ВЕЖБЕ за среду
1. април 2020

План за данас - прво ћемо урадити још неколико задатака из условних екстремума, а затим прећи на вишеструке интеграле.

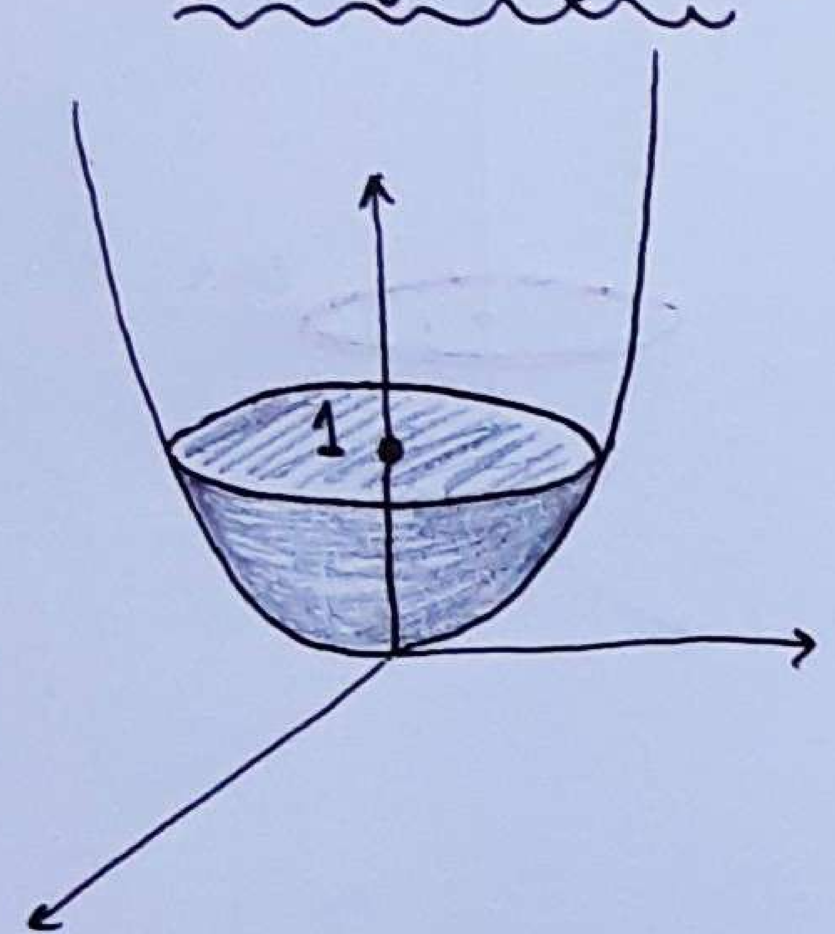
Условни екстремуми - наставак

1. Одредити највећу и најмању вредност функције

$$f(x,y,z)=x+y+z$$

на скупу $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\le z\le 1\}$

Шта је скуп D?



$z=x^2+y^2$ је једначина параболоида, па имамо део његове унутрашњости: $x^2+y^2\le z$, $z\le 1$
и граница је свуда укључена због $\boxed{\le}$

$\Rightarrow$ D је затворен и ограничен, па D компактан

f непр. на $\mathbb{R}^3$ $\Rightarrow$ f непр. на D

Вајерштрасова теорема $\Rightarrow$ $\boxed{f \text{ достиже min и max на } D}$

Треба испитати стационарне тачке на следећим деловима:

1. унутрашњост D
2. граница која је део параболоида, без кружнице
3. кружница
4. унутрашњост круга ($z=1$, $x^2+y^2<1$)

(2–4) граница D је састављена од ова 3 дела

Испитајмо их:

1. int D: $x^2+y^2<z<1$

стац. тачке су нуле градијента ∇f:

$f'_x=1$, $f'_y=1$, $f'_z=1$ $\rightarrow$ увек $\nabla f=(1,1,1)\neq\vec{0}$

$\Rightarrow$ нема стац. тачака у int D

2. део параболоида (без кружнице):

$z=x^2+y^2$, $z<1$

услов који можемо записати као

$\varphi(x,y,z)=x^2+y^2-z=0$

формирамо $\boxed{\text{Лагранжову функцију}}$:

$$F(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda\cdot\varphi(x,y,z)$$

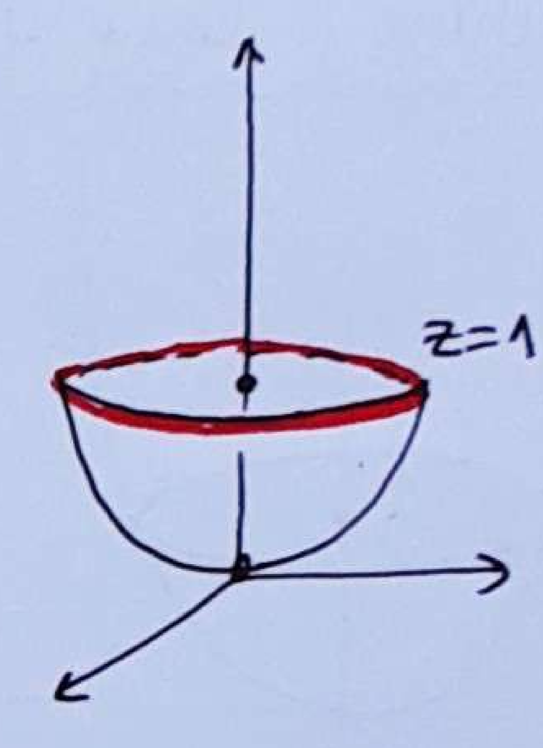
$$F(x,y,z,\lambda)=x+y+z+\lambda(x^2+y^2-z)$$

кандидати за екстремуме су стац. тачке:

$$\begin{aligned} F'_x &= 1+2\lambda x = 0 \\ F'_y &= 1+2\lambda y = 0 \\ F'_z &= 1-\lambda = 0 \\ F'_\lambda &= x^2+y^2-z = 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &1+2x=0 \\ &1+2y=0 \\ &\Rightarrow \boxed{\lambda=1} \\ &\xrightarrow{x=y=-1/2} z=\frac{1}{2} \end{aligned} \quad \Rightarrow x=y=-\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ стационарна тачка

$\boxed{M_1\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}$ $\quad f(M_1)=-\frac{1}{2}$



3 кружница: $z=1,\ x^2+y^2=1$

пошто z знамо, треба наћи min/max функције

$$f_1(x,y)=x+y+1 \quad \text{при услову} \quad \underline{x^2+y^2=1}$$
$$\varphi(x,y)=x^2+y^2-1=0$$

Поново формирамо Лагранжову функцију:

$$F(x,y,\lambda)=x+y+1+\lambda(x^2+y^2-1)$$

$$\left.\begin{aligned} F'_x &= 1+2\lambda x = 0 \overset{\lambda\neq 0}{\Rightarrow} x=-\frac{1}{2\lambda} \\ F'_y &= 1+2\lambda y = 0 \Rightarrow y=-\frac{1}{2\lambda} \\ F'_\lambda &= x^2+y^2-1 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2\cdot\frac{1}{4\lambda^2}=1 \Rightarrow \lambda=\frac{1}{\sqrt{2}} \vee \lambda=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow$ добијамо две стационарне тачке

$\boxed{M_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},1\right)}$ и $\boxed{M_3\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},1\right)}$

$f(M_2)=1-\sqrt{2}$ $\qquad f(M_3)=1+\sqrt{2}$

4 унутрашњост круга: $z=1,\ x^2+y^2<1$

тражимо највећу и најмању вредност ф-је $f(x,y,1)=x+y+1=\underline{g(x,y)}$ на <u>отвореном</u> скупу $\underline{x^2+y^2<1}$ <u>у равни</u>

$\Rightarrow$ нуле градијента су једини кандидати: $\nabla g=(0,0)$

$g'_x=1$ $\quad \nabla g\neq\vec{0}$ $\quad \Rightarrow$ овде нема кандидата

$g'_y=1$

Све заједно: кандидати су M_1, M_2 и M_3

$f(M_1)=-\frac{1}{2},\ f(M_2)=1-\sqrt{2},\ f(M_3)=1+\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{aligned}&\text{глобални } \max f = 1+\sqrt{2}\\ &\text{глобални } \min f = -\tfrac{1}{2}\end{aligned}}$

