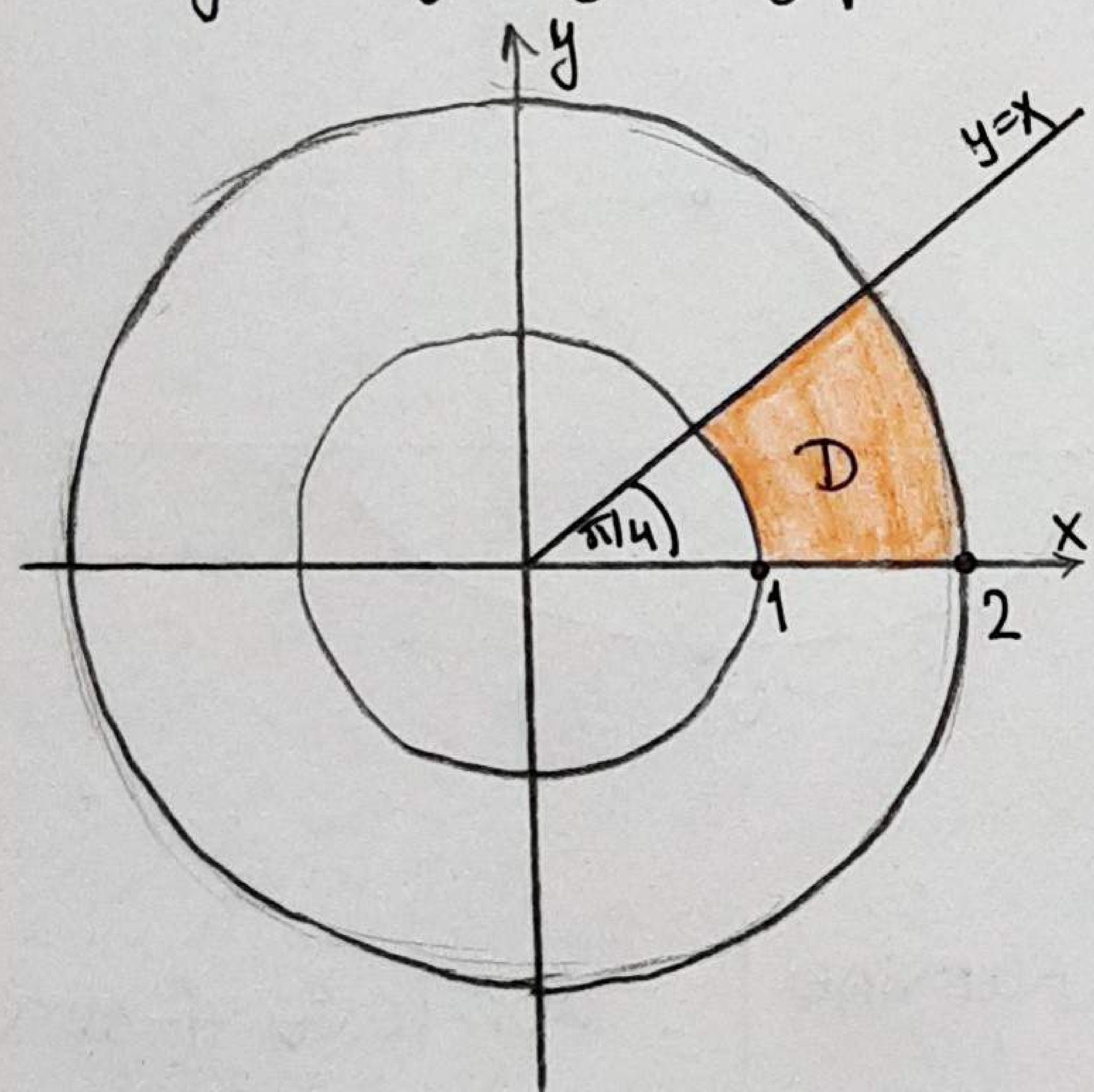
Смена променљивих у вишеструким интегралима (наставак)

ВЕЖБЕ за среду 15. април

1. Израчунати $I = \iint\limits_D \frac{1}{2x^2+y^2}\,dx\,dy$

где је: $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\le x^2+y^2\le 4,\ 0\le y\le x\}$

Као у једном од задатака са прошлог часа, видимо да је D пресек кружног прстена између кругова полупречника 1 и 2, и угла између полуправих $y=x,\ x\geq 0$ и $y=0, x\geq 0$:



Природно је да уведемо поларне координате:

$x = r\cdot\cos\theta$

$y = r\cdot\sin\theta$

Границе:

- r: $1\le x^2+y^2\le 4$ тј. $1\le r^2\le 2^2$ $\boxed{r\in[1,2]}$
- θ: полуправа $y=x$ прави угао од $\frac{\pi}{4}$ са x-осом $\Rightarrow$ $\boxed{0\le\theta\le\frac{\pi}{4}}$

Знамо да је Јакобијан ове смене $=r$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\pi/4}\left(\int_1^2 \frac{1}{2r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}\cdot r\,dr\right)d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/4}\left(\int_1^2 \frac{r}{r^2\cdot\underbrace{(2\cos^2\theta+\sin^2\theta)}_{=1+\cos^2\theta}}\,dr\right)d\theta = \int_0^{\pi/4}\left(\int_1^2 \frac{1}{1+\cos^2\theta}\cdot\frac{1}{r}\,dr\right)d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{1+\cos^2\theta}\cdot \ln r\Big|_1^2\,d\theta = \ln 2\cdot\int_0^{\pi/4}\frac{1}{\cos^2\theta+1}\,d\theta$$

Смена $\operatorname{tg}\theta = t$

$\Rightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{1+t^2}$, $d\theta = \frac{dt}{1+t^2}$

$\theta\in[0,\pi/4] \to t\in[0,1]$

☺ подсетимо се триг. смена у интегралима! увек може $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ али пошто је $\frac{1}{\cos^2\theta+1}$ парна по $\cos\theta$, може смена $\operatorname{tg}\theta$

$$\Rightarrow I = \ln 2\cdot\int_0^1 \frac{1}{\frac{1}{1+t^2}+1}\cdot\frac{dt}{1+t^2} = \ln 2\cdot\int_0^1\frac{dt}{2+t^2} =$$

