ВЕЖБЕ
за среду
8. април

∾ Интеграли - НАСТАВАК ∾

$\boxed{1}$ Израчунати: $I = \iint\limits_D (x+y)\,dx\,dy$

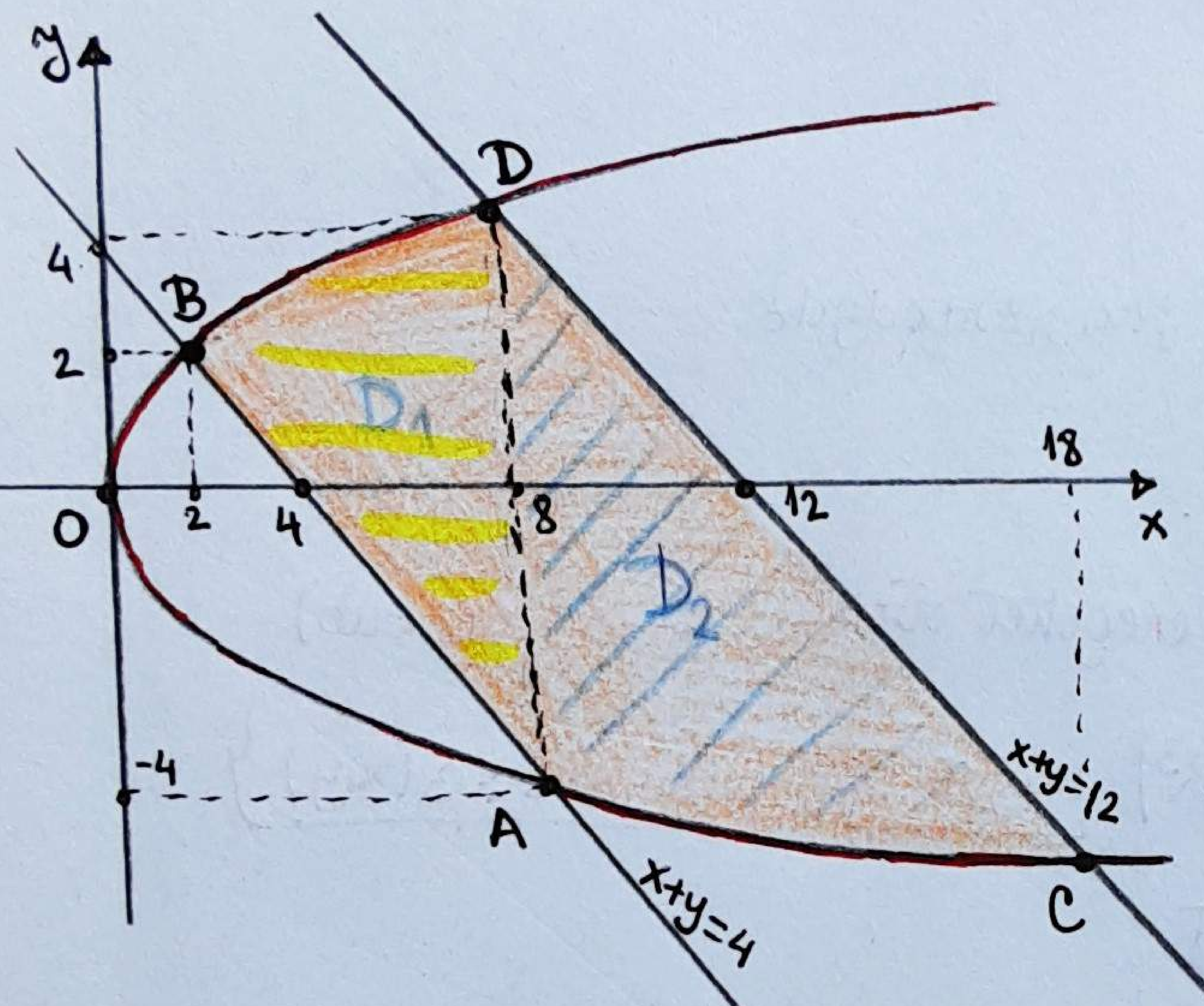
где је D скуп ограничен кривама: $y^2 = 2x$

$x+y=4$

$x+y=12$

- прво одређујемо D:

то је скуп између две паралелне праве, са страна ограничен хоризонталном параболом:



тражимо пресечне тачке:

- права $x+y=4$ ∩ крива $y^2=2x$:

$x = 4-y$

$\Rightarrow y^2 = 8-2y \qquad y^2+2y-8=0$

$(y+4)(y-2)=0$

$\Rightarrow y=-4 \;\vee\; y=2$

$x=8 \qquad x=2$

пресеци: $\boxed{A(8,-4)}$ $\boxed{B(2,2)}$

- права $x+y=12$ ∩ крива $y^2=2x$:

$x = 12-y \Rightarrow y^2 = 24-2y$

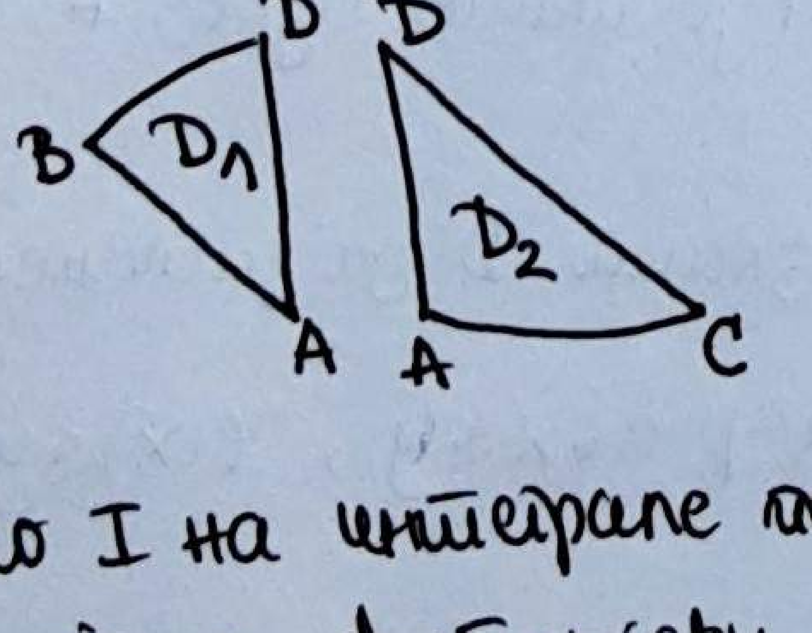
$y^2+2y-24=0 \qquad (y+6)(y-4)=0$

$\Rightarrow y=-6 \;\vee\; y=4$

$x=18 \qquad x=8$

пресеци: $\boxed{C(18,-6)}$ и $\boxed{D(8,4)}$

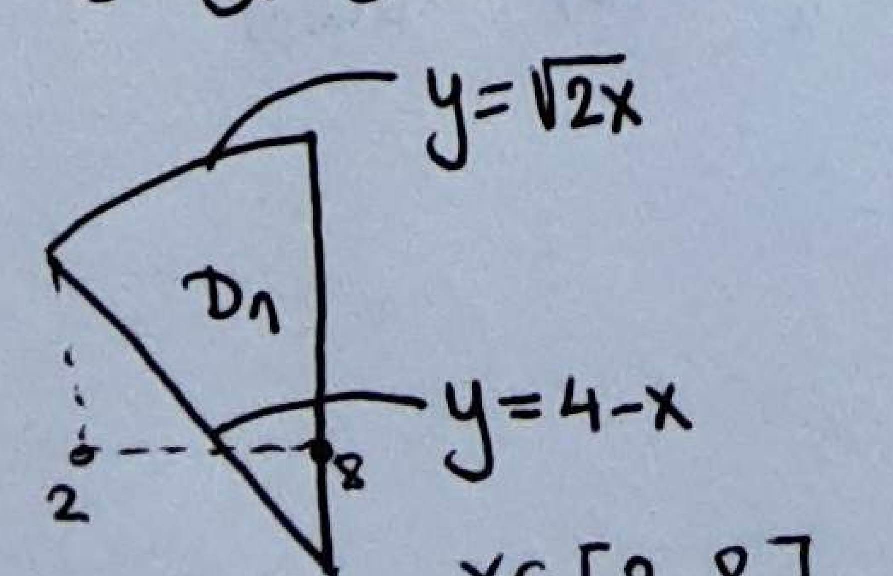
☺ коинциденција је да A и D имају исту x-координату, па имамо две области:



Делимо I на интеграле по скуповима D_1 и D_2 и на сваки примењујемо Фубинијеву теорему.

