ВЕЖБЕ
за СРЕДУ
25.3.2020.

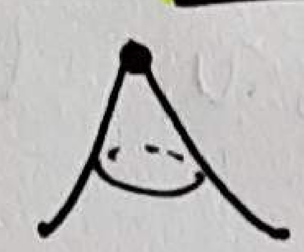
Локални екстремуми - НАСТАВАК

Настављамо проучавање локалних екстремума које смо почели прошлог часа. Обновимо теорију коју користимо (укратко)

$f: D \to \mathbb{R}$ $\quad D \subset \mathbb{R}^n$

$\tilde{a} \in D$ лок. екстремум: $\exists \varepsilon > 0$

$\forall a \in B(\tilde{a}, \varepsilon)$ $\;f(a) \le f(\tilde{a})$
$\tilde{a}$ локални max



&

$\forall a \in B(\tilde{a}, \varepsilon)$ $\;f(a) \ge f(\tilde{a})$
$\tilde{a}$ локални min

* КАНДИДАТИ ЗА ЛОКАЛНЕ ЕКСТРЕМУМЕ:

1) нуле градијента, тј. $\tilde{a}$ тд. $\nabla f(\tilde{a}) = \vec{0}$ (такве да $\tilde{a} \in \operatorname{int} A$)
(стационарне/критичне тачке)

2) тачке у којима је нарушена диференцијабилност

* КВАДРАТНЕ ФОРМЕ:

$Q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_j x_i \quad \circledast$$

Знамо да свакој симетричној квадратној матрици $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ можемо придружити квадратну форму $\circledast$

Такође, квадратна форма може бити:
- позитивно полудефинитна
- негативно -||-
- позитивно дефинитна
- негативно -||-
- променљивог знака

* ВЕЗА КВАДРАТНИХ ФОРМИ И ЕКСТРЕМУМА

$\tilde{a}$-стационарна тачка + услови непр. парц. извода довољног реда (до реда 3) (видети тврђење ⊛⊛ са предавања)

Хесијан:
$$df(\tilde{a}) = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\tilde{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\tilde{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\tilde{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\tilde{a}) \end{bmatrix}}_{\text{симетрична матрица } A = [a_{ij}]_{n\times n} \text{ под условима ⊛⊛}} \rightsquigarrow$$

овој матрици придружимо кв. форму
$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_j x_i$$

$\rightsquigarrow$ теорема каже:
- Q позитивно деф. $\Rightarrow$ $\tilde{a}$ лок. min
- Q негативно деф. $\Rightarrow$ $\tilde{a}$ лок. max
- Q променљивог знака $\Rightarrow$ $\tilde{a}$ није лок. екстремум

СИЛВЕСТЕРОВ КРИТЕРИЈУМ (провера каква је форма ☺)

$A=[a_{ij}]_{n\times n}$ симетрична

$A_1=a_{11}$ $A_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ $A_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ $\dots$ $A_n=\det A$

☺ за стац. тачку $\tilde{a}$

квадратна форма Q задата са A

- Q је позитивно дефинитна $\iff A_1>0, A_2>0 \dots, A_n>0$ ⇝ min
- Q је негативно дефинитна $\iff A_1<0, A_2>0, A_3<0, \dots, (-1)^n A_n>0$ ⇝ max

за $n=2$ тада на основу $\boxed{\text{Тв. 2.72.}}$ из књиге знамо и мало више (један случај кад је променљивог знака)

$f: D\to\mathbb{R}$ $D\subset\mathbb{R}^2 \to f(x,y)$

$(x_0,y_0)=a_0$ - стац. тачка

уочимо матрицу других извода

$$A=\begin{bmatrix} f''_{xx}(a_0) & f''_{xy}(a_0) \\ f''_{yx}(a_0) & f''_{yy}(a_0) \end{bmatrix} \rightsquigarrow \text{кв. форма } Q_A$$

главни минори су $\underset{f''_{xx}(a_0)}{\overset{}{A_1}}$ и $A_2=\det A$

$\boxed{\text{Тв. 2.72}}$ каже:

- Ако је $A_2>0$ → ако $A_1>0$ $\Rightarrow Q$ поз. деф. $\Rightarrow$ a_0 је лок. min
  → ако $A_1<0$ $\Rightarrow Q$ нег. деф. $\Rightarrow$ a_0 је лок. max
- Ако је $A_2<0$ $\Rightarrow Q$ пром. знака $\Rightarrow$ a_0 није лок. екстремум

Приметујемо: силвестров критеријум нам не даје одговор (за лок. екстремуме) када имамо неке $=0$

тј. генерално кад је кв. форма полудефинитна морамо да се снађемо ☺

На прошлом часу смо већ радили задатке са лок. екстремумима, сада ћемо урадити још 2.