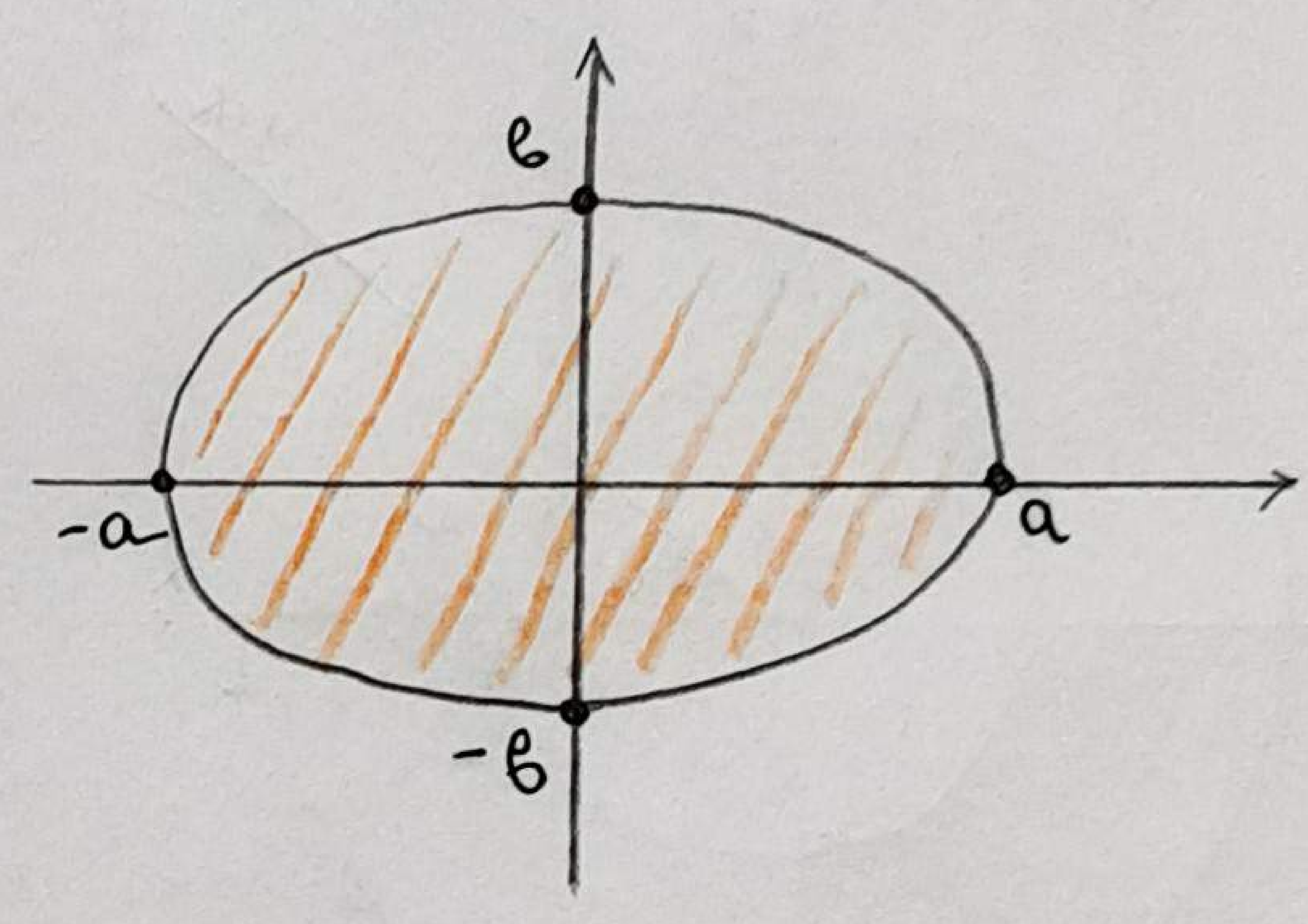
$$= \ln 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} \Big|_0^1$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{\ln 2}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}} \quad \square$$

2. Израчунати површину елипсе $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$, $a, b > 0$

$$P = \iint\limits_E dx\,dy$$

Аналогно поларним координатама, уводимо елиптичке координате:



СМЕНА: $x = a \cdot r \cdot \cos\theta$

$y = b \cdot r \cdot \sin\theta$

$r \in [0, 1]$

$\theta \in [0, 2\pi)$

Јакобијан:

$$J = \det \begin{bmatrix} x'_r & x'_\theta \\ y'_r & y'_\theta \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & +br\cos\theta \end{bmatrix} = abr \cdot \cos^2\theta - (-abr\sin^2\theta)$$

$$= abr(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$

$$= \boxed{abr}$$

$$\boxed{J = abr}$$

Дакле:

$$P = \iint\limits_E dx\,dy = \int_0^1 \Big(\int_0^{2\pi} \underset{\text{фја !!}}{1} \cdot \underset{|J|}{\underline{abr}}\, d\theta \Big) dr$$

$$= \int_0^1 \left(abr \cdot \theta \Big|_0^{2\pi} \right) dr$$

$$= \int_0^1 ab \cdot 2\pi \cdot \underline{\underline{r\, dr}}$$

$$= ab \cdot 2\pi \cdot \frac{r^2}{2} \Big|_0^1$$

$$= ab\pi$$

$$\boxed{P = ab\pi}$$

3. Израчунати интеграл

$$I = \iint_D \frac{x^2+y^2}{xy}\,dx\,dy$$

за скуп $D \subset \mathbb{R}^2$ дат условима: $1 \le xy \le 2$

$y^2-5xy+4x^2 \le 0$

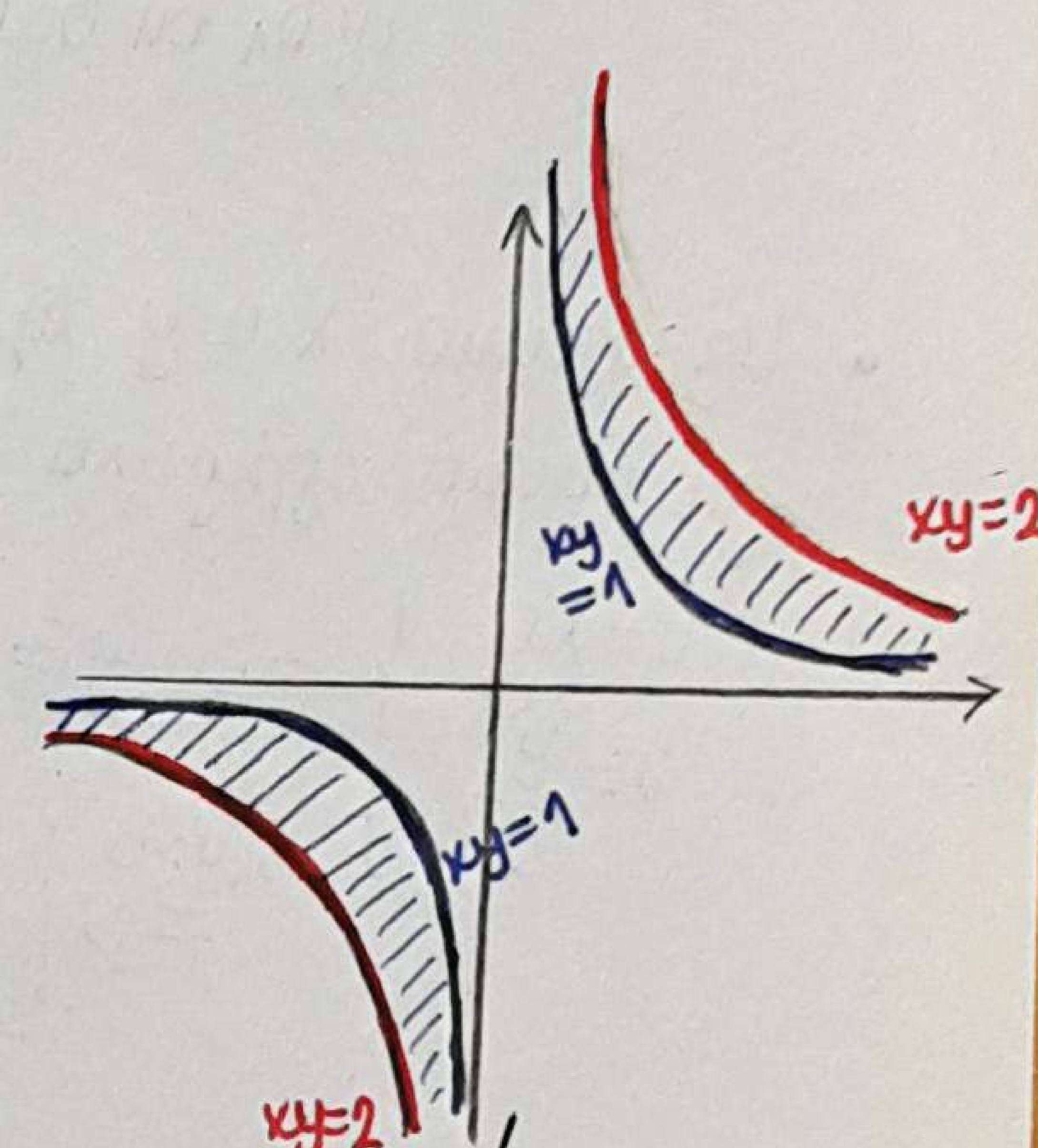
Шта је D?