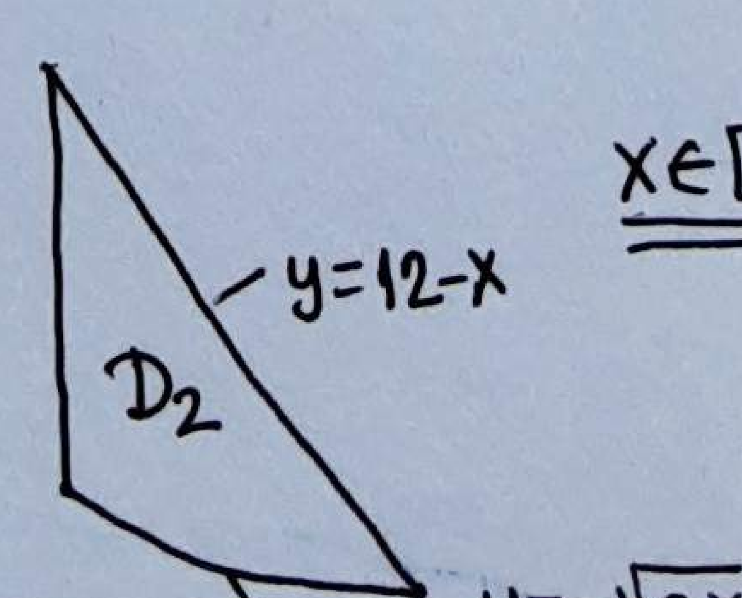
Само да одредимо функције $y=\varphi(x)$ у границама:

D_1:



$\underline{x \in [2,8]}$

D_2:



$\underline{x \in [8,18]}$

$$I = \iint_{D_1} + \iint_{D_2}$$

$$= \int_2^8 \left(\int_{4-x}^{\sqrt{2x}} (x+y)\,dy \right) dx + \int_8^{18} \left(\int_{-\sqrt{2x}}^{12-x} (x+y)\,dy \right) dx$$

$$= \int_2^8 \left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{4-x}^{\sqrt{2x}} dx + \int_8^{18} \left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{-\sqrt{2x}}^{12-x} dx$$

$$= \int_2^8 \left(x\cdot\sqrt{2x} + \frac{2x}{2} - x\cdot(4-x) - \frac{(4-x)^2}{2}\right) dx + \int_8^{18} \left(x\cdot(12-x) + \frac{(12-x)^2}{2} - x\cdot(-\sqrt{2x}) - \frac{2x}{2}\right) dx$$

$= \dots$ (рачун само)

~ Троструки интеграл ~

Све аналогно двоструком: $\iiint_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

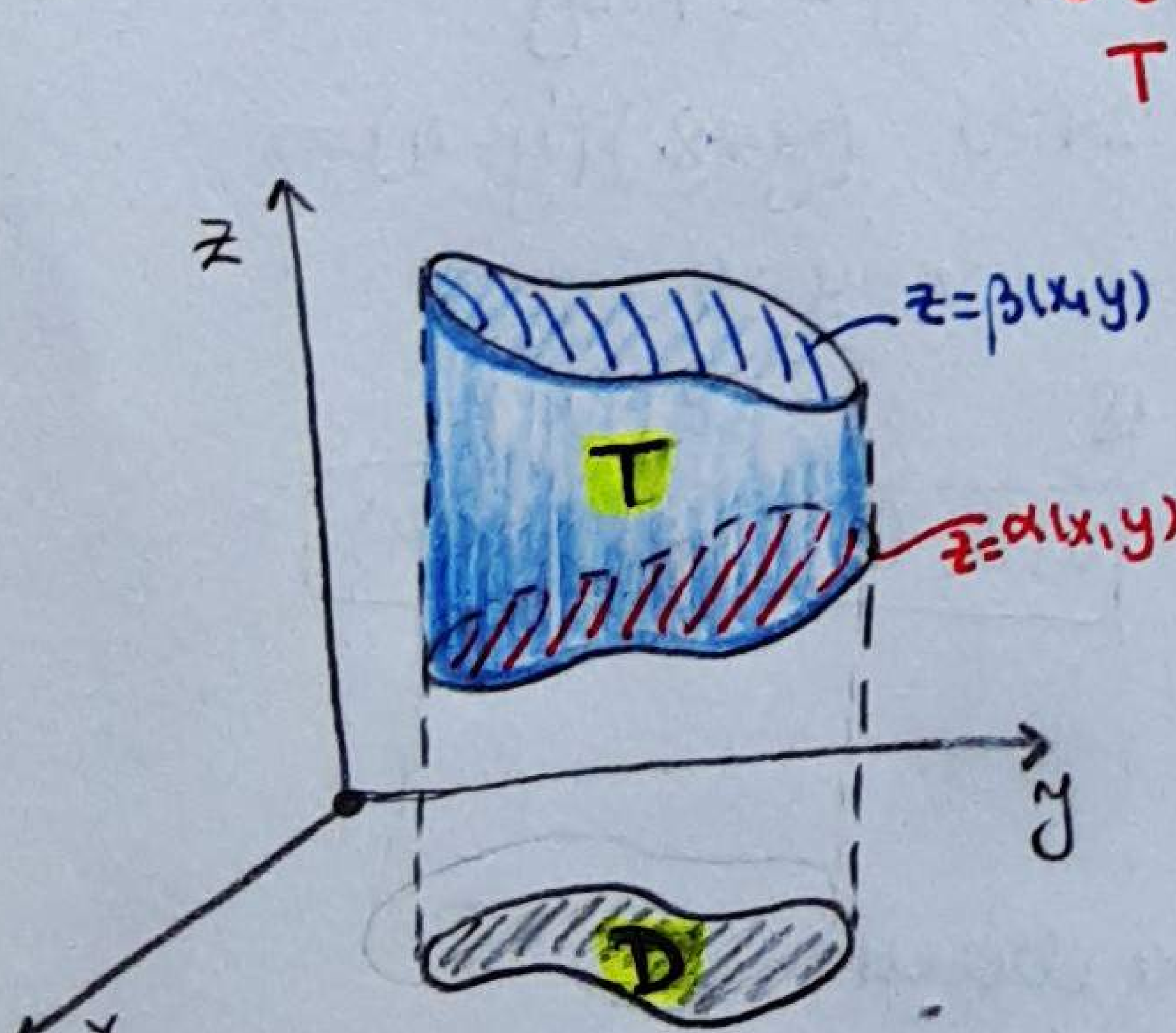
Фубинијева теорема

$T \subset \mathbb{R}^3$ мерљив скуп следећег облика ($D \subset \mathbb{R}^2$ мерљив)

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \underline{(x,y) \in D}, \ \underline{\alpha(x,y) \le z \le \beta(x,y)}\}$$

f интеграбилна на T

$$\Rightarrow \iiint_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy$$



← овај тип тела T је тиме одређен

ако још додатно знамо D да запишемо као:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b, \ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$$

онда:

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dy \right) dx.$$

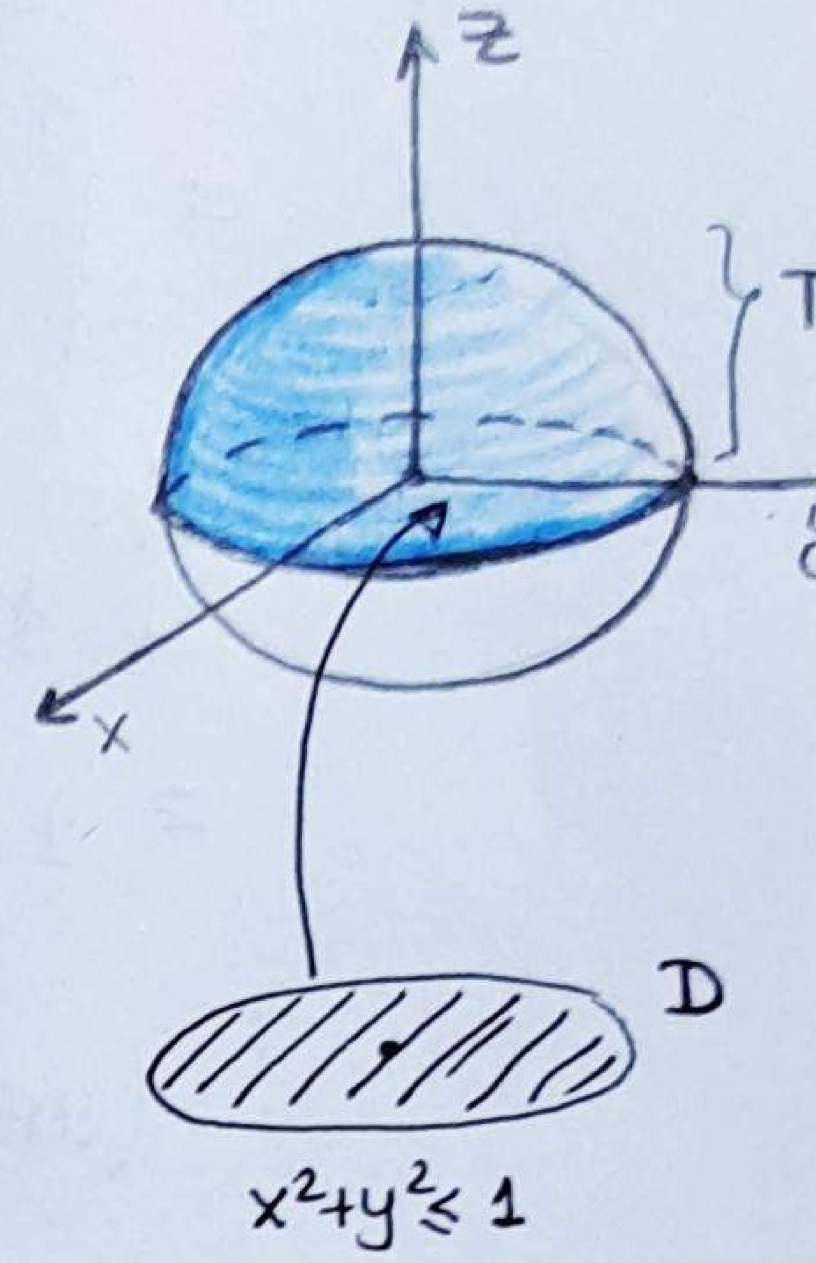
1. Израчунати интеграл $I=\iiint\limits_T z\,dx\,dy\,dz$ где је