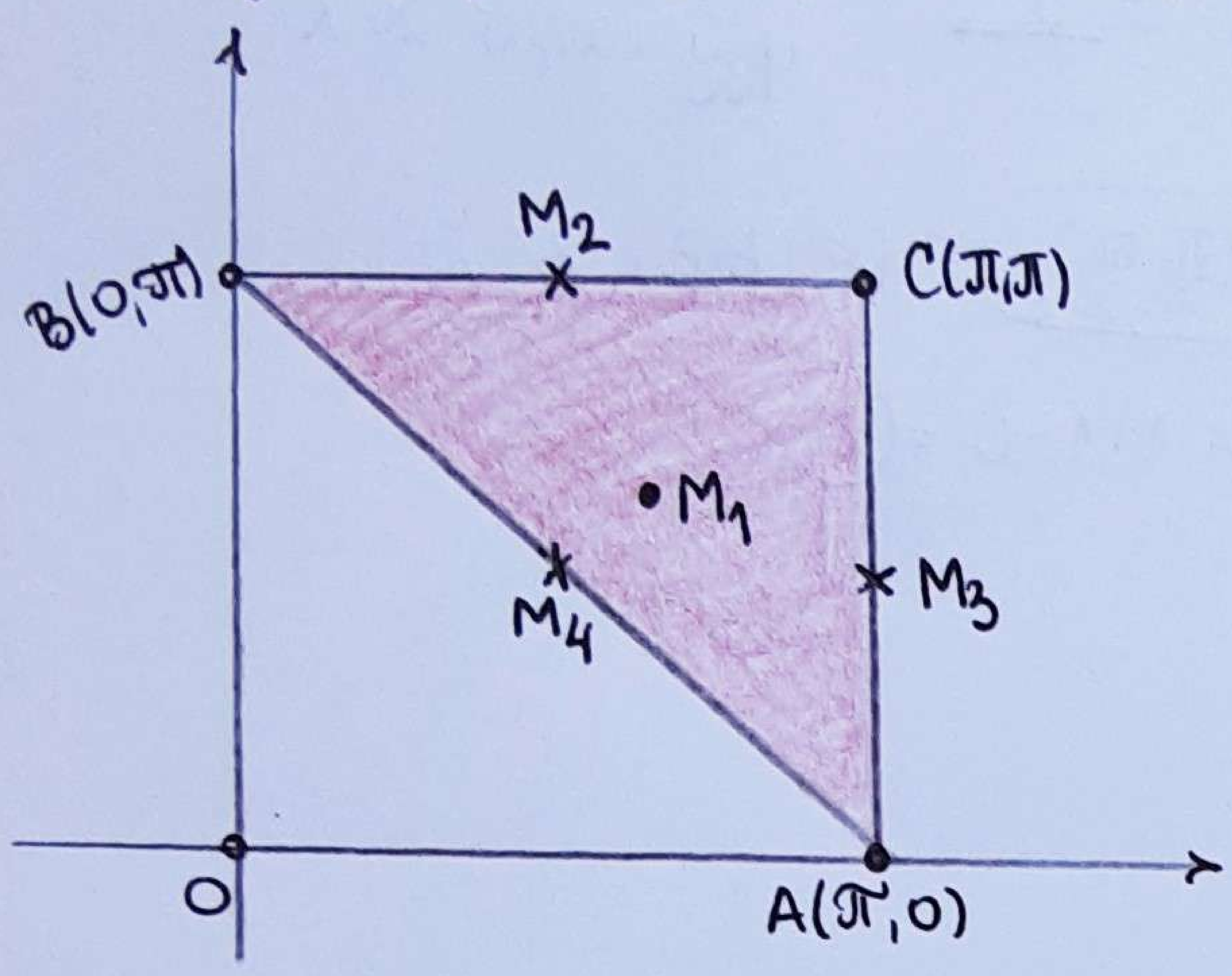
□

2 Одредити највећу и најмању вредност функције

$$f(x,y) = \sin x + \sin y - \sin(x+y)$$

на скупу $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x \leq \pi, y \leq \pi, x+y \geq \pi\}$

D је троугао приказан на слици:



D компактан $\xrightarrow[f\ \text{непр.}]{\text{Вајерштрас}}$ f достиже min и max на D

треба проверити:

1° стационарне тачке унутрашњости

2° стационарне тачке (A,B), (B,C), (C,A)

3° врхове A,B,C

1° $\underline{\text{int } D}$: $\nabla f = \vec{0}$

$$\left.\begin{array}{l} f'_x = \cos x - \cos(x+y) = 0 \\ f'_y = \cos y - \cos(x+y) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \cos x = \cos y,$$ како $x,y \in [0,\pi]$ (где је cos 1-1)

$\Rightarrow \boxed{x=y}$

$\Rightarrow \cos x = \cos(x+y) = \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

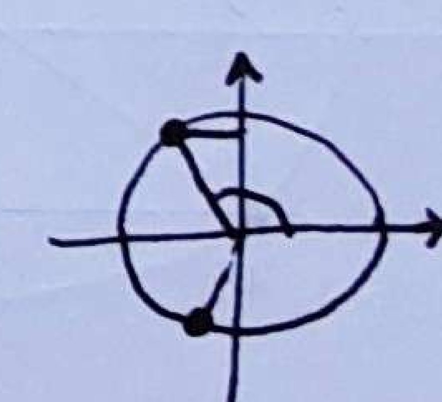
$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$ квадратна по $\cos x$

$\cos x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} \begin{array}{l} \nearrow -\frac{1}{2} \\ \searrow 1 \end{array} \Rightarrow x = 0 \lor x = \frac{2\pi}{3}$

Одакле добијамо две стац. тачке: $(0,0)$ и $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$

Међутим, $(0,0) \notin \text{int } D$, њу заправо не посматрамо,

већ само $\boxed{M_1\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)}$: $f(M_1) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$



2° дуж BC: $y = \pi$, $0 < x < \pi$

$$f(x,\pi) = \sin x + \sin \pi - \underbrace{\sin(x+\pi)}_{-\sin x} = 2\sin x$$

означимо са $g(x) = 2\sin x$

тражимо екстремуме на $(0,\pi)$:

$g'(x) = 2\cos x$

$g'(x) = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} \rightarrow$ стац тачка $\boxed{M_2\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)}$ (заиста $\in (B,C)$)

$f(M_2) = 1 + 0 - (-1) = 2$

дуж AC: $x=\pi \quad 0<y<\pi$

потпуно аналогно добијамо стац. тачку $\boxed{M_3(\pi, \frac{\pi}{2})}$ $\quad f(M_3)=2$

дуж AB: $x+y=\pi$

$y=\pi-x$

$f(x,\pi-x) = \sin x + \underbrace{\sin(\pi-x)}_{=\sin x} - \sin\pi = \sin x \cdot 2 = g(x)$ – поново гледамо као фју само по x

$g'(x) = 2\cos x$

$g'(x)=0 \iff x=\frac{\pi}{2} \implies$ стац. тачка $\boxed{M_4(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$ $\quad (\in (A,B)$ ✓$)$

$f(M_4) = 1+1-0 = 2$

3° проверавамо вредности фје f у теменима:

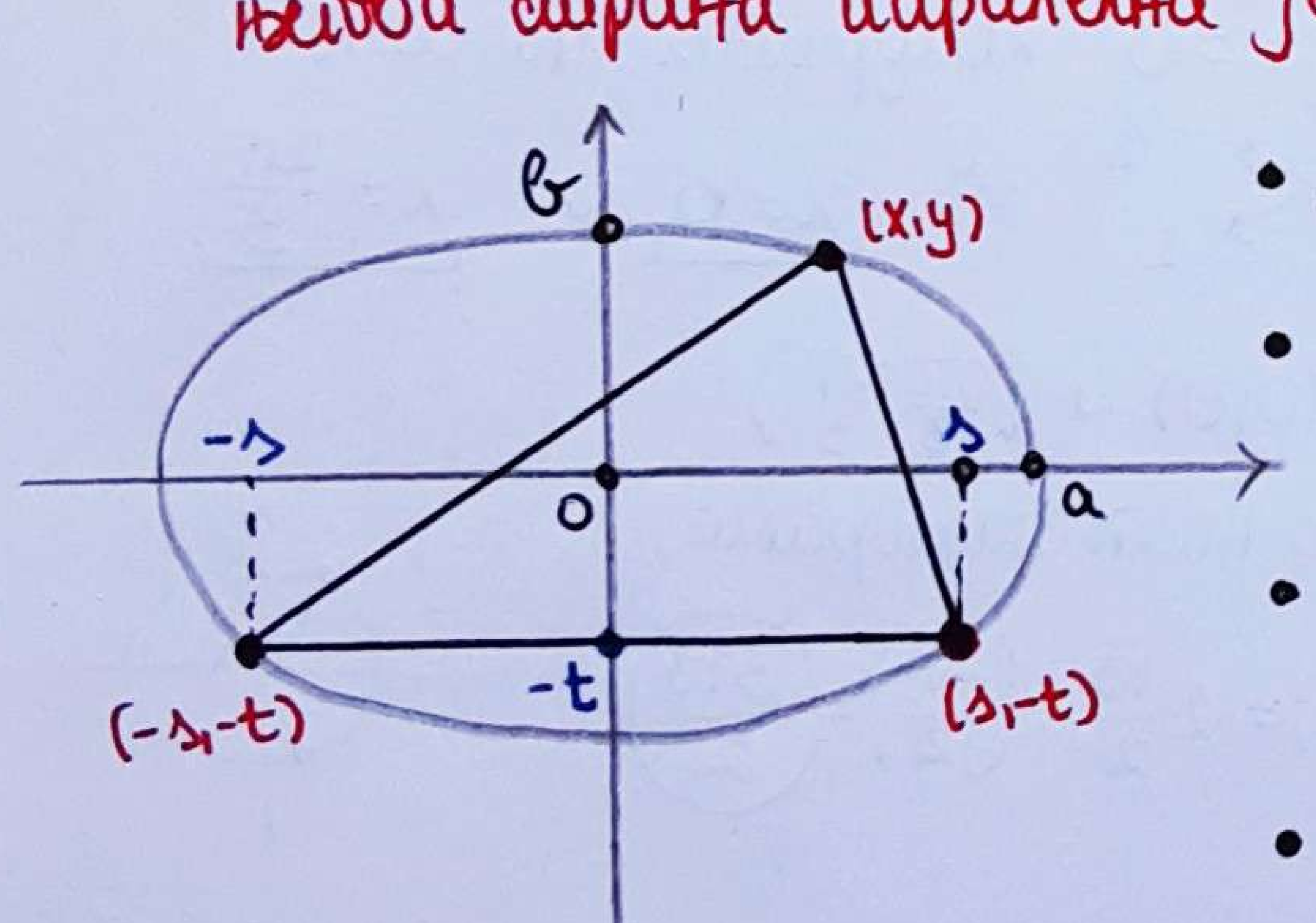
$f(A) = f(\pi,0) = 0$

$f(B) = f(0,\pi) = 0$

$f(C) = f(\pi,\pi) = 0$

Дакле: min и max су у скупу $\{0, 2, \frac{3\sqrt{3}}{2}\} \implies \boxed{f_{min}=0, \ f_{max}=\frac{3\sqrt{3}}{2}}$ □

3. У елипсу уписати троугао максималне површине тако да је једна његова страна паралелна једној од оса елипсе.



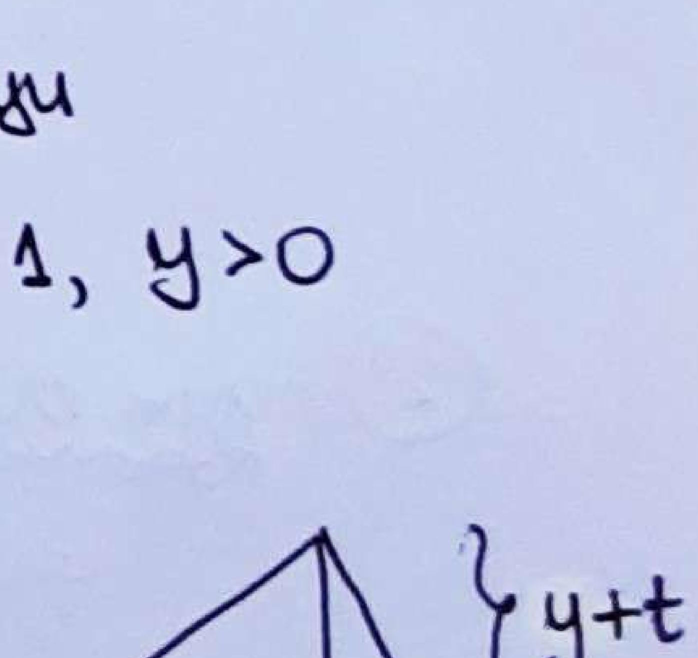
• једначина елипсе: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

• T – троугао – нека му је страна паралелна x-оси и испод x-осе

• нека његова темена имају координате: $(x,y), (s,-t), (-s,-t)$, као на слици

• важи: $0<t<b, \ 0<s<a, \ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \ y>0$

• s можемо изразити: $\frac{s^2}{a^2}+\frac{t^2}{b^2}=1 \xRightarrow{s>0} \boxed{s=\frac{a}{b}\sqrt{b^2-t^2}}$



• површина троугла: $P(T) = \frac{2s\cdot(y+t)}{2} = \underbrace{\frac{a}{b}}_{const}\sqrt{b^2-t^2}\cdot(y+t)$

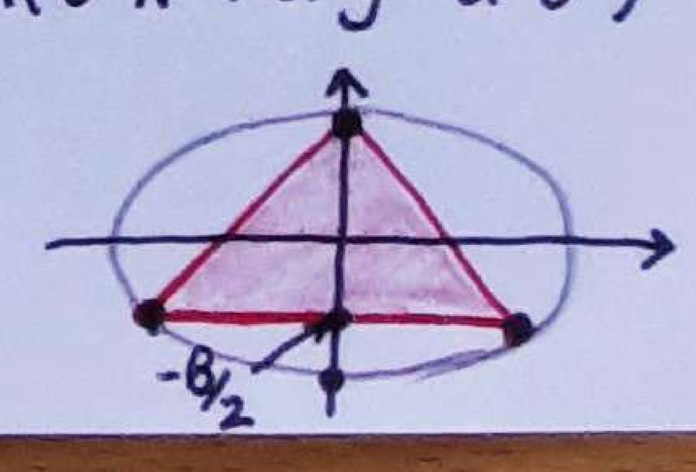
Дакле довољно је наћи max функције $f(x,y,t) = (b^2-t^2)\cdot(y+t)^2$

при услову: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \iff b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \iff \varphi(x,y) = b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$

формирамо Лагранжову фју: $F(x,y,t,\lambda) = (b^2-t^2)\cdot(y+t)^2 + \lambda(b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2)$

решавањем система $F'_x=F'_y=F'_t=F'_\lambda=0 \xrightarrow{\text{лако!}} \boxed{x=0, \ y=b, \ t=\frac{b}{2}}$

па је $P_{max} = \frac{a}{b}\sqrt{b^2-\frac{b^2}{4}}\left(b+\frac{b}{2}\right) \to \boxed{P_{max}=\frac{3\sqrt{3}ab}{4}}$