- услов $1 \le xy \le 2$: имамо два случаја:

$x, y > 0$ и $x, y < 0$

$x, y > 0$, $1 \le xy \le 2$ → појас између две хипербле $xy=1$, $xy=2$ у I квадранту.

$x, y < 0$, $1 \le xy \le 2$ → појас између истих хипербола у III квадранту.

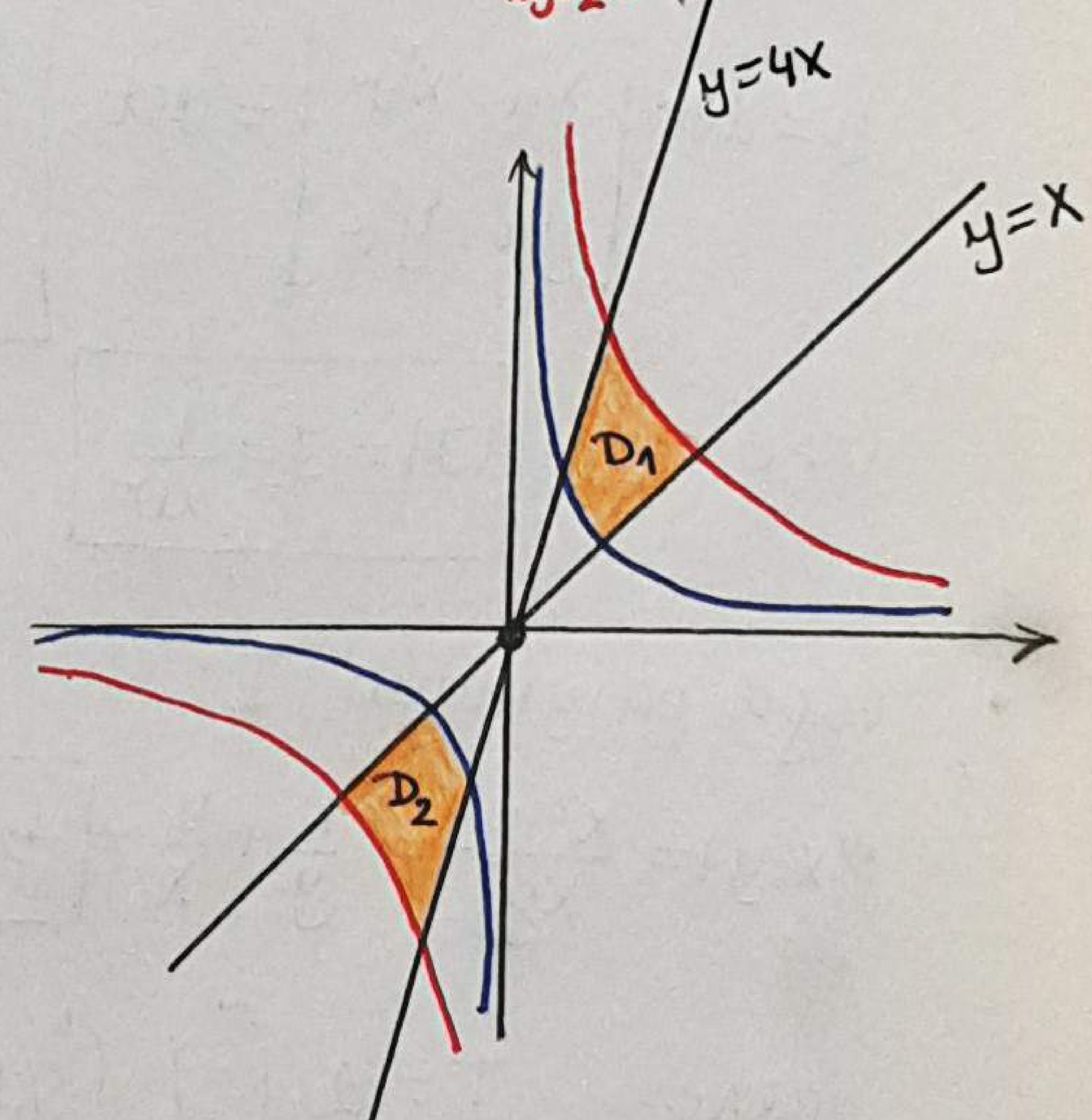


- услов $y^2-5xy+4x^2 \le 0$:

$\Leftrightarrow (y-4x)(y-x) \le 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{x \le y \le 4x}$ или $\underbrace{4x \le y \le x}$

између правих $y=x$ и $y=4x$ у I квадранту; у III квадранту



$\Rightarrow$ D се састоји од два обојена дела D_1 и D_2

$$I = \iint_{D_1} \frac{x^2+y^2}{xy}\,dx\,dy + \iint_{D_2} \frac{x^2+y^2}{xy}\,dx\,dy$$

$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{xy}$ са D_1 се прелази на D_2 сменом

$y_1=-y$, $x_1=-x$

$f(-x,-y) = f(x,y)$ – парна!