$$T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\le 1,\ z\ge 0\}$$

Шта је T?

$x^2+y^2+z^2\le 1$ – то је лопта са центром $(0,0,0)$, полупречника 1
(унутрашњост: <0, граница: $=0$)

$z\ge 0$ – додаје услов да узимамо само горњу половину лопте

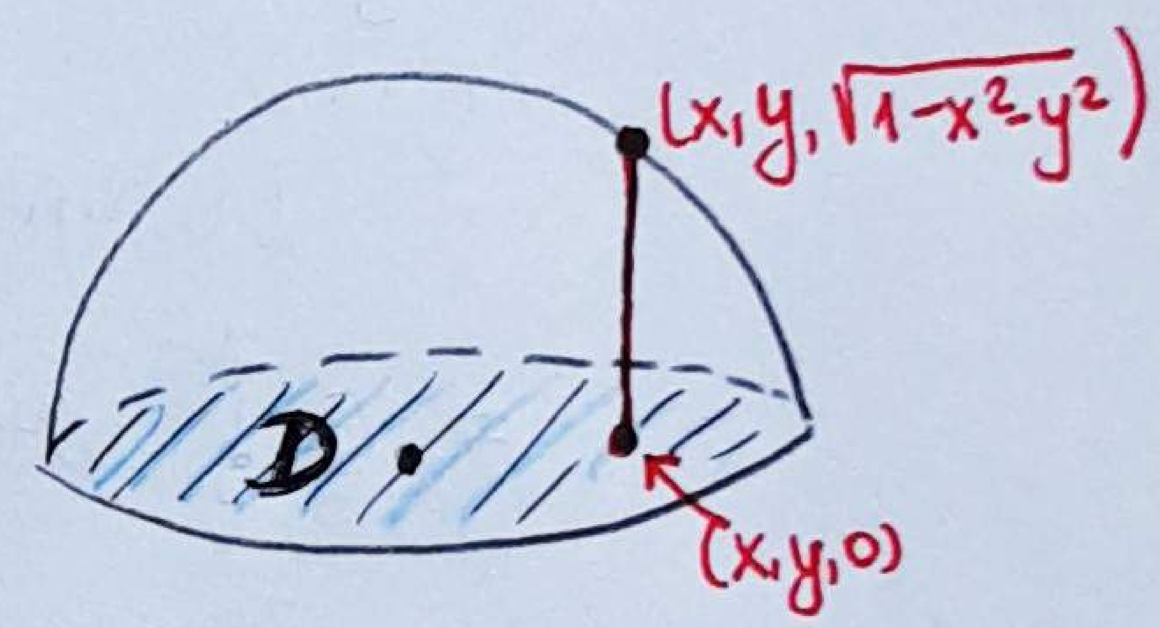


Означимо са D круг у равни xy полупречника 1:

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 1\}$$

Приметимо да је D пројекција тела T на раван xy и да за свако $(x,y)\in D$, унутар тела T су тачно оне тачке (x,y,z) код којих важи:

$$0\le z\le \sqrt{1-x^2-y^2}$$



↑
јер (x,y,z) припада граници T ако и само ако $x^2+y^2+z^2=1$
$\Rightarrow z=\pm\sqrt{1-x^2-y^2}$, а како $z\ge 0$, узимамо +

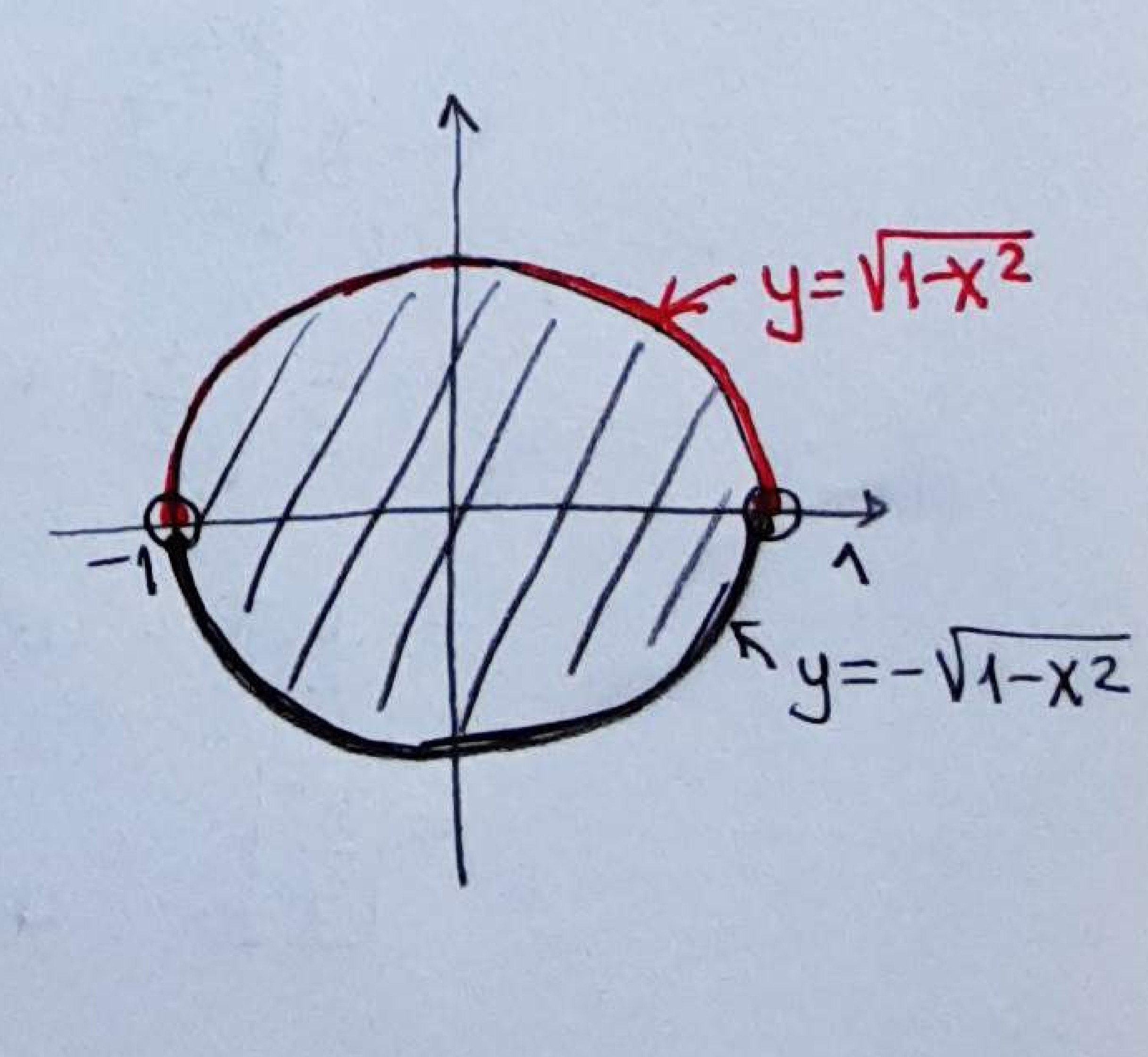
Можемо применити Фубинијеву теорему:

$$I=\iiint\limits_T z\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_D\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\,dz\right)dx\,dy = \iint\limits_D \frac{z^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dx\,dy$$

$$\Rightarrow \boxed{I=\frac{1}{2}\iint\limits_D (1-x^2-y^2)\,dx\,dy}$$

Дошли смо на двојни интеграл по кругу па ћемо применити Фубинијеву теорему у равни:

(желимо да изразимо једну променљиву да пролази све вредности између две функције по другој пром.)