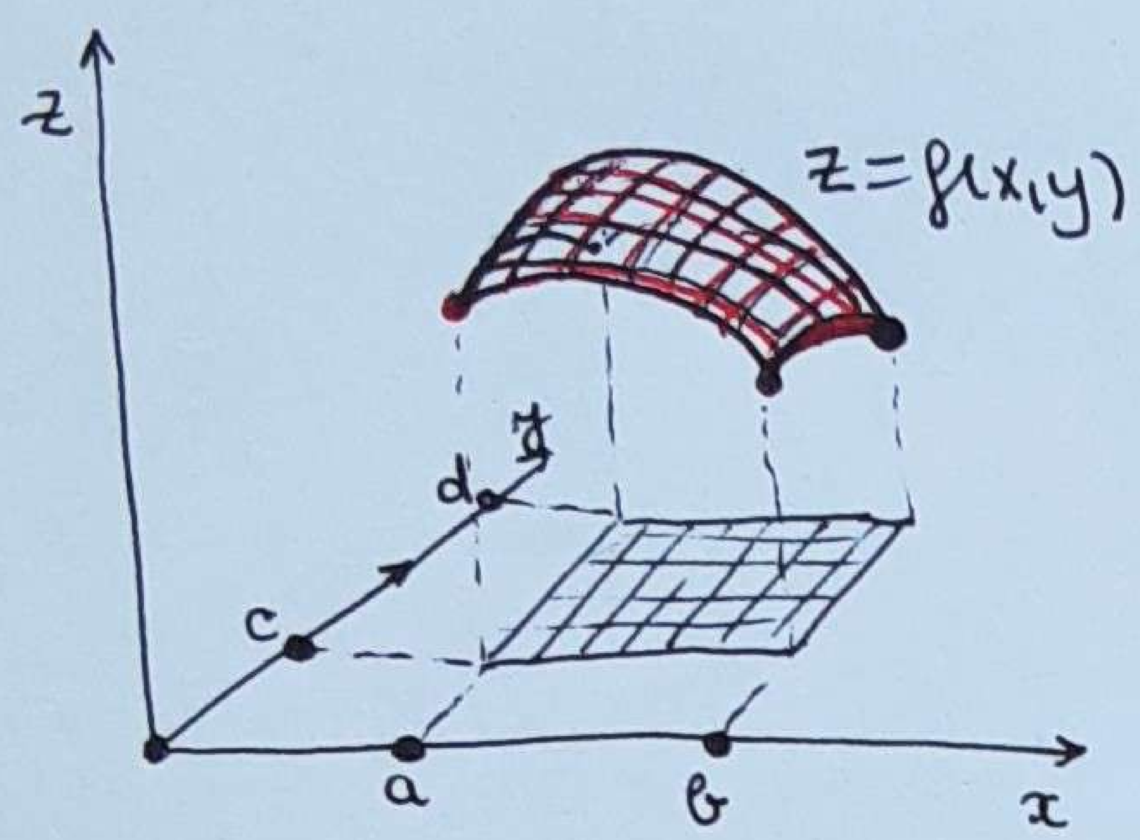


Вишеструки интеграли

∾ Двоструки интеграли ∾

• на правоугаонику П

$$\iint\limits_{П} f(x,y)\,dx\,dy$$



* ако је $f \geq 0$ свуда, $\iint\limits_{П} f\,dx\,dy$ је запремина области изнад П а испод графика фје f

* Фубинијева теорема на правоугаонику:
  f - непр. на П

$$\iint\limits_{П} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

* како рачунамо $\int_a^b \Big(\underbrace{\int_c^d f(x,y)\,dy}_{} \Big)\,dx$?

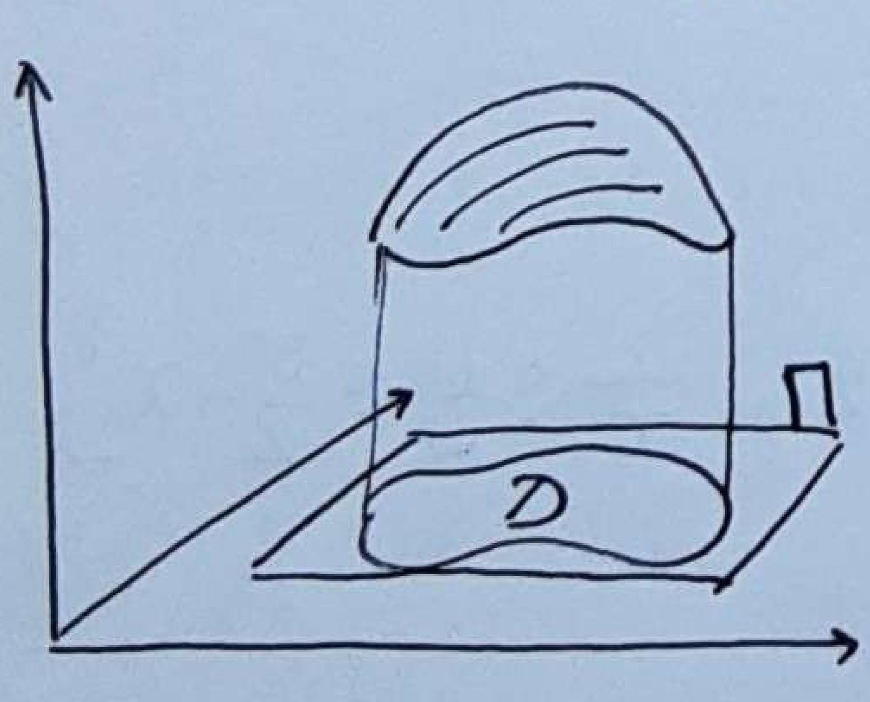
прво рачунамо овај интеграл за фиксирано x

резултат је функција $\varphi(x)$

затим рачунамо $\int_a^b \varphi(x)\,dx$

☺ Поновити интеграле из Анализе 2!

• на мерљивом скупу $D \subset \mathbb{R}^2$: $\iint\limits_{D} f(x,y)\,dx\,dy$



• уочимо правоугаоник П који садржи D

• посматрамо карактеристичну фју χ_D скупа D:

$$\chi_D(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D \end{cases}$$

Дефинишемо: $\iint\limits_{D} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{П} f(x,y) \cdot \chi_D(x,y)\,dx\,dy$

* својства адитивности, линеарности...

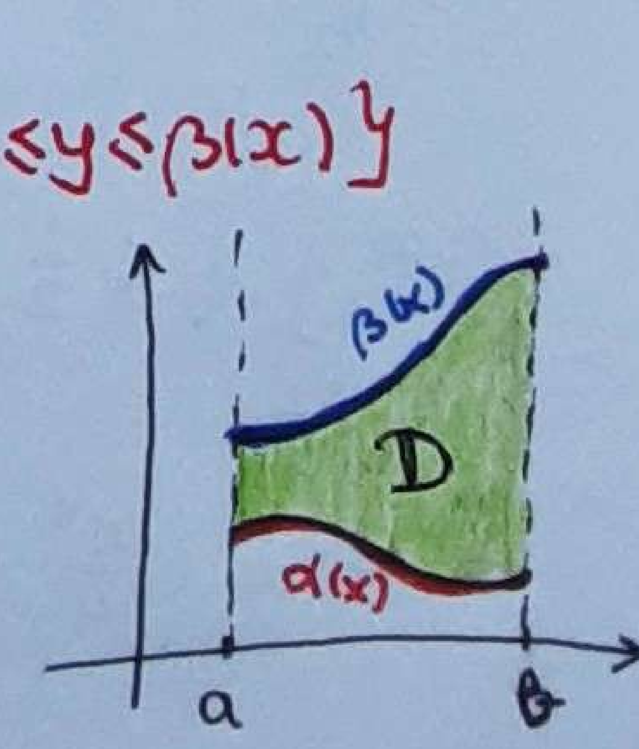
* Фубинијева теорема:

D - мерљив дат у облику: $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$

f - интеграбилна на D

Тада:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

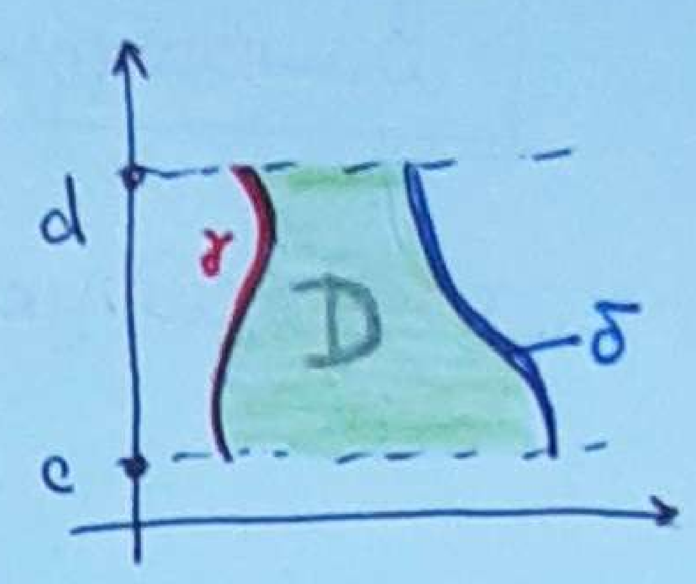


Аналогно за y:

ако $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid c\le y\le d,\ \gamma(y)\le x\le \delta(y)\}$

онда:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d\left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\,dx\right)dy$$

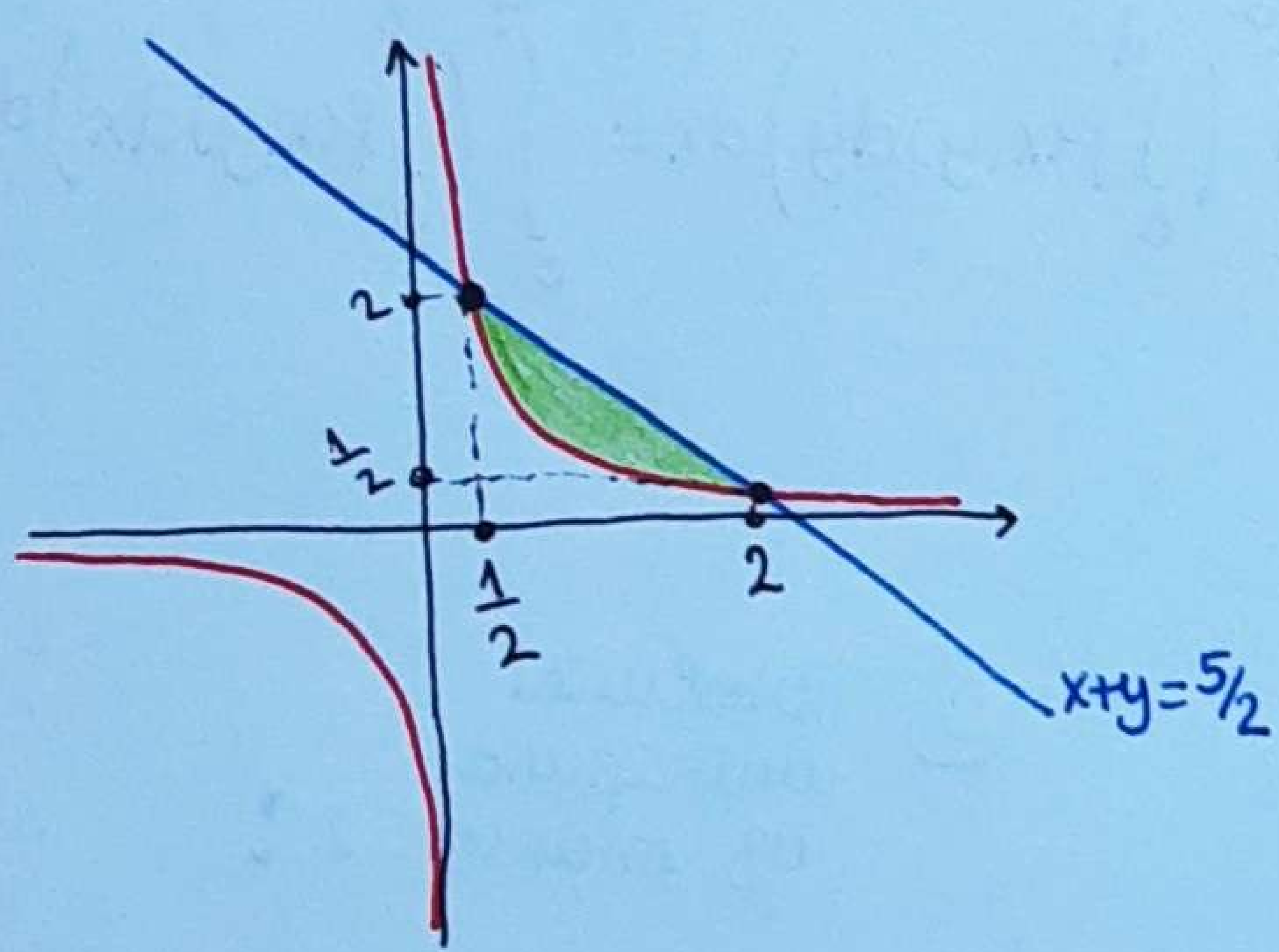


$\boxed{1}$ Израчунати интеграл $I=\iint_D xy\,dx\,dy$

ако је скуп D ограничен кривама: $xy=1$

$x+y=5/2$

* шта је D?



$xy=1$ хипербола α

$x+y=5/2$ - права β

$\Rightarrow$ D је зелени скуп

* да бисмо га описали једначинама, налазимо пресечне тачке α и β:

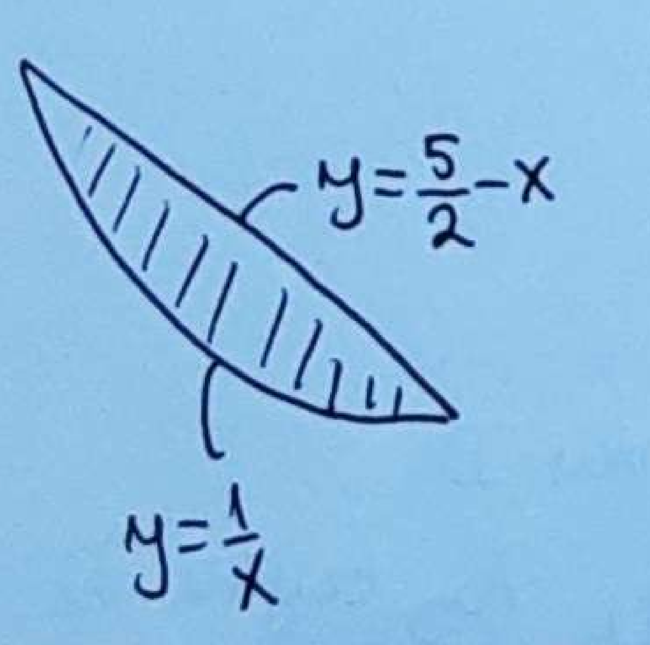
$$\left.\begin{aligned} xy&=1\\ x+y&=5/2\end{aligned}\right\}\quad y=1/x$$

$$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}\qquad x^2+1=\frac{5}{2}x$$

$$2x^2-5x+2=0 \Rightarrow x_{12}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}\quad \begin{aligned} x_1&=2\to y_1=1/2\\ x_2&=1/2\to y_1=2\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ пресечне тачке су:

$(\frac{1}{2},2)$ и $(2,\frac{1}{2})$



запишимо лепо D: $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2}\le x\le 2,\ \frac{1}{x}\le y\le \frac{5}{2}-x\}$

$\Rightarrow$ примењујемо Фубинијеву теорему:

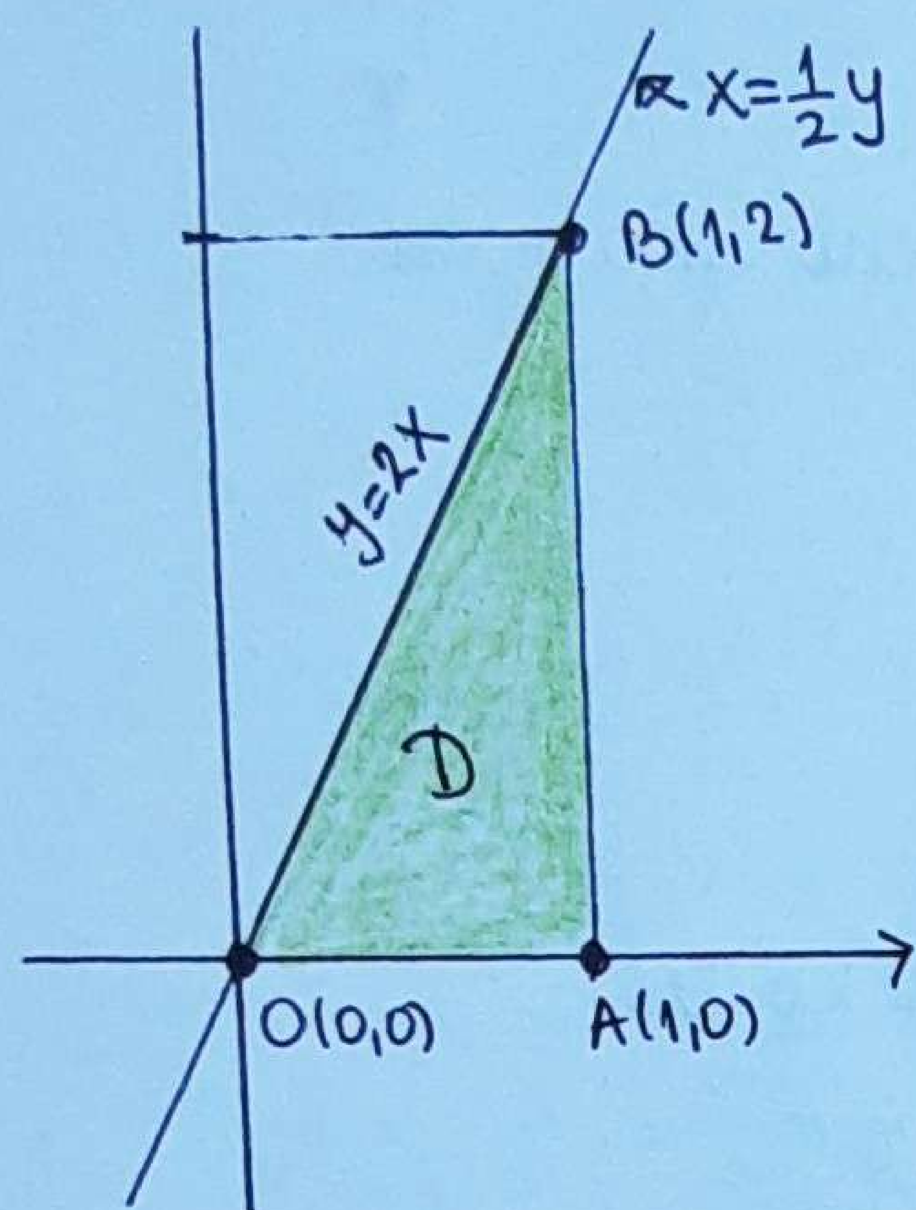
$$I=\int_{1/2}^{2}\left(\int_{1/x}^{\frac{5}{2}-x} x\cdot y\,dy\right)dx=\int_{1/2}^{2}\left(x\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_{1/x}^{\frac{5}{2}-x}\right)dx=$$

$$=\int_{1/2}^{2}\left(x\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}-x\right)^2-x\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}\right)dx=\frac{1}{2}\int_{1/2}^{2}\left(x^3+\frac{25}{4}x-5x^2-\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}+\frac{25}{8}x^2-\frac{5}{3}x^3-\ln x\right)\Big|_{1/2}^{2}=\text{израчунати број}$$ ☺ □

$\boxed{2.}$ D – троугао са теменима $O(0,0)$, $A(1,0)$ и $B(1,2)$

Одредити границе за оба поретка у интегралу $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = I$



D је зелени троугао

• ако прво интегралимо по y:

изражавамо y преко x:

доња фја: $\boxed{y=0}$

горња фја: $\boxed{y=2x}$

затим по x, где $\underline{x\in[0,1]}$

$$\Rightarrow \quad I = \int_0^1 \left(\int_0^{2x} f(x,y)\,dy \right) dx$$

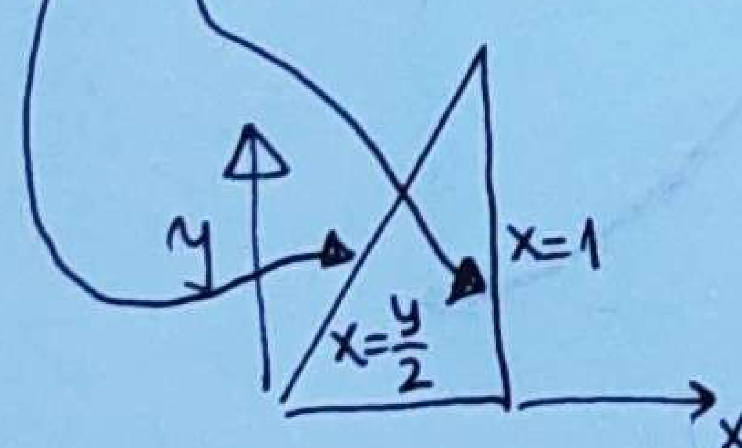
• ако прво интегралимо по x:

изражавамо x преко y:

доња фја: $\boxed{x = \tfrac{1}{2}y}$

горња фја: $\boxed{x=1}$

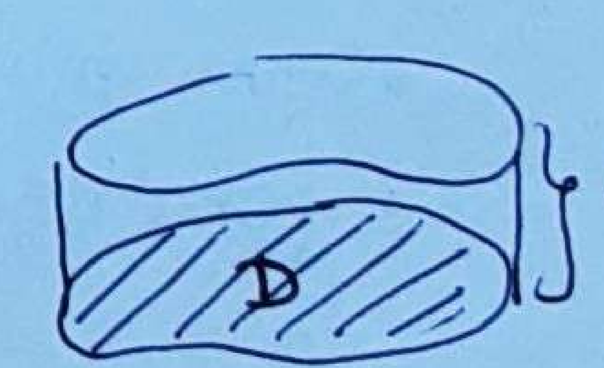
затим по y, где $\underline{y\in[0,2]}$



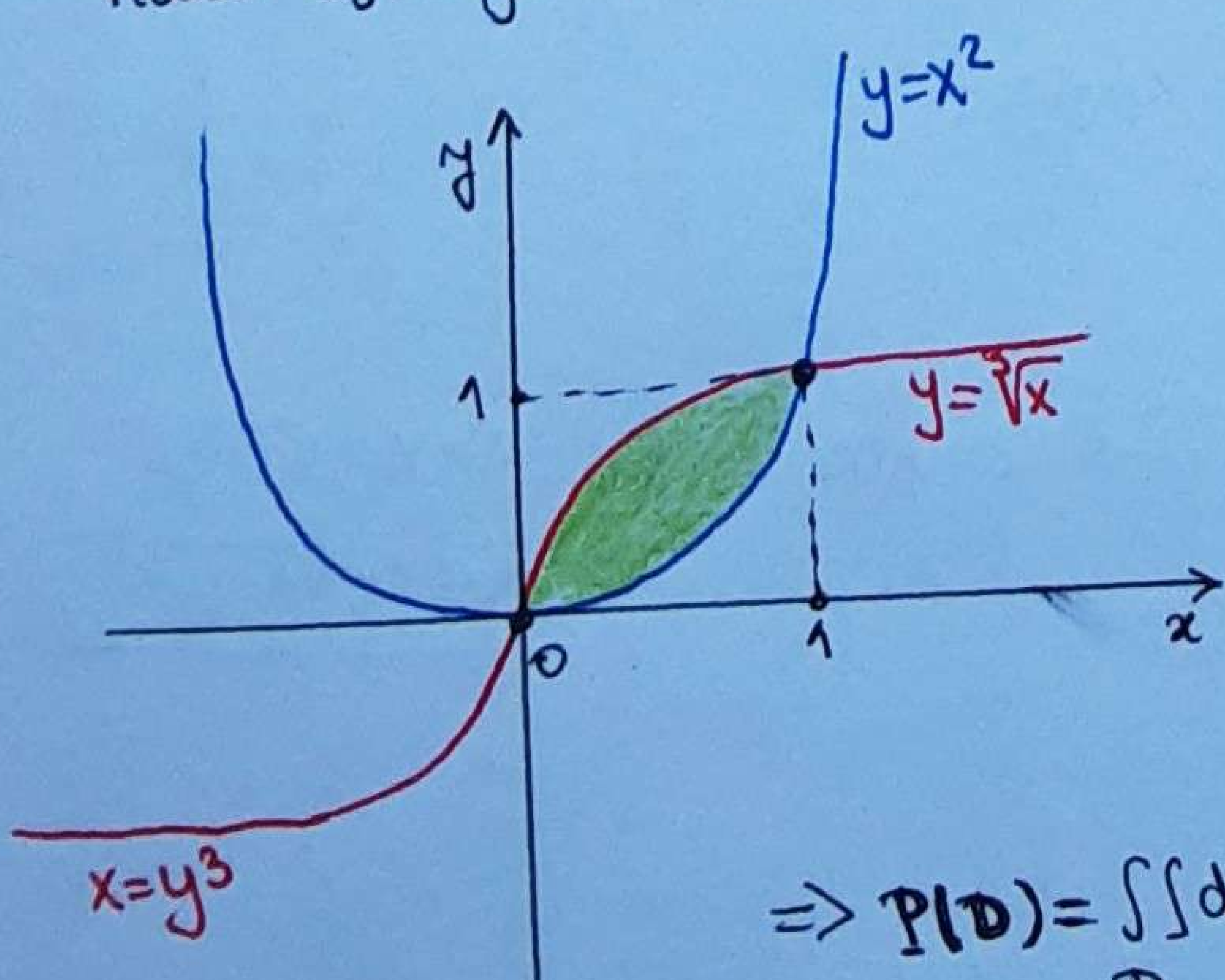
$$\Rightarrow \quad I = \int_0^2 \left(\int_{\frac{1}{2}y}^{1} f(x,y)\,dx \right) dy \qquad \square$$