Јакобијан смене је $=1$

$\Rightarrow \boxed{\iint_{D_2} f = \iint_{D_1} f}$

(за вежбу детаљно показати)

$\Rightarrow \boxed{I = 2\iint\limits_{D_1} \frac{x^2+y^2}{xy}\,dx\,dy}$

уводимо смену u и v коју мотивишу услове које имамо:

услов: $1 \le xy \le 2 \to u = xy \quad u \in [1,2]$

услов: $x \le y \le 4x \quad / : x,\ x>0 \Rightarrow 1 \le \frac{y}{x} \le 4 \to v = \frac{y}{x},\ v \in [1,4]$

(у D_1 он важи)

- Изразимо x и y преко u и v да бисмо одредили Јакобијан:

$$\left.\begin{aligned} u &= xy \\ v &= \frac{y}{x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow y^2 = u \cdot v,\quad x^2 = \frac{u}{v}$$

$$\overset{x,y>0}{\Longrightarrow} \boxed{y = \sqrt{uv},\quad x = \sqrt{\frac{u}{v}}}$$

☺ II начин: одредити Јакобијан пресликавања $(x,y) \to (u,v)$ па је наш Јакобијан детерминанта инверзне матрице

$$J = \det\begin{bmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{uv}} & -\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{u}}{v\sqrt{v}} \\ \frac{1}{2}\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}} & \frac{1}{2}\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{v} - \left(-\frac{1}{4}\frac{1}{v}\right) = \frac{1}{2v}$$

$$v > 0 \Rightarrow \boxed{|J| = J = \frac{1}{2v}}$$

- сада рачунамо I:

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \boxed{\frac{1}{v} + v}$$

дакле: $I = 2\int_1^2 \left(\int_1^4 \left(\frac{1}{v} + v\right) \cdot \frac{1}{2v}\, dv \right) du$

$$= 2\int_1^2 \left(\int_1^4 \left(\frac{1}{2v^2} + \frac{1}{2}\right) dv \right) du$$

$$= \cancel{2}\int_1^2 \left(\frac{-1}{\cancel{2}v} + \frac{1}{\cancel{2}}v\right)\Big|_1^4\, du$$

$$= \int_1^2 \left(-\frac{1}{v} + v\right)\Big|_1^4\, du = \int_1^2 \left(-\frac{1}{4} + 4 - (-1+1)\right) du$$

$$= \int_1^2 \frac{15}{4}\, du = \frac{15}{4} u \Big|_1^2 = \boxed{\frac{15}{4}} \quad \square$$

~ Смена променљиве у троструком интегралу ~

Важе теореме аналогне оним за двоструки интеграл.

$\boxed{T}$ T, T_1 – отворени, повезани, мерљиви скупови у $\mathbb{R}^3$

$F: \overline{T_1} \to \overline{T}$ непрекидно диференцијабилна функција, T_1-бијективно слика на T

f – интеграбилна на T

Тада важи:

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{T_1} f(F(u,v,w)) \cdot |J_F(u,v,w)|\,du\,dv\,dw$$

Две важне смене:

ЦИЛИНДРИЧНЕ КООРДИНАТЕ

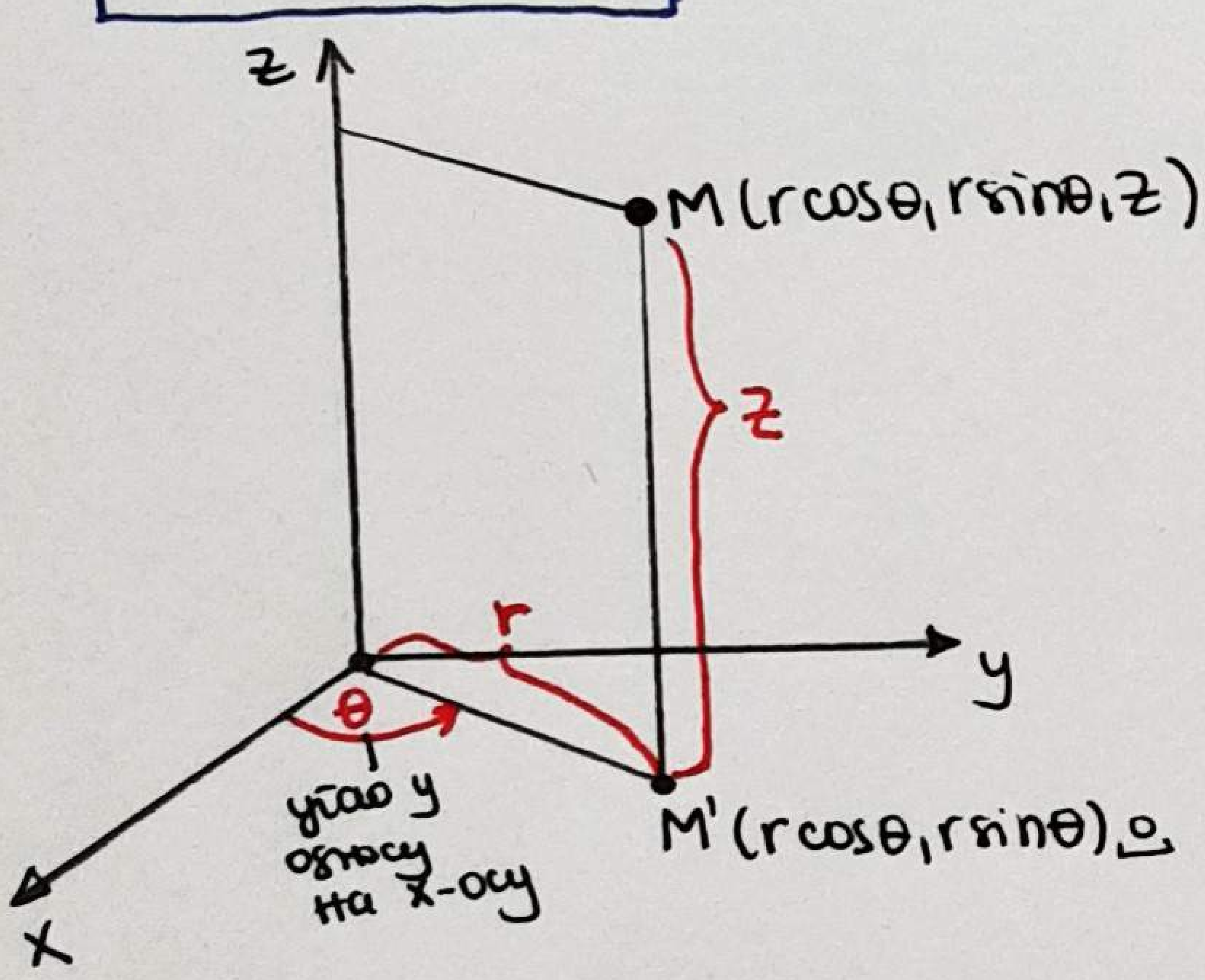
$M(x,y,z) \longrightarrow M(\underbrace{r,\theta}, z)$

(r,θ) су поларне координате пројекције M' тачке M на xy-раван

$r \geq 0$

$\theta \in [0, 2\pi)$

$z \in \mathbb{R}$



$M(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$

Јакобијан: $J(r,\theta,z) = \det\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = r$

(често се могу избећи, применом Фубинијеве теореме и поларних координата у равни.