Горња полукружница: $y=\sqrt{1-x^2}$
доња — || — : $y=-\sqrt{1-x^2}$ $\quad x\in[-1,1]$

фуб. т.
$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}(1-x^2-y^2)\,dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\left((1-x^2)\cdot y - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\int_{-1}^{1}\Big(\cancel{2}\underbrace{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}_{} - \frac{1}{3}\cdot 2\cdot \underbrace{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3}_{}\Big)\,dx$$

исти ☺

$$= \int_{-1}^{1}\frac{2}{3}(1-x^2)^{3/2}dx$$

сада рачунамо овај једноструки интеграл сменом коју знамо из Анализе 2

(прво приметимо да је функција парна, па:)

$$= 2\cdot\frac{2}{3}\cdot\int_{0}^{1}(1-x^2)^{3/2}dx$$

(СМЕНА: $x=\sin t,\ t\in[0,\frac{\pi}{2}]$ $dx=\cos t\,dt$)

$$= \frac{4}{3}\cdot\int_{0}^{\pi/2}(1-\sin^2 t)^{3/2}\cdot\cos t\,dt$$

$$\left((1-\sin^2 t)^{3/2}\cdot\cos t = (\cos^2 t)^{3/2}\cdot\cos t \xlongequal[\cos t\geq 0]{t\in[0,\pi/2]} (\cos t)^3\cdot\cos t = (\cos t)^4\right)$$

$$= \frac{4}{3}\int_{0}^{\pi/2}\cos^4 t\,dt$$

ослобађамо се великог степена косинуса

$$= \frac{4}{3}\int_{0}^{\pi/2}\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2 dt$$

$$= \frac{4}{3}\int_{0}^{\pi/2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{1}{4}\underbrace{\cos^2 2t}_{\text{преко } 4t}\right)dt$$

$$= \frac{1}{3}\int_{0}^{\pi/2}\left(1+2\cos 2t+\frac{1+\cos 4t}{2}\right)dt$$

$$= \frac{1}{3}\int_{0}^{\pi/2}\left(\frac{3}{2}+2\cos 2t+\frac{\cos 4t}{2}\right)dt$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}t+\sin 2t+\frac{1}{8}\sin 4t\right)\Bigg|_{0}^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \text{све нуле}$$

$$= \boxed{\frac{\pi}{4}} \quad \square \qquad \boxed{I = \pi/4}$$

2 Одредити $I=\iiint\limits_K x^2\,dx\,dy\,dz$, где је K тело чија је граница задата следећим условима:

$$z=y^2,\ z=4y^2,\ y\geq 0$$

$$z=x,\ z=2x,\ z=h\ \ (h>0)$$

Како изгледа K?

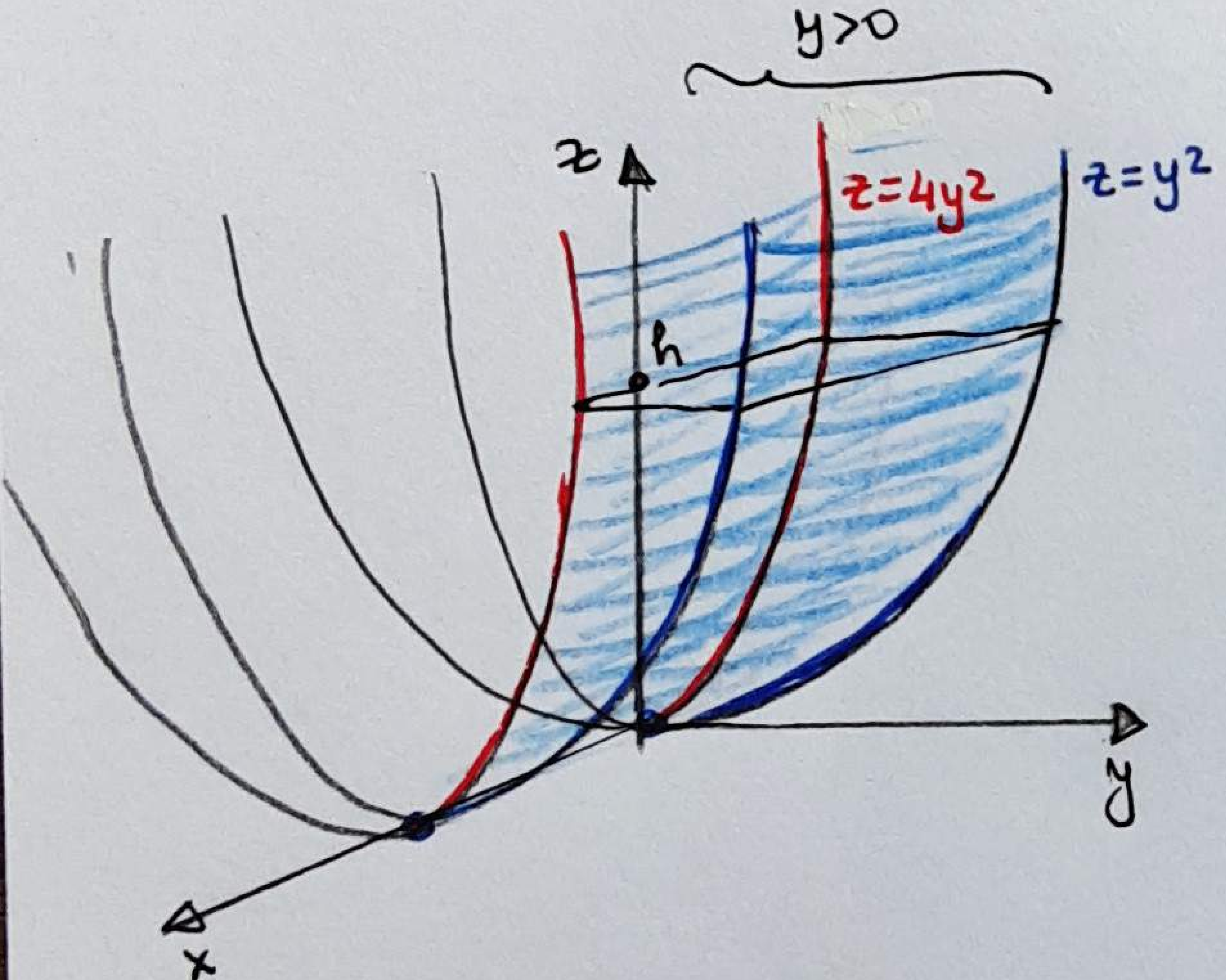
$y\geq 0$ свуда даље гледамо шта се налази ограничено између површи:

$z=y^2, z=4y^2$ → дакле, $y^2\leq z\leq 4y^2$ (1)

$z=x, z=2x$ → дакле, $x\leq z\leq 2x$ (2)

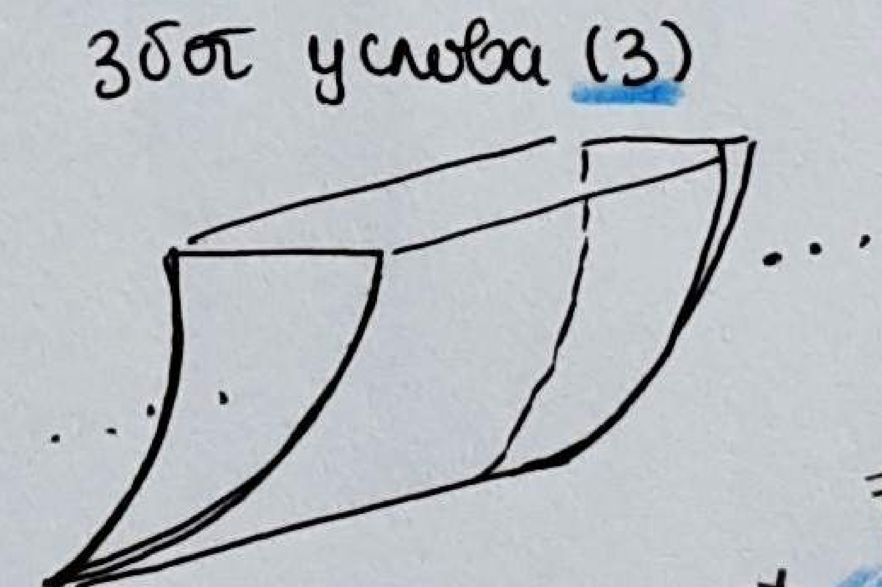
$z=h$ – све је испод равни $z=h$ (3)