$\boxed{3.}$ Наћи површину области D између кривих $y=x^2$ и $x=y^3$

ТЕОРИЈА КАЖЕ: $P(D) = \iint\limits_D dx\,dy$ (интегралимо фју $f(x,y)=1$)



како изгледа D ?



D је зелена област

граничне тачке: $\left.\begin{array}{l} y=x^2 \\ x=y^3 \end{array}\right\}$ $x=x^5 \quad x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow x=0 \lor x=1$

$\; y=0 \quad\;\; y=1$

$\boxed{A(0,0),\ B(1,1)}$

• изразимо обе криве преко x (ако можемо):

доња: $y=x^2$ горња: $y=\sqrt[3]{x}$

$$\Rightarrow \mathbf{P(D)} = \iint\limits_D dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt[3]{x}} 1\,dy \right) dx = \int_0^1 \left(y \Big|_{x^2}^{\sqrt[3]{x}} \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\sqrt[3]{x} - x^2\right) dx = \left(x^{4/3}\cdot\frac{3}{4} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12} \qquad \square$$

$\boxed{4.}$ Заменити поредак интеграције у интегралу $I = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{1} f(x,y)\,dy \right) dx$

Желимо облик: $I = \int_?^? \left(\int_?^? f(x,y)\,dx \right) dy$

Прво одредимо двојни облик $I = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ па ћемо онда наћи

Шта је D ?

$x \in [0,1]$

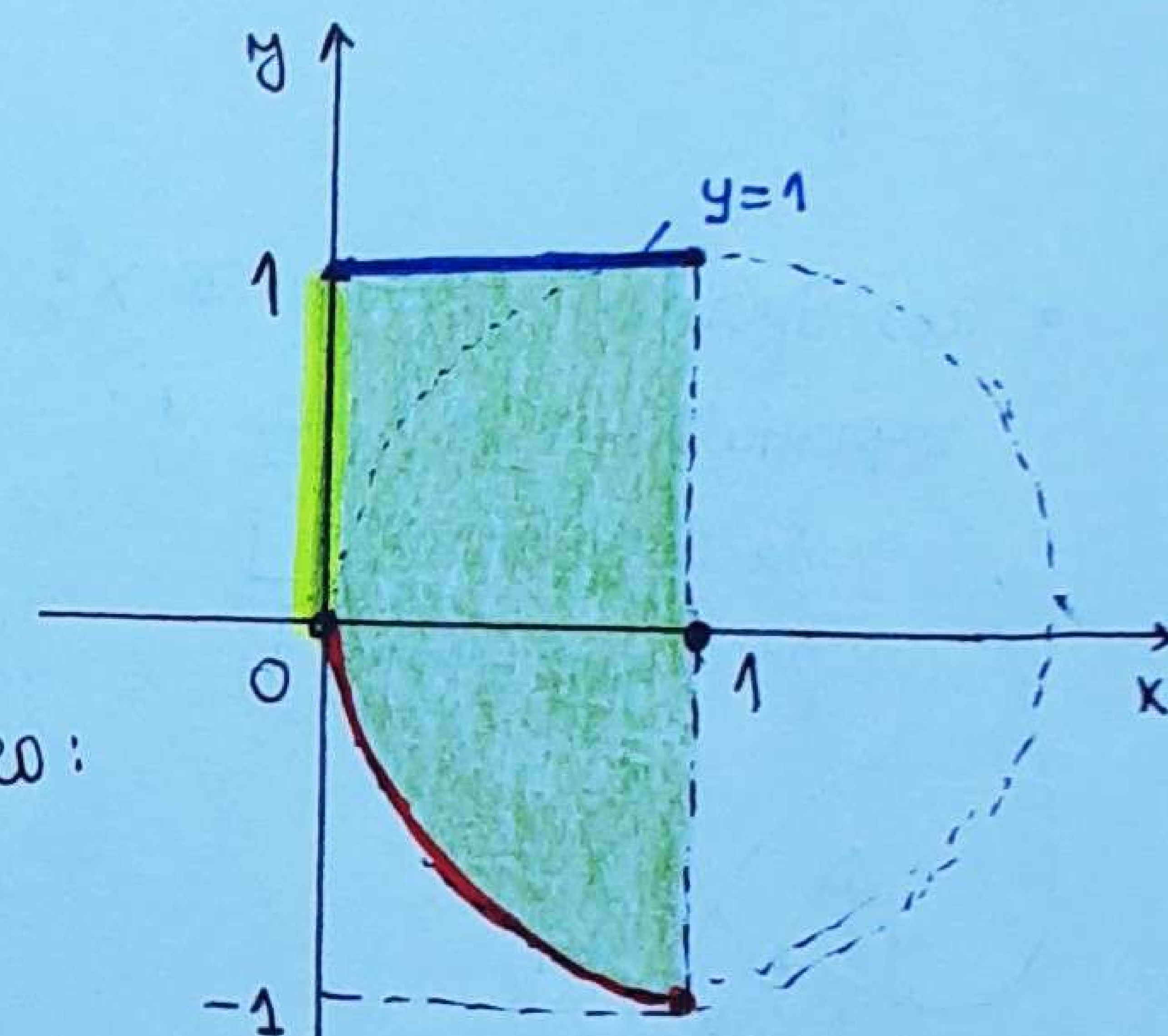
$y \in [\sqrt{2x-x^2}, 1]$ за дато x

$y = -\sqrt{2x-x^2}$ ← сређујемо да одредимо која је то крива :)

$\Leftrightarrow y \leq 0$ и $y^2 = 2x - x^2$

$\Leftrightarrow y \leq 0$ и $x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1$