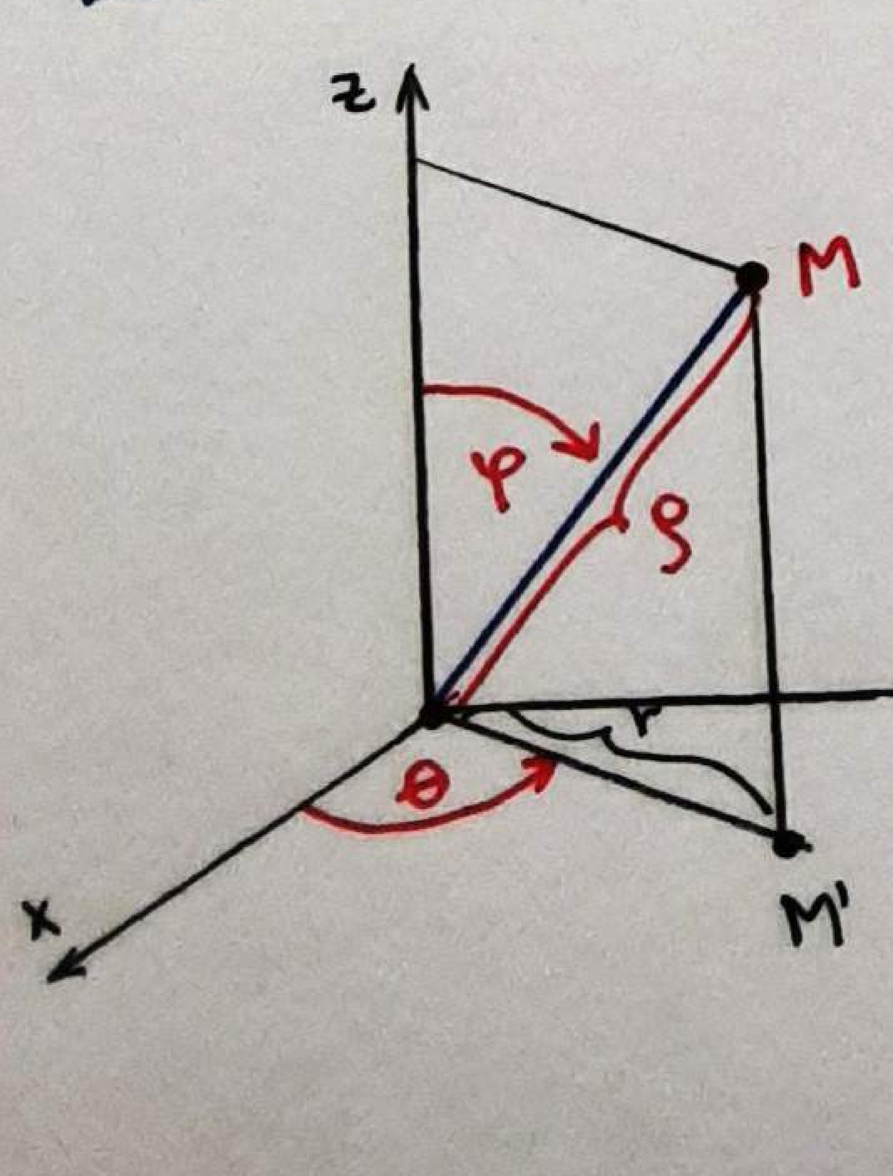
СФЕРНЕ КООРДИНАТЕ

$M(x,y,z) \longrightarrow M(\rho, \theta, \varphi)$ $\quad \rho \geq 0,\ \theta \in [0, 2\pi)$ (или $[-\pi, \pi)$), $\varphi \in [0, \pi]$

ρ – растојање M до коорд. почетка

θ – угао између позитивног дела x-осе и $\overrightarrow{OM'}$, где је M' – пројекција M на xy-раван.

φ – угао између позитивног дела z-осе и $\overrightarrow{OM}$.



ако означимо $OM' = r$ тада $r = \rho\sin\varphi$

$x = r\cdot\cos\theta \Rightarrow \boxed{x = \rho\sin\varphi\cos\theta}$

$y = r\cdot\sin\theta \Rightarrow \boxed{y = \rho\sin\varphi\sin\theta}$

$\boxed{z = \rho\cdot\cos\varphi}$

$\Rightarrow M(\rho\cdot\sin\varphi\cdot\cos\theta,\ \rho\cdot\sin\varphi\cdot\sin\theta,\ \rho\cos\varphi)$

Јакобијан је израчунат на предавању:

$$J = -\rho^2 \cdot \underbrace{\sin\varphi}_{\geq 0 \text{ јер } \varphi \in [0,\pi]} \Rightarrow J \leq 0$$

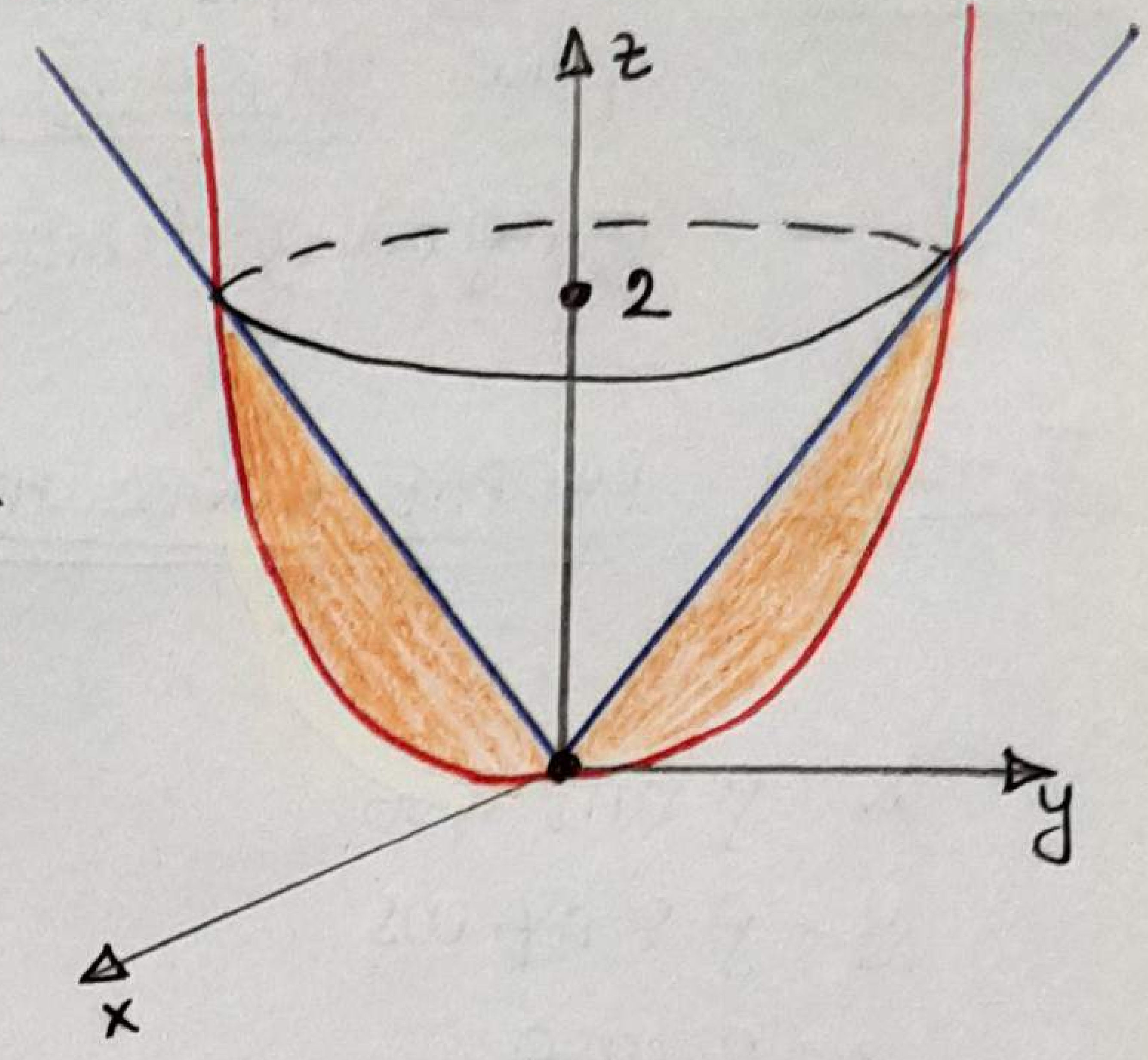
$$\Rightarrow \boxed{|J| = \rho^2 \cdot \sin\varphi}$$