(или је све изнад, али из претх. услова ћемо добити испод)



(1) уз услов $y\geq 0$ се добија када за свако x уочимо део $y^2\leq z\leq 4y^2$

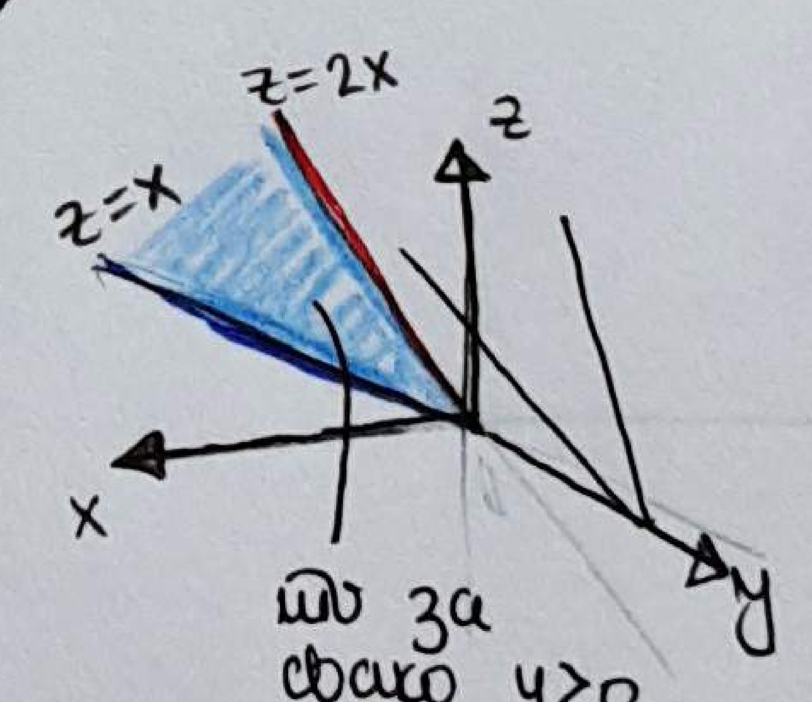
све то до висине h због услова (3)



Још услов (2) слично:

За свако y имамо део између x и $2x$ за z:

на делу $z\geq 0$ јер из претх. услова $z\geq 0$



Кад замислимо видимо да је тело K у првом октанту

☺ ово све горе је више за наше разумевање простора, а аналитички је одмах лако записати:

z: $\boxed{z\in[0,h]}$

y: из услова $y^2\leq z\leq 4y^2, y\geq 0 \Rightarrow y\leq\sqrt{z}$ и $y\geq\frac{\sqrt{z}}{2}$ тј. $\boxed{\frac{\sqrt{z}}{2}\leq y\leq\sqrt{z}}$

x: из услова: $x\leq z\leq 2x \Rightarrow \boxed{\frac{z}{2}\leq x\leq z}$

$$\Rightarrow I=\int_0^h\left(\int_{\frac{\sqrt{z}}{2}}^{\sqrt{z}}\left(\int_{\frac{z}{2}}^{z}x^2dx\right)dy\right)dz=\int_0^h\left(\int_{\frac{\sqrt{z}}{2}}^{\sqrt{z}}\frac{x^3}{3}\Big|_{\frac{z}{2}}^{z}dy\right)dz=\int_0^h\left(\int_{\frac{\sqrt{z}}{2}}^{\sqrt{z}}\left(\frac{z^3}{3}-\frac{z^3}{3\cdot 8}\right)dy\right)dz$$

$$= \int_0^h \left(\int_{\frac{\sqrt{z}}{2}}^{\sqrt{z}} \left(\frac{7}{8} \cdot \frac{z^3}{3} \right) dy \right) dz = \int_0^h \left(\frac{7}{24} \cdot z^3 \cdot \underline{\underline{y}} \,\Big|_{\frac{\sqrt{z}}{2}}^{\sqrt{z}} \right) dz$$

upou.

$$\sqrt{z} - \frac{\sqrt{z}}{2} = \frac{\sqrt{z}}{2}$$

$$= \int_0^h \frac{7}{24} z^3 \cdot \frac{\sqrt{z}}{2} \, dz = \int_0^h \frac{7}{48} \cdot z^{7/2} dz$$

$$= \frac{7}{48} \cdot \frac{2}{9} \cdot z^{9/2} \Big|_0^h = \boxed{\frac{7}{24 \cdot 9} \cdot h^{9/2}} \quad \square$$

~ Смена променљиве у двоструком интегралу ~

Главна теорема (са предавања)

$\boxed{T1}$ D, D_1 – отворени, повезани, мерљиви скупови у $\mathbb{R}^2$

$F: \overline{D_1} \to \overline{D}$ непрекидно-диференцијабилна функција, D_1 бијективно слика на D

Тада:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D_1} f(F(u,v)) \cdot |J_F(u,v)|\,du\,dv$$

да мало погледамо детаље претходне формуле, тј. како поступамо :

* желимо да рачунамо $\iint\limits_{D} f(x,y)\,dx\,dy$
* и желимо да уведемо смену по неке друге две променљиве, u, v (јер ће бити лакше)

дакле: $x = F_1(u,v)$ $\quad (x,y) = (F_1(u,v), F_2(u,v)) \underset{\text{означимо тако}}{=:} F(u,v)$

$y = F_2(u,v)$

* следећи корак је да нађемо скуп где припадају (u,v) кад (x,y) пролази D

тај скуп је D_1

Дакле: $F: D_1 \to D$

и F мора испуњавати горње услове на $\overline{D_1}$ и $\overline{D}$

* одређујемо Јакобијан:

$$J_F(u,v) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{bmatrix}$$

→ потребна нам је апсолутна вредност J_F, не заборавити то!

⇒ сада заменимо све то и рачунамо нови интеграл

$$\iint\limits_{D_1} f(F(u,v)) \cdot |J_F(u,v)|\,du\,dv$$

Следећа смена је посебно лепа, код скупова који имају сличности са кружним обликом...

ПОЛАРНА СМЕНА

$\boxed{T2}$

$$x = r \cdot \cos\theta$$
$$y = r \cdot \sin\theta$$

Нека ова поларна смена слика мерљив скуп D_1 на мерљив скуп D бијективно, и нека је f непрекидна на D.
Тада важи:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(r\cos\theta, r\sin\theta) \cdot r\,dr\,d\theta$$

Покажимо да $\boxed{T2}$ следи из $\boxed{T1}$.
Приметујемо да само треба показати да је

$$|J_F(r,\theta)| = r$$

где $F: (r,\theta) \to (x,y)$

$$x = r\cos\theta = F_1(r,\theta)$$
$$y = r\sin\theta = F_2(r,\theta)$$

Рачунамо Јакобијан:

$$J_F = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial r} & \frac{\partial F_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial F_2}{\partial r} & \frac{\partial F_2}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\cdot\sin\theta \\ \sin\theta & r\cdot\cos\theta \end{bmatrix} = r\cdot\cos^2\theta - (-r\sin^2\theta)$$
$$= r\cdot(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$$