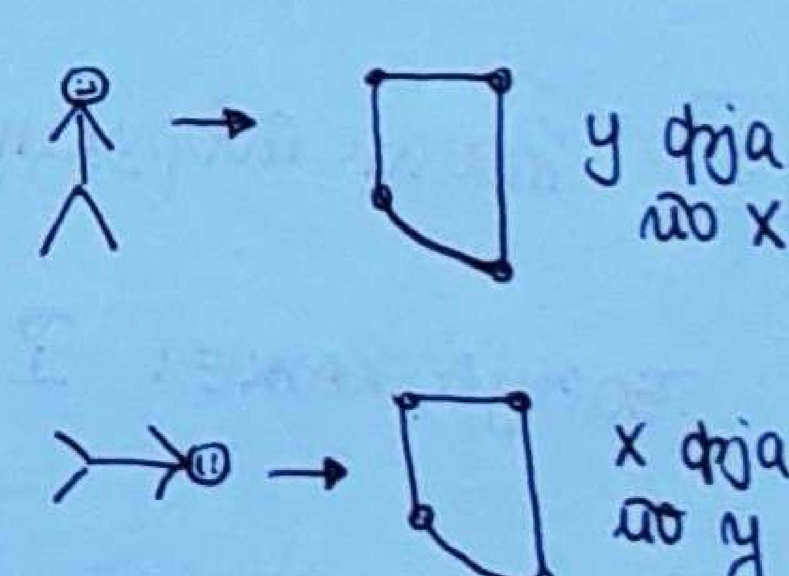
$\Leftrightarrow y \leq 0$ и $\underbrace{(x-1)^2 + y^2 = 1}_{\text{круг } K((1,0),1)}$



пошто $y \leq 0$ и $x \in [0,1]$ то је црвени део:

$\Rightarrow$ D је зелена област

Сада прелазимо на други облик - треба одредити x као функцију од y: $\underline{\underline{y \in [-1,1]}}$



- горња фја: $\underline{\underline{x = 1}}$
- доња фја: имамо два дела (жути и црвени):

* за $y \in [0,1]$ доња фја је $x = 0$

* за $y \in [-1,0]$ доња фја је део круга:

$x > 0$ и $(x-1)^2 + y^2 = 1$

$(x-1)^2 = 1 - y^2$

$|x-1| = \sqrt{1-y^2}$ → пошто $x < 1$: $1 - x = \sqrt{1-y^2}$

$\Rightarrow \underbrace{x = 1 - \sqrt{1-y^2}}$

Дакле:

за $y \in [-1,0]$: $1 - \sqrt{1-y^2} \leq x \leq 1$

за $y \in [0,1]$: $0 \leq x \leq 1$

па важи:

$$I = \int_{-1}^{0} \left(\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1} f(x,y)\,dx \right) dy + \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx \right) dy \quad \square$$

5. Заменити поредак интеграције у интегралу

$$I=\int_0^{2a}\left(\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)\,dy\right)dx$$, где је $a>0$ дат параметар.

- Прво одређујемо облик $I=\iint_D f(x,y)\,dx$

$D=?$ $\quad 0\le x\le 2a$

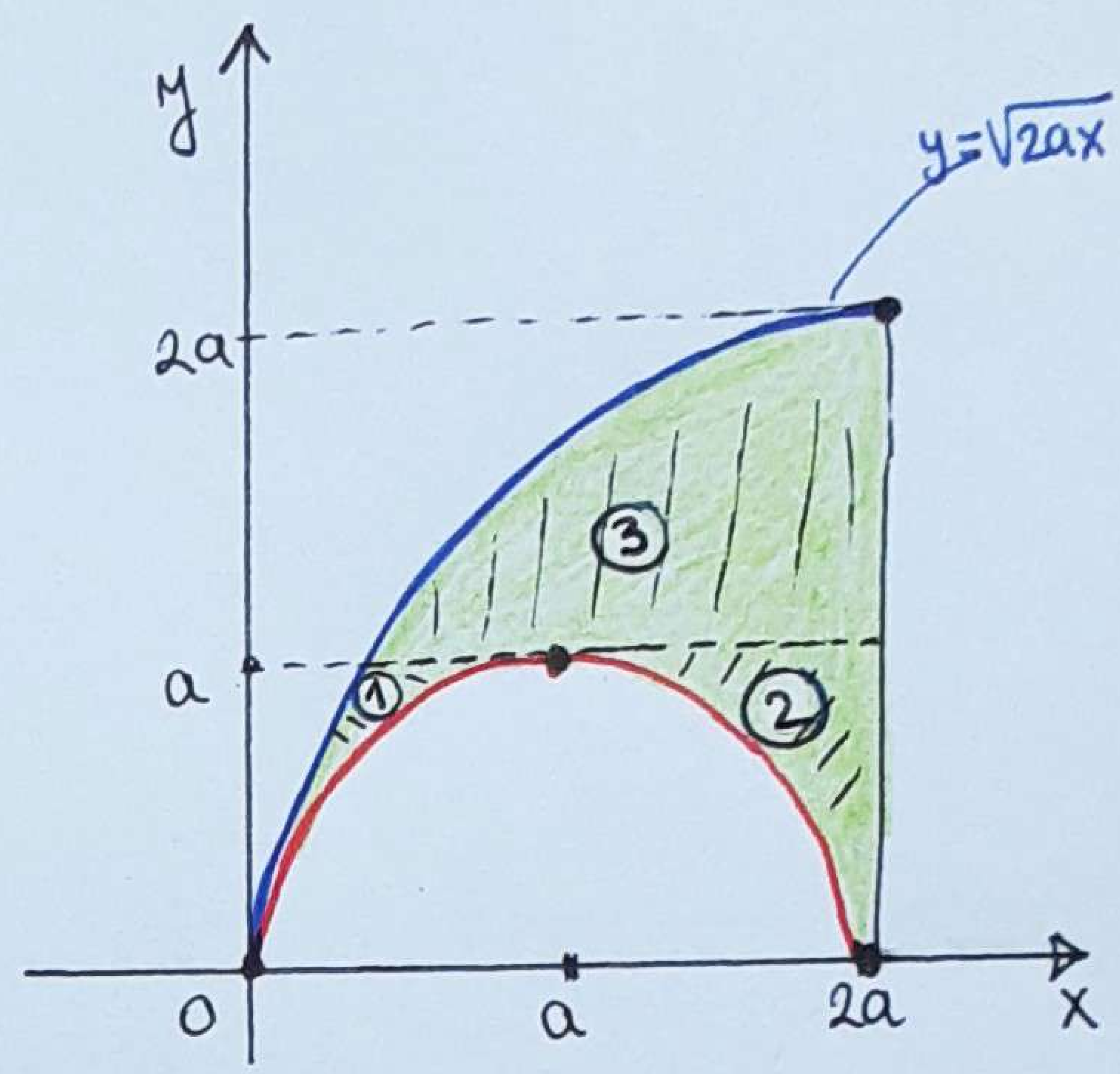
$\sqrt{2ax-x^2}\le y\le \underbrace{\sqrt{2ax}}_{\text{знамо}}$

одредимо криву:

$\sqrt{2ax-x^2}=y$

$\Leftrightarrow y\ge 0$ и $2ax-x^2=y^2$

$\Leftrightarrow y\ge 0$ и $\underbrace{(x-a)^2+y^2=a^2}_{\text{круг } K((a,0),a)}$



$\Rightarrow D$ је зелена област

Видимо да када заменимо поредак интеграције, морамо поделити на 3 дела (①, ② и ③ на слици)

① $y\in[0,a]$

доња: $y=\sqrt{2ax}\to x=\frac{y^2}{2a}$ $\quad$ горња: $(x-a)^2+y^2=a^2\to |x-a|=\sqrt{a^2-y^2}$ $\Rightarrow$

$x\le a$ $\quad x=a-\sqrt{a^2-y^2}$

$\Rightarrow \frac{y^2}{2a}\le x\le a-\sqrt{a^2-y^2}$

② $y\in[0,a]$ (али други део као на слици)

доња: $(x-a)^2+y^2=a^2$, али $x\ge a$ $\quad$ горња: $x=2a$

$|x-a|=\sqrt{a^2-y^2}$ $\quad\Rightarrow a+\sqrt{a^2-y^2}\le x\le 2a$

$x=\sqrt{a^2-y^2}+a$

③ $y\in[a,2a]$

доња: $y=\sqrt{2ax}\to x=\frac{y^2}{2a}$ $\quad$ горња: $x=2a$ $\Rightarrow \frac{y^2}{2a}\le x\le 2a$

Све заједно, тражени облик I је:

$$I=\int_0^a\left(\int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx\right)dy+\int_0^a\left(\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)\,dx\right)dy+\int_a^{2a}\left(\int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x,y)\,dx\right)dy \quad \square$$