Дакле, на основу теореме о смени променљиве, кад ово применимо:

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{T_1} f(\rho\cdot\sin\varphi\cdot\cos\theta, \rho\cdot\sin\varphi\cdot\sin\theta, \rho\cos\varphi)\cdot\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta.$$

$\boxed{1.}$ Одредити запремину тела

$$T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2+y^2}{2}\leq z\leq\sqrt{x^2+y^2}\}$$



$$V=\iiint_T dx\,dy\,dz$$

(1) $\frac{x^2+y^2}{2}\leq z$: граница је $x^2+y^2=2z$ параболоид

(2) $z\leq\sqrt{x^2+y^2}$: граница је $z^2=x^2+y^2$ конус
$(z\geq 0$ из $(1))$

пресек (1) и (2):

$$\frac{x^2+y^2}{2}=\sqrt{x^2+y^2}=z$$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}=0}_{\text{коорд. почетак}} \ \vee \ \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}=2}_{\substack{\text{круг } x^2+y^2=4 \\ \text{на висини } z=2}}$$

Дакле, пројекција T_1 тела T на xy-раван је круг са центром у $(0,0)$ полупречника 2:

$$T_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=2^2\}$$

$$\Rightarrow V=\iiint_T dx\,dy\,dz = \iint_{T_1}\left(\int_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{\sqrt{x^2+y^2}} dz\right)dx\,dy = \iint_{T_1}\left(\sqrt{x^2+y^2}-\frac{x^2+y^2}{2}\right)dx\,dy$$

фубинијева теорема
$\frac{x^2+y^2}{2}\leq z\leq\sqrt{x^2+y^2}$

уводимо поларне координате на T_1

$x=r\cos\theta \quad r\in[0,2] \quad \Rightarrow x^2+y^2=r^2$

$y=r\sin\theta \quad \theta\in[-\pi,\pi)$

$\sqrt{r^2}=r$ јер $r\geq 0$

$$\Rightarrow V=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^2\left(\sqrt{r^2}-\frac{r^2}{2}\right)\cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Јакобијан}}}{r}\,dr\right)d\theta$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^2\left(r^2-\frac{r^3}{2}\right)dr\right)d\theta$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{r^3}{3}-\frac{r^4}{8}\right)\Big|_0^2 d\theta$$

$$=\left(\frac{8}{3}-2\right)\cdot\theta\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{2}{3}\cdot 2\pi=\frac{4}{3}\pi \quad \square$$

☺ Могли смо радити преко цилиндричних координата, али само бисмо компликовали

2. Одредити запремину тела $T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \underbrace{x^2+y^2+z^2\le 9}_{\text{граница је сфера полупр. 3.}},\ \underbrace{z^2\ge \frac{x^2+y^2}{3}}_{\text{граница је конус као у претх. задатку}},\ z\ge 0\}$

I начин: као претходни задатак, преко пројекције, урадити за вежбу

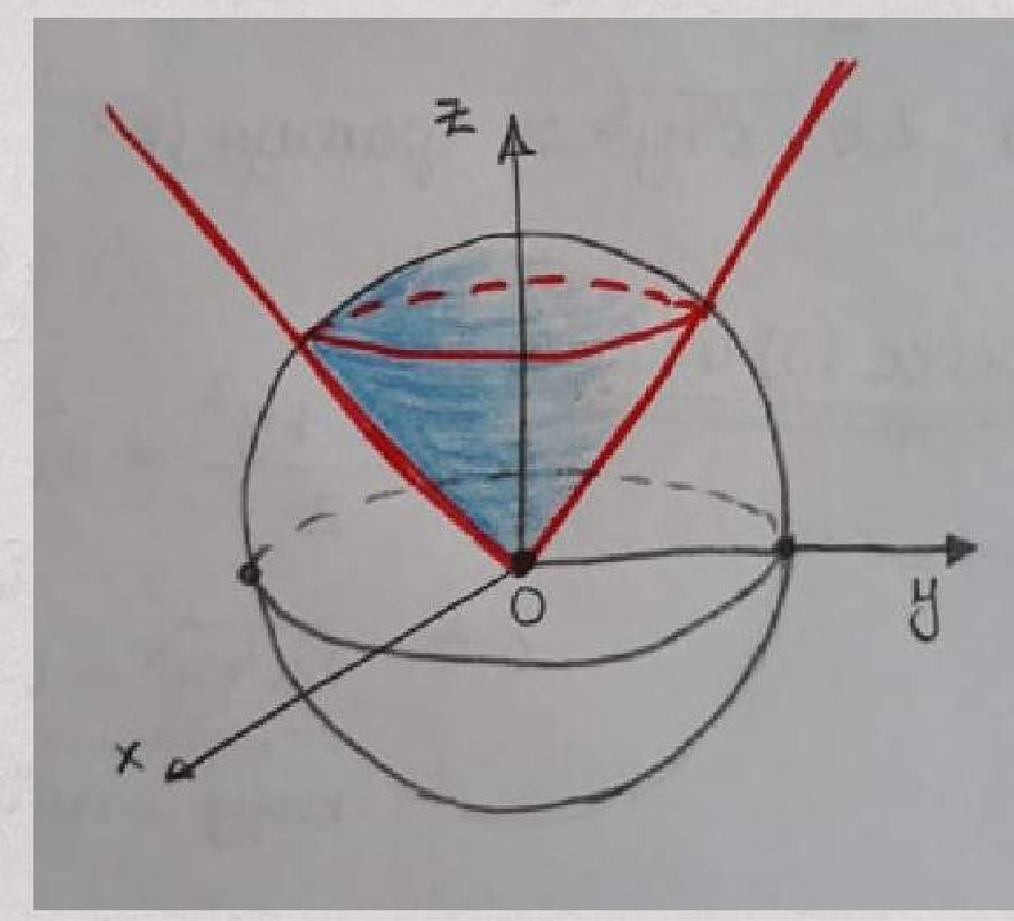
II начин: СФЕРНЕ КООРДИНАТЕ – ово је део сфере, тј. лопте, па је природно!