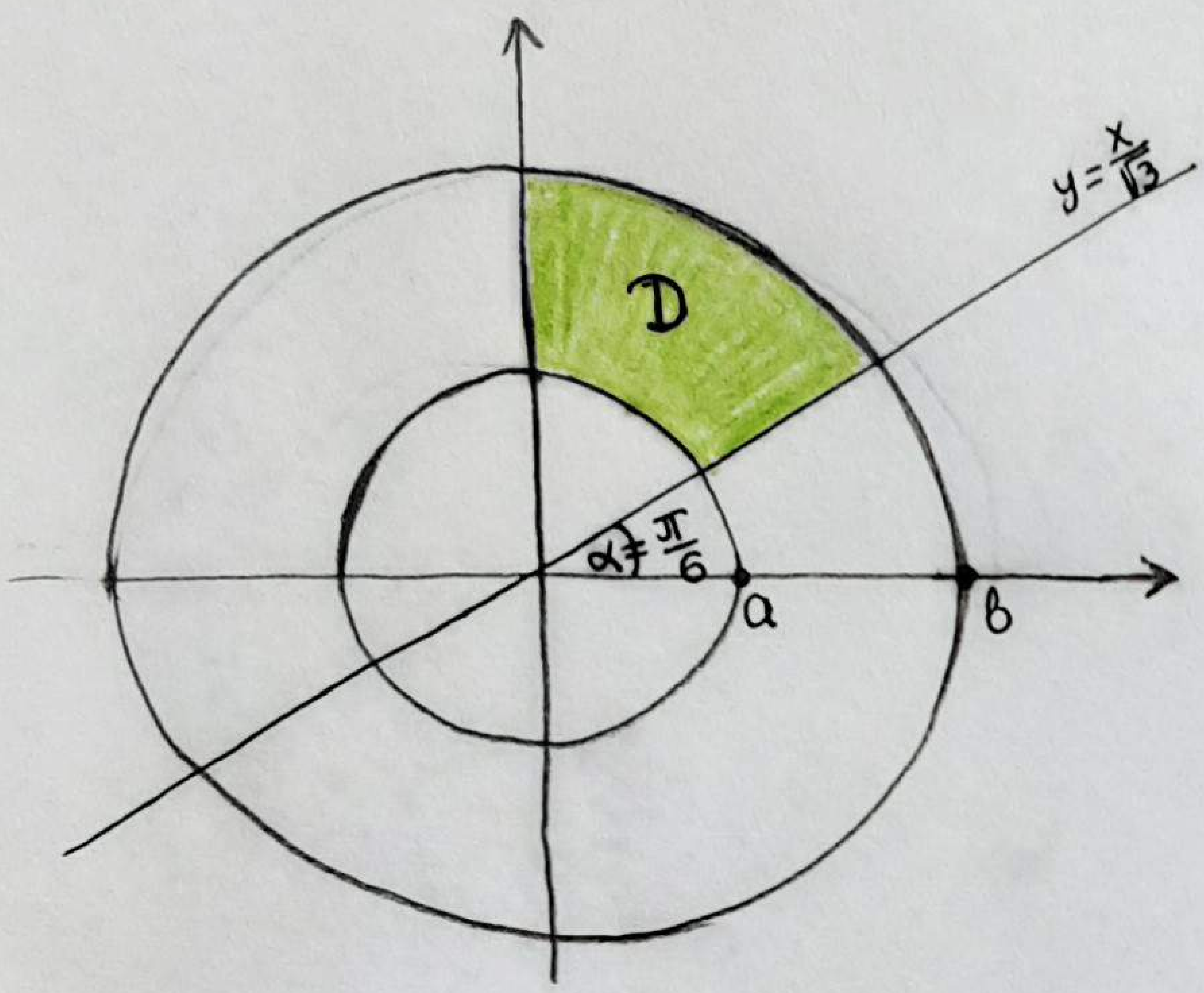
$$J_F = r \Rightarrow \boxed{|J_F| = r}$$

заиста $\boxed{T1} \Rightarrow \boxed{T2}$

1. Израчунати $I = \iint\limits_D e^{x^2+y^2}\,dx\,dy$, где је

$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a^2 \le x^2+y^2 \le b^2,\ x\ge 0,\ y \ge \frac{x}{\sqrt3}\right\},\quad a,b>0,\ a<b$$

Шта је скуп D?



$a^2\le x^2+y^2\le b^2$ – појас између кругова $K((0,0),a)$ и $K((0,0),b)$

$x\ge 0$ – узимамо део у 1. и 4. квадранту

$y\ge \frac{x}{\sqrt3}$ – додатни услов, узимамо део изнад праве $y=\frac{x}{\sqrt3}$

$y=\frac{1}{\sqrt3}\cdot x$ $\Rightarrow$ угао α који ова права заклапа са x-осом има: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt3}$

$\alpha\in[0,\frac{\pi}{2}] \Rightarrow \alpha=\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt3}$

$\boxed{\alpha=\frac{\pi}{6}}$

$\Rightarrow$ D је зелени скуп.

Уводимо поларне координате:

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$$

Ком скупу припадају (r,θ) кад $(x,y)\in D$?

- r: $a\le r\le b$
- θ: $\frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

$(r,\theta)\in \underbrace{[a,b]\times[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]}_{\text{скуп } D_1 \text{ из теореме}}$

$$\Rightarrow I = \iint\limits_D e^{x^2+y^2}\,dx\,dy \overset{\text{Теорема}}{\underset{\boxed{T2}}{=}} \iint\limits_{D_1} e^{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}\cdot \underbrace{r}_{\text{апс. вредност Јакобијана}}\,dr\,d\theta \qquad \left[r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta=r^2\right]$$

$$=\int_{\pi/6}^{\pi/2}\left(\int_a^b e^{\overset{t}{r^2}}\cdot \underset{\frac{dt}{2}}{r\,dr}\right)d\theta$$

← када решавамо $\int_a^b e^{r^2} r\,dr$, уводимо смену $t=r^2$, баш имамо $r\,dr=\frac{dt}{2}$, тада $t\in[a^2,b^2]$

$$=\int_{\pi/6}^{\pi/2}\left(\int_{a^2}^{b^2}\frac12 e^t\,dt\right)d\theta$$

$$=\int_{\pi/6}^{\pi/2}\left(\frac12 e^t\Big|_{a^2}^{b^2}\right)d\theta=\int_{\pi/6}^{\pi/2}\underbrace{\frac12\left(e^{b^2}-e^{a^2}\right)}_{\text{не фигурише } \theta}d\theta=\frac12\left(e^{b^2}-e^{a^2}\right)\theta\Big|_{\pi/6}^{\pi/2}=\frac12\left(e^{b^2}-e^{a^2}\right)\cdot\frac{\pi}{3}$$

$\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$

□

2. Израчунати $I=\iint\limits_D (x+y)\,dx\,dy$,

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le x+y\}.$$

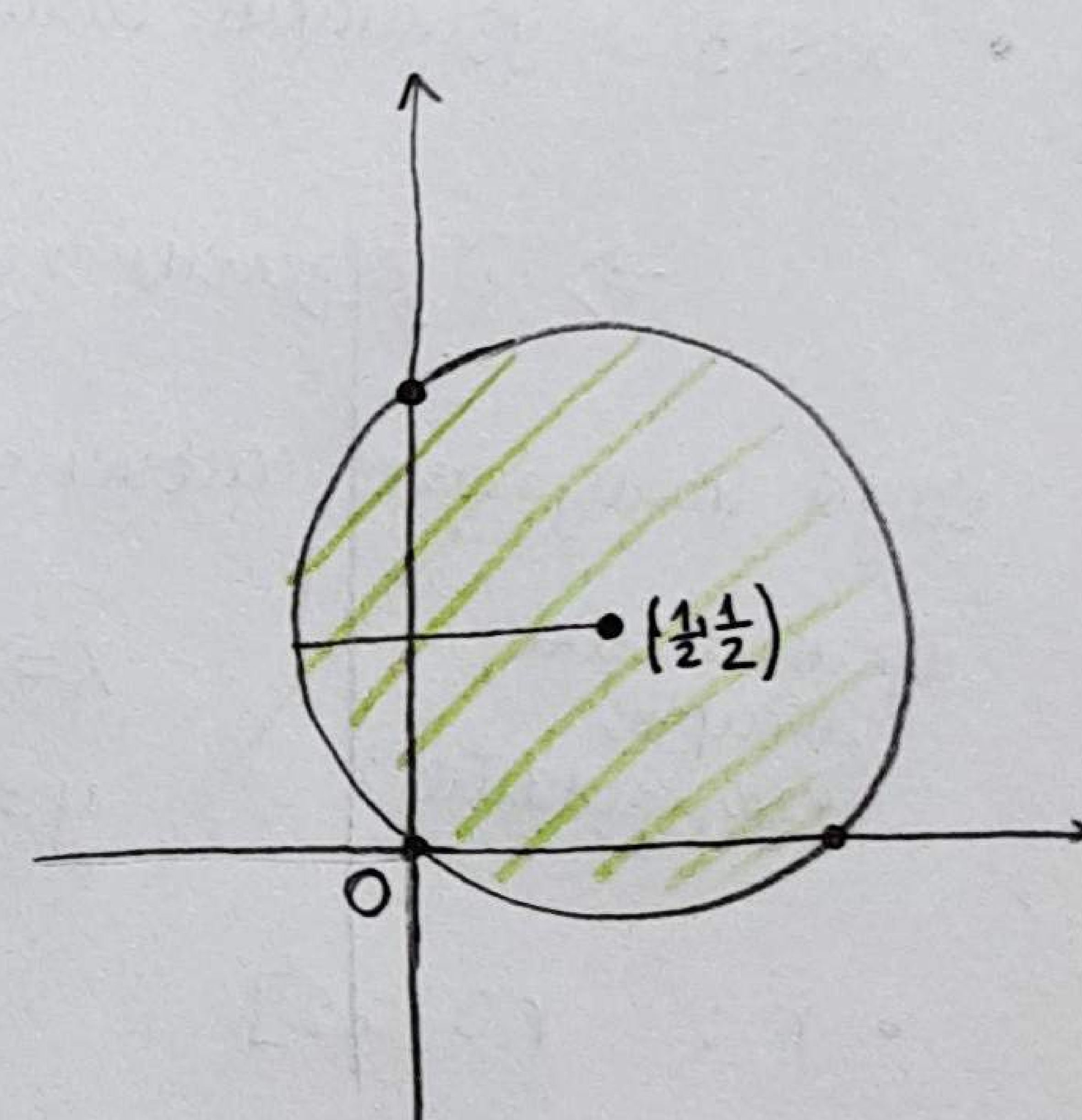
<u>Шта је D?</u> $\quad x^2+y^2\le x+y$

$$\iff x^2-x+y^2-y\le 0$$

$$\iff \underbrace{x^2-2\cdot\tfrac{1}{2}x+\left(\tfrac{1}{2}\right)^2}_{(x-1/2)^2}+\underbrace{y^2-2\cdot\tfrac{1}{2}y+\left(\tfrac{1}{2}\right)^2}_{(y-\frac{1}{2})^2}\le \underbrace{2\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^2}_{\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$\iff \left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\tfrac{1}{2}\right)^2\le\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$\Rightarrow$ D је круг са центром у $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, полупречника $\frac{1}{\sqrt{2}}$