1. Наћи локалне екстремуме ф-је

$$f(x,y,z) = x^3+y^2+z^2+12xy+2z$$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ има све непр. парц. изводе

=> проверавамо само стационарне тачке

M-стац. тачка: $\nabla f(M) = \vec{0} = (0,0,0)$

$$\left.\begin{array}{l} f'_x = 3x^2+12y = 0 \\ f'_y = 2y+12x = 0 \\ f'_z = 2z+2 = 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \Rightarrow y=-6x \\ \Rightarrow z=-1 \end{array} \quad \Big\} \quad 3x^2-6\cdot 12x = 0 \quad 3x(x-24)=0 \quad x=0 \vee x=24$$

=> стац. тачке су:

$M_1(0,0,-1)$

$M_2(24,-144,-1)$

Да ли су заиста лок. екстремуми? (за сад су само кандидати)

Покушавамо Силвестеров критеријум:

$f''_{xx} = 6x \quad f''_{xy} = 12 \quad f''_{xz} = 0$

$f''_{yy} = 2 \quad f''_{yz} = 0$

$f''_{zz} = 2$

(знамо да су мешовити парц. изводи једнаки: $f''_{xy} = f''_{yx}$ и други јер су испуњени услови теорема...)

Хесијан $d^2f(x,y,z) = \begin{bmatrix} 6x & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

M_2 $\quad d^2f(M_2) = \begin{bmatrix} 144 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

минори: $A_1 = 144 > 0$

$A_2 = \begin{bmatrix} 144 & 12 \\ 12 & 2 \end{bmatrix} = 144\cdot 2 - 144 > 0$

$A_3 = \det \begin{vmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{vmatrix} > 0$ израчуна се

Силвестер => $\boxed{M_2 \text{ је тачка локалног минимума}}$

M_1 $\quad d^2f(M_1) = \begin{bmatrix} 0 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

det први минор је $=0$ па не пролази Силвестер

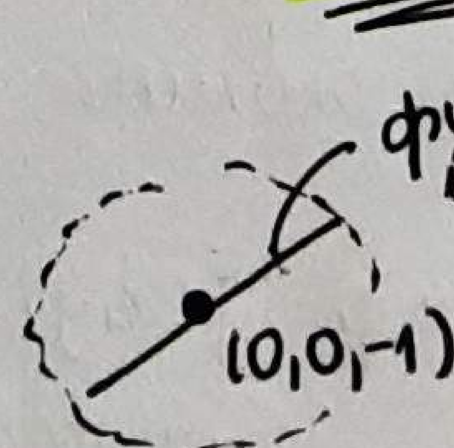
Проверавамо да ли је екстремум поредећи са тачкама из околине:

$$f(x,y,z) - \underbrace{f(\overbrace{0,0,-1}^{M_1})}_{=-1} = x^3+y^2+z^2+12xy+2z+1$$

$$= x^3+y^2+12xy+(z+1)^2$$

$\underline{y=0, z=-1}$ $\quad x^3$

ВАЖНО



фиксирамо праву по ком $y=0$ $z=-1$ само $x \to 0$

=> ова разлика мења знак у околини M_1 => $\boxed{M_1 \text{ није лок. екстремум}}$ □

2. Одредити локалне екстремуме ф-је $f(x,y)=x^2y^3(6-x-y)$

Очито $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ свуда сви парц. изводи непр.

$\Rightarrow$ проверавамо само стац. тачке $\nabla f(x,y)=\vec{0}$

$$\left.\begin{array}{l} f'_x = 12xy^3-3x^2y^3-2xy^4 = xy^3(12-3x-2y)=0 \\ f'_y = 18x^2y^2-3x^3y^2-4x^2y^3 = x^2y^2(18-3x-4y)=0 \end{array}\right\}$$

решавамо систем $\rightarrow$ $x=0 \lor y=0 \lor \underbrace{\begin{cases} 12=3x+2y \\ 18=3x+4y \end{cases}}$

$\Leftrightarrow (x,y)=(2,3)$

стационарне тачке:

$x=0$: све $M_t(0,t)$, $t\in\mathbb{R}$

$y=0$: све $N_t(t,0)$, $t\in\mathbb{R}$

$S(2,3)$

за све њих треба проверити да ли су заиста лок. екстремуми, па прво пробамо Силвестеров критеријум

- $f''_{xx} = 