$x=\rho\cdot\sin\varphi\cdot\cos\theta$

$y=\rho\cdot\sin\varphi\cdot\sin\theta$

$z=\rho\cdot\cos\varphi$

$|J|=\rho^2\cdot\sin\varphi$



Границе за ρ,φ,θ:
- $\boxed{\theta\in[-\pi,\pi]}$ ✓
- $x^2+y^2+z^2=\rho^2\le 9$

  $\Rightarrow \rho\le 3 \Rightarrow \boxed{\rho\in[0,3]}$

- $\varphi \to$ који отклон прави конус у односу на z-осу?

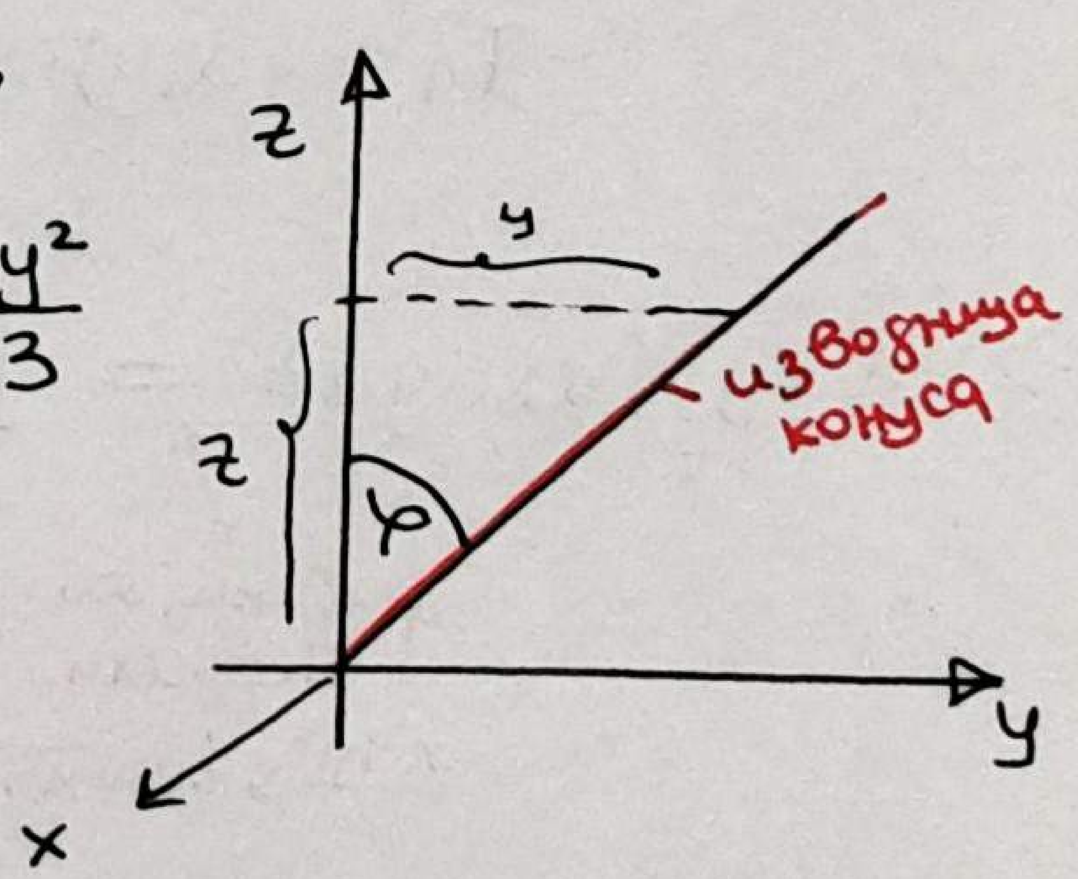
  нпр. за $x=0$ граница конуса: $z^2=\frac{x^2+y^2}{3}=\frac{y^2}{3}$

  $z=\frac{y}{\sqrt3}$ $\quad \frac{y}{z}=\sqrt3$

  $\frac{y}{z} = \operatorname{tg}\varphi \Rightarrow \varphi=\operatorname{arctg}\sqrt3$

  $\Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{3}$

  $\Rightarrow \boxed{\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]}$



(II начин да се одреди граница за φ – из пресека $x^2+y^2+z^2=9$, $z^2=\frac{x^2+y^2}{3}$)

Дакле:
$$V=\iiint_T dx\,dy\,dz \overset{\text{СМЕНА}}{=} \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi/3}\int_0^3 \underbrace{\rho^2\sin\varphi}_{|J|}\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi/3}\left(\int_0^3 \rho^2\sin\varphi\,d\rho\right)d\varphi\,d\theta$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi/3}\sin\varphi\cdot\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^3\,d\varphi\,d\theta=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^{\pi/3}9\sin\varphi\,d\varphi\right)d\theta$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}-9\cos\varphi\Big|_0^{\pi/3}d\theta=\int_{-\pi}^{\pi}(-9)\cdot\left(\frac12-1\right)d\theta=\frac92\cdot 2\pi=\boxed{9\pi}$$ □

3. Израчунати: $I=\iiint\limits_T x\,dx\,dy\,dz$

$T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x-1)^2+y^2+z^2\le 1\}$

$f(x,y,z)=x$

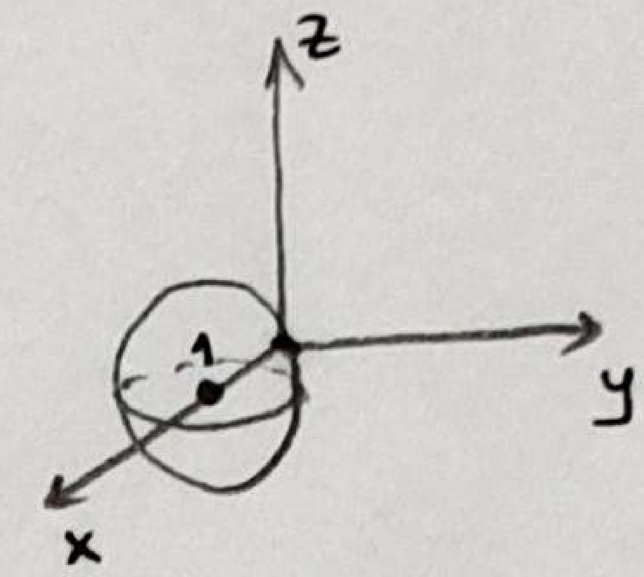
T је лопта са центром $(1,0,0)$ полупречника 1

Уводимо <u>ПОМЕРЕНЕ СФЕРНЕ КООРДИНАТЕ</u> (у односу на тачку $(1,0,0)$ као центар)

$x = 1+\rho\cdot\sin\varphi\cos\theta$ $\quad\rho\in[0,1]$

$y = \rho\cdot\sin\varphi\sin\theta$ $\quad\theta\in[-\pi,\pi]$

$z = \rho\cdot\cos\varphi$ $\quad\varphi\in[0,\pi]$



константа $+1$ неће променити Јакобијан (проверити за вежбу)