Уводимо **ТРАНСЛИРАНЕ ПОЛАРНЕ КООРДИНАТЕ** (пошто центар круга није у $(0,0)$):

$$x=\frac{1}{2}+r\cdot\cos\theta$$
$$y=\frac{1}{2}+r\cdot\sin\theta$$

<u>Границе за r и θ</u>: $\quad r\in\left[0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

$\theta\in[-\pi,\pi]$ (може и $[0,2\pi]$ али је $[-\pi,\pi]$ погодније јер можда има парних/неп.)

<u>Јакобијан</u>: $\quad J=\det\begin{bmatrix} x'_r & x'_\theta \\ y'_r & y'_\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cdot\cos\theta\end{bmatrix}=r$

константе па нису промениле!

Применом теореме о смени променљиве имамо:

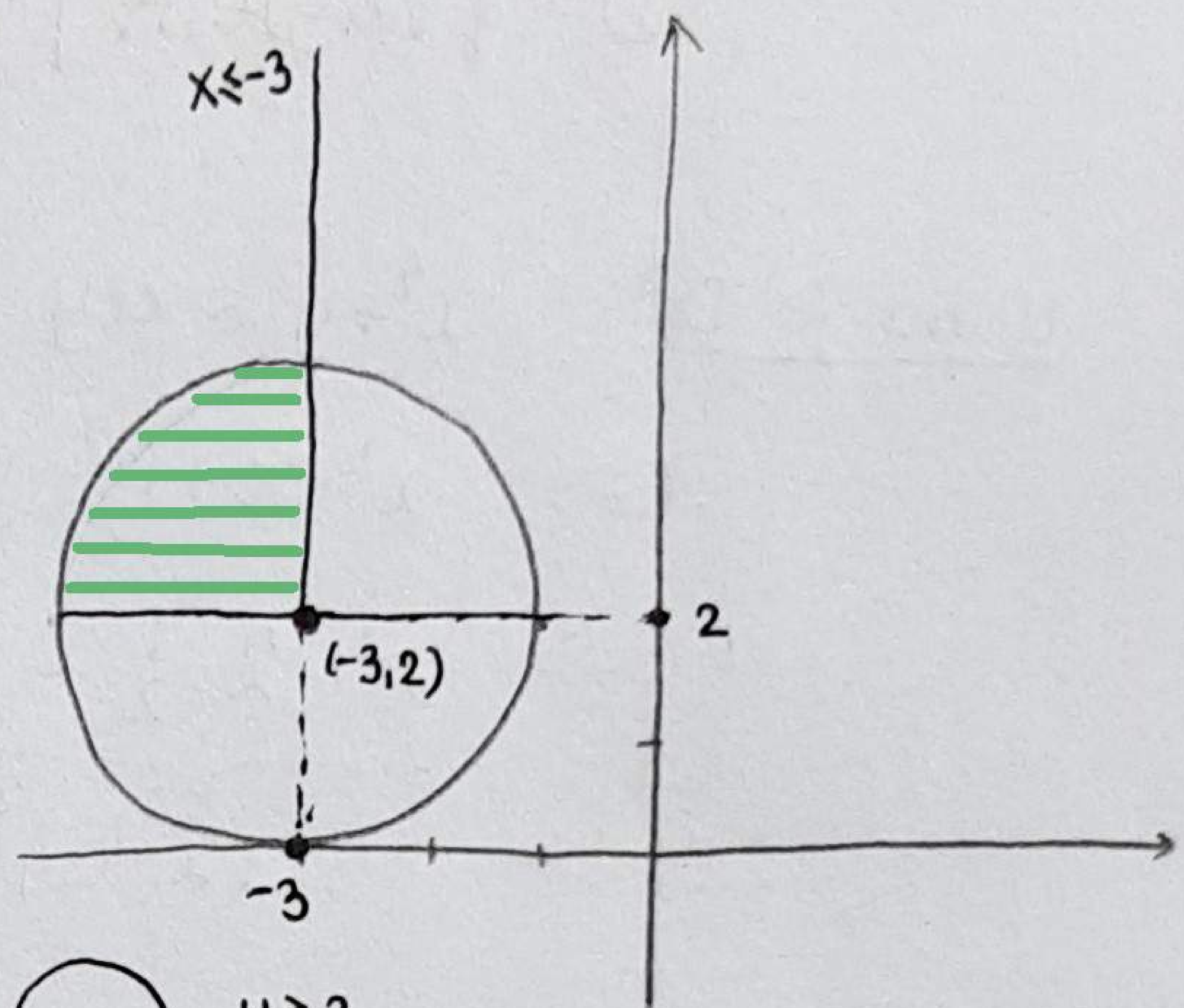
$$I=\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{1/\sqrt{2}}\Big(\overbrace{\tfrac{1}{2}+r\cos\theta+\tfrac{1}{2}+r\sin\theta}^{x+y}\Big)\cdot\overset{J}{r}\,dr\,d\theta=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^{1/\sqrt{2}}\left(r+r^2\cdot(\cos\theta+\sin\theta)\right)dr\right)d\theta$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\left(\frac{r^2}{2}+\frac{r^3}{3}(\cos\theta+\sin\theta)\right)\Bigg|_0^{1/\sqrt{2}}\right)d\theta=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{4}+\frac{1}{3\cdot2\sqrt{2}}\cdot(\cos\theta+\sin\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{1}{4}\theta\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{3\cdot2\sqrt{2}}\cdot(+\sin\theta-\cos\theta)\Big|_{-\pi}^{\pi}=\boxed{\frac{\pi}{2}}\quad\square$$

3 Израчунати: $\iint\limits_D y\,dx\,dy$ ако је

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2+6x-4y+9\le 0,\ y\ge 2,\ x\le -3\}$$



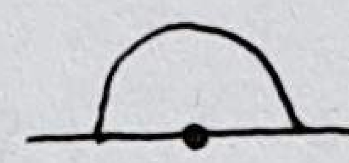
Шта је D?

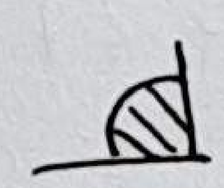
- $x^2+y^2+6x-4y+9\le 0$

$\Leftrightarrow\ x^2+2\cdot 3\cdot x+9+y^2-2\cdot 2\cdot y+4\le 4$

$\Leftrightarrow\ \underbrace{(x+3)^2+(y-2)^2\le 2^2}$

круг са центром $(-3,2)$, полупречника 2

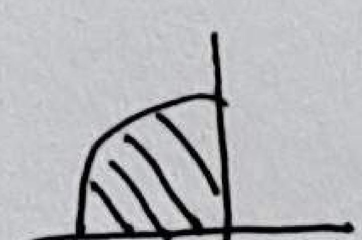
- $y\ge 2$ → узимамо само горњу половину круга 

- $x\le -3$ → узимамо само зелену четвртину 

$\Rightarrow$ D је зелени скуп.

