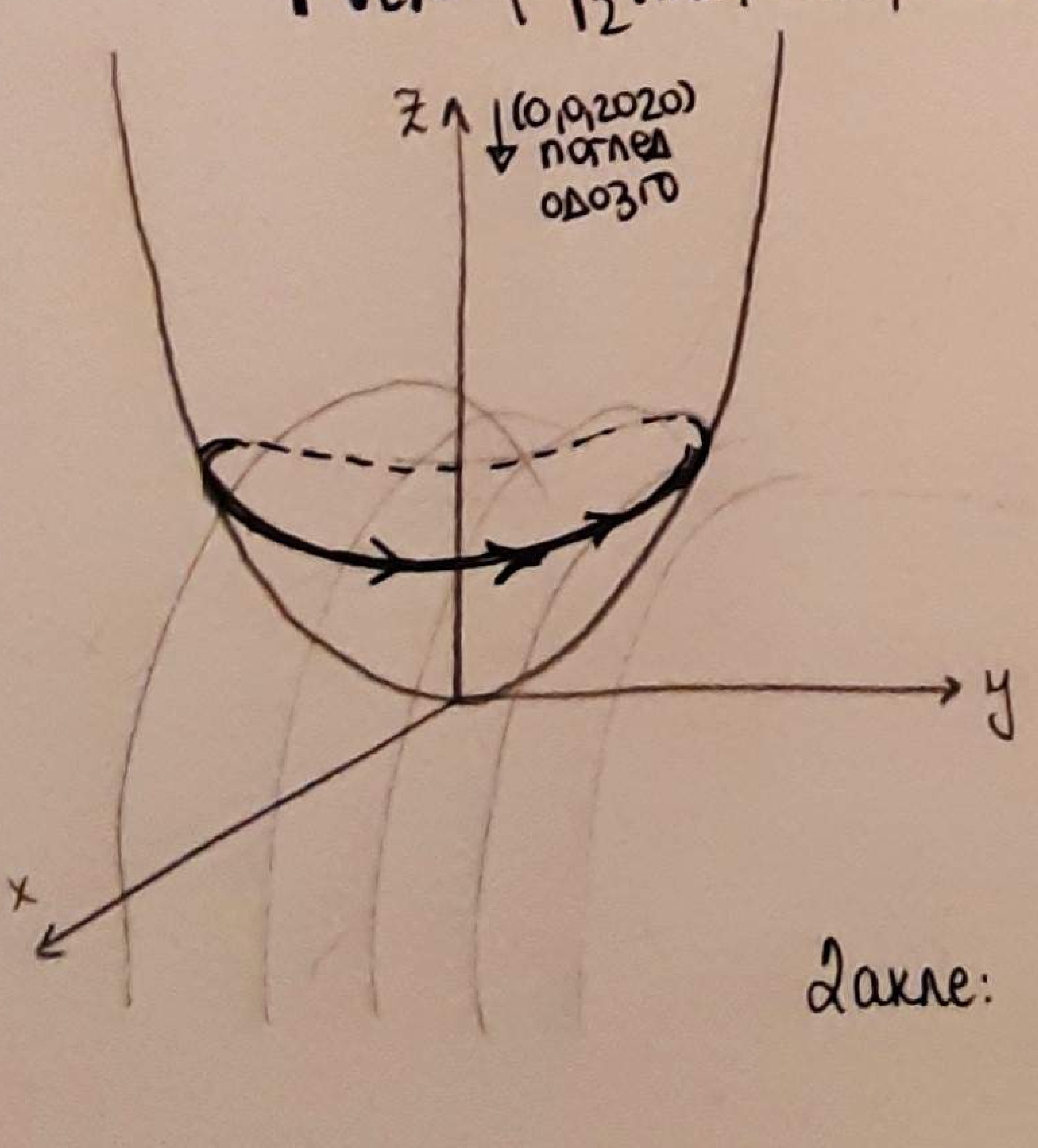
$x = x_0 + a\cos t$
$y = y_0 + b\sin t$

„права" крива c → рачунамо z:

$$z = 1 - x^2 \quad z = 1 - \frac{1}{2}\cos^2 t$$

$$\Rightarrow \ \boxed{\mathbf{r}(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, \ \sin t, \ 1 - \frac{1}{2}\cos^2 t\right)} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\mathbf{r}'(t) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t, \ \cos t, \ \cos t \cdot \sin t\right)$$

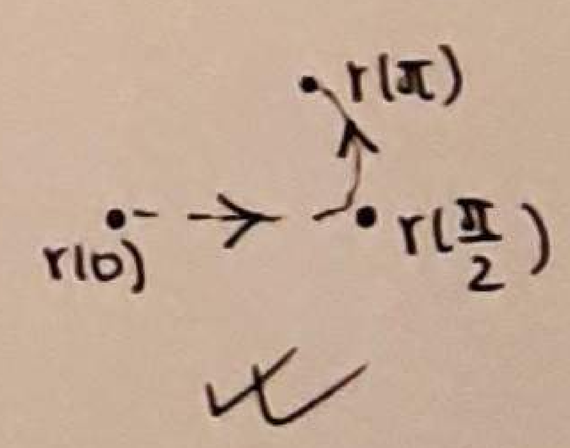


оријентација се слаже са параметризацијом тј. са избором параметра t и ручно проверимо ☺:

$t = 0$: $\ r(0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{2}\right)$

$t = \frac{\pi}{2}$: $\ r\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 1, 1)$

$t = \pi$: $\ r(\pi) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{2}\right)$



Дакле:

$$I = \int_0^{2\pi} F(r(t)) \cdot r'(t)\,dt$$

где $F(x,y,z) = (y, z, x)$

$$\Rightarrow \quad I = \underbrace{\int_0^{2\pi}}_{} \left(\sin t,\ 1-\tfrac{1}{2}\cos^2 t,\ \tfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right)\cdot\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin t,\ \cos t,\ \cos t \sin t\right) dt$$

интегралимо
2π-периодичну фју,
па може $= \int_{-\pi}^{\pi} -||-$

$$\Rightarrow \quad I = \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^2 t + \cos t - \frac{1}{2}\cos^3 t + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos^2 t \sin t \, dt$$

$$= -\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2}}\sin^2 t \, dt}_{\text{парна}} + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos t - \frac{1}{2}\cos^3 t\right) dt}_{\text{парна}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\cos^2 t \sin t}_{\text{непарна}} \, dt$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2t}{2} dt + 2\int_0^{\pi} \cos t \, dt + 2\cdot\frac{-1}{2} \int_0^{\pi} \cos^3 t \, dt$$

$= \circ\circ\circ$ (рачун)

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\pi \quad \square$$