тј. $J=-\rho^2\sin\varphi$

$|J|=\rho^2\sin\varphi$

Дакле: $I=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\left(\int\limits_{0}^{1}\left(\overbrace{(1+\rho\sin\varphi\cos\theta)}^{f(x,y,z)=x}\cdot\overbrace{\rho^2\sin\varphi}^{|J|}\right)d\rho\right)d\varphi\, d\theta$

по ρ

$=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\left(\sin\varphi\cdot\frac{\rho^3}{3}+\sin\varphi\cdot\cos\theta\cdot\frac{\rho^4}{4}\right)\Big|_0^1\,d\varphi\,d\theta$

$=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\int\limits_{0}^{\pi}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cos\theta\right)\cdot\sin\varphi\,d\varphi\right)d\theta$

$=\int\limits_{-\pi}^{\pi}-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cos\theta\right)\cos\varphi\Big|_0^{\pi}\,d\theta$

$=\int\limits_{-\pi}^{\pi}2\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cos\theta\right)d\theta$

$=\left(\frac{2}{3}\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}$

$=\frac{2}{3}\cdot 2\pi=\frac{4\pi}{3}$ $\square$

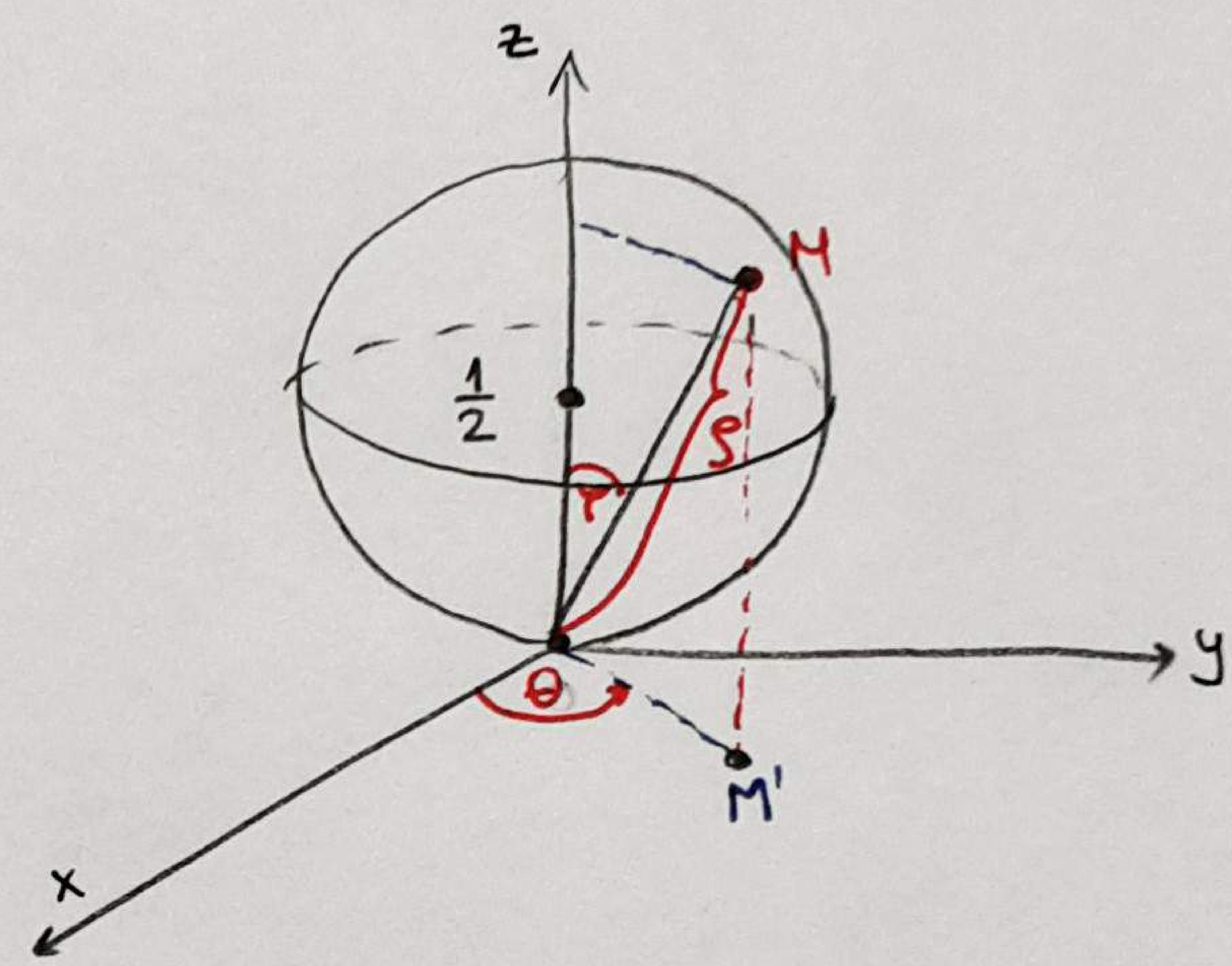
$\boxed{4.}$ Израчунати: $I = \iiint\limits_D \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dx\,dy\,dz$

где је D унутрашњост сфере:

$$x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

иако би услов за D сугерисао померене сферне координате, ипак узимамо обичне сферне координате због функције у интегралу - да се не би закомпликовала :) !

$$x = \rho \cdot \sin\varphi \cos\theta$$
$$y = \rho \cdot \sin\varphi \sin\theta$$
$$z = \rho \cdot \cos\varphi$$
$$|J| = \rho^2 \cdot \sin\varphi$$



које су границе, тј. шта даје D ?

$$x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2+y^2+z^2 - z + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2+y^2+z^2 = z \quad ⊛$$

угао θ: $\boxed{\theta \in [-\pi, \pi)}$

угао φ: $\boxed{\varphi \in [0, \frac{\pi}{2})}$ јер све у полупростору где $z \geq 0$

ρ ? : из ⊛ заменом x и y и z добијамо:

$$x^2+y^2+z^2 = \rho^2 = z = \rho \cdot \cos\varphi$$

$\rho^2 = \rho \cdot \cos\varphi$ је граница $\Rightarrow$ $\boxed{0 \leq \rho \leq \cos\varphi}$

$$\Rightarrow \quad I = \iiint\limits_D \underbrace{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}_{\rho^2}\, dx\,dy\,dz \overset{T}{=} \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\cos\varphi} \underbrace{\sqrt{\rho^2}}_{\rho \text{ јер } \rho \geq 0} \cdot \underbrace{\rho^2 \sin\varphi}_{|J|}\, d\rho\right) d\varphi\, d\theta$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\cos\varphi} \sin\varphi \cdot \rho^3\, d\rho\right) d\varphi\, d\theta$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} \sin\varphi \cdot \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^{\cos\varphi} d\varphi\right) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} \sin\varphi \cdot \frac{\cos^4\varphi}{4}\, d\varphi\right) d\theta$$

$$\underset{\boxed{\text{смена } t=\cos\varphi}}{=} \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_1^0 \frac{1}{4}t^4 \cdot -dt\right) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{t^5}{20}\Big|_0^1 d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{20}\, d\theta = \boxed{\frac{\pi}{10}}$$

□