Сада поступамо сасвим слично претходном задатку:

транслиране поларне координате:
$$x=-3+r\cdot\cos\theta$$
$$y=2+r\cdot\sin\theta$$

- r: $r\in[0,2]$
- где је θ? $\theta\in[\frac{\pi}{2},\pi]$ 
- Јакобијан → као у претходном, добија се $\boxed{J=r}$

$$\Rightarrow I=\iint\limits_D y\,dx\,dy \overset{\text{СМЕНА}}{=\!=} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\int_0^2 (2+r\cdot\sin\theta)\cdot r\,dr\right)d\theta$$

$$=\int_{\pi/2}^{\pi}\left(\left(r^2+\frac{r^3}{3}\cdot\sin\theta\right)\Big|_0^2\right)d\theta$$

$$=\int_{\pi/2}^{\pi}\left(4+\frac{8}{3}\sin\theta\right)d\theta$$

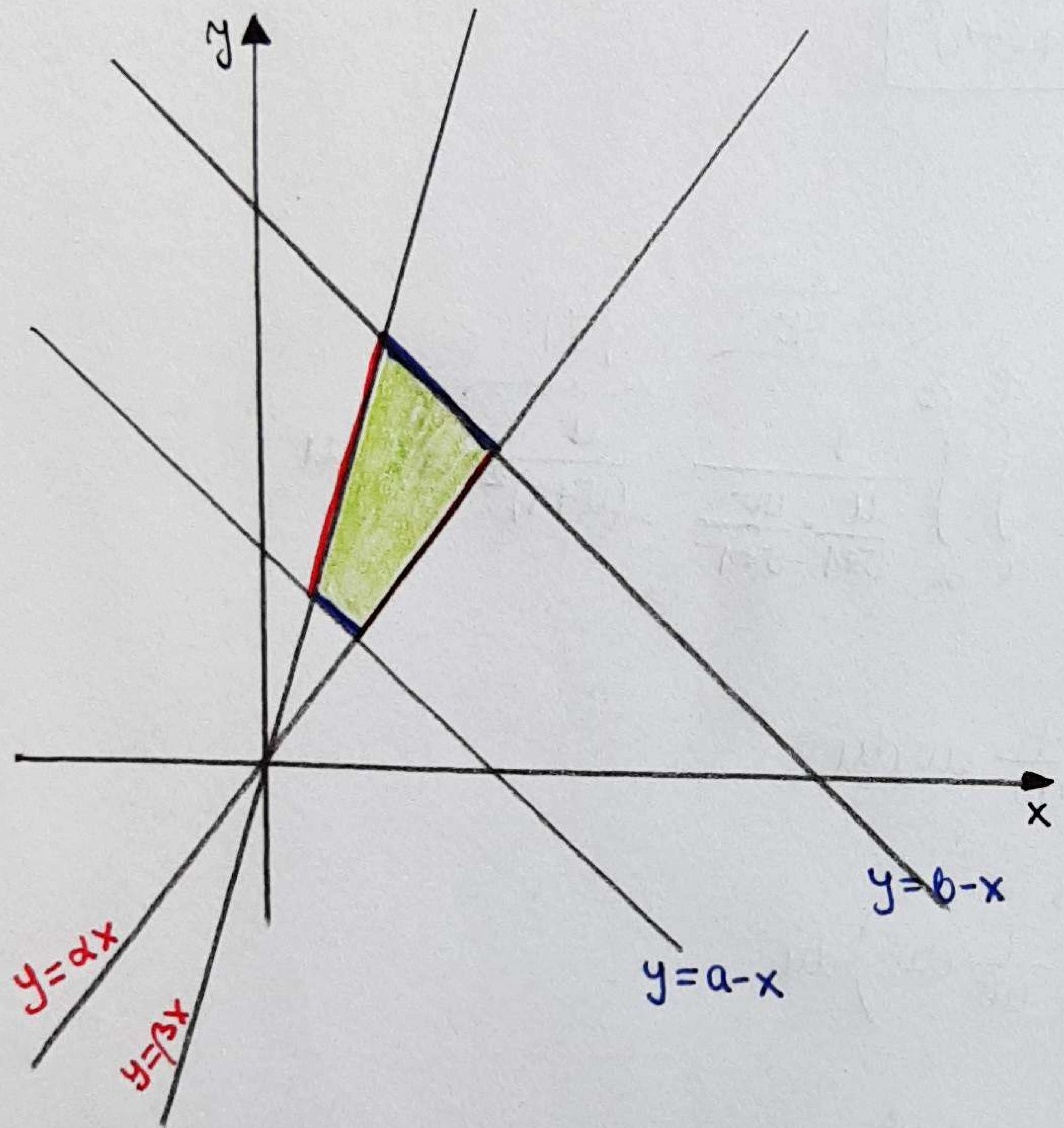
$$=\left(4\theta+\frac{8}{3}\cdot(-\cos\theta)\right)\Big|_{\pi/2}^{\pi}$$

$$=4\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{8}{3}\cdot(1-0)=2\pi+\frac{8}{3}$$ □

$\boxed{4.}$ Израчунати $I=\iint\limits_{D} \frac{1}{xy}\,dx\,dy$

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\le x+y\le b,\ \alpha x\le y\le \beta x\}$$

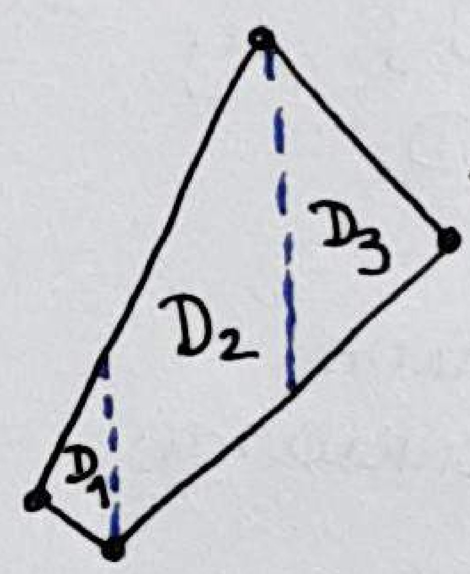
$(0<a<b,\ 0<\alpha<\beta)$



D је зелени скуп између правих: $y=\alpha x$, $y=\beta x$, $y=a-x$, $y=b-x$

$\underline{\text{I начин}}$:

поделимо на неколико делова:



$D=D_1\cup D_2\cup D_3$

$$\iint\limits_{D}=\iint\limits_{D_1}+\iint\limits_{D_2}+\iint\limits_{D_3}$$

треба пажљиво одредити границе за x и y ...

(можете покушати за вежбу)

$\underline{\text{II начин (бољи)}}$: $\boxed{\text{СМЕНА}}$

имамо услове: $a\le \underbrace{x+y}_{u}\le b$ $\qquad \alpha x\le y\le \beta x \quad /:x,\ x>0$

$$\alpha\le \underbrace{\frac{y}{x}}_{=v}\le\beta$$

уводимо нове променљиве u и v:

$u=x+y \qquad u\in[a,b]$

$v=y/x \qquad v\in[\alpha,\beta]$

Да бисмо применили теорему $\boxed{T1}$ треба изразити x и y преко u и v:

решавамо систем (по x и y)

$$\left.\begin{aligned} x+y&=u\\ x\cdot v-y&=0\end{aligned}\right\}+ \quad x\cdot(v+1)=u \Rightarrow \boxed{x=\frac{u}{v+1}} \xRightarrow{y=xv} \boxed{y=\frac{u\cdot v}{v+1}}$$

Одређујемо Јакобијан:

$$J=\det\begin{bmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \frac{1}{v+1} & -\frac{u}{(v+1)^2} \\ \frac{v}{v+1} & \frac{u}{(v+1)^2} \end{bmatrix}$$

$$=\frac{u}{(v+1)^3}-\left(-\frac{uv}{(v+1)^3}\right)=\frac{u\cdot(v+1)}{(v+1)^3}=\boxed{\frac{u}{(v+1)^2}}$$

$$u,v>0 \Rightarrow |J|=J=\frac{u}{(v+1)^2}$$

$\boxed{\text{ТЛ}}$ кање:

$$\mathbf{I}=\iint_D \frac{1}{xy}\,dx\,dy \overset{\boxed{\text{ТЛ}}}{=} \int_a^b\int_\alpha^\beta \overbrace{\frac{1}{\frac{\cancel{u}}{\cancel{v+1}}\cdot\frac{uv}{\cancel{v+1}}}}^{\frac{1}{xy}}\cdot\overbrace{\frac{\cancel{u}}{\cancel{(v+1)^2}}}^{|J|}\,dv\,du$$

након скратување

$$=\int_a^b\int_\alpha^\beta \frac{1}{uv}\,dv\,du$$

$$=\int_a^b\left(\int_\alpha^\beta \frac{1}{uv}\,dv\right)du$$

$$=\int_a^b\left(\frac{1}{u}\cdot\ln v\right)\Big|_\alpha^\beta\,du$$

$$=\int_a^b \frac{1}{u}\cdot(\ln\beta-\ln\alpha)\,du$$

$$=(\ln\beta-\ln\alpha)\cdot\ln u\Big|_a^b$$

$$=(\ln\beta-\ln\alpha)(\ln b-\ln a)$$

$$=\boxed{\ln\frac{\beta}{\alpha}\cdot\ln\frac{b}{a}}$$

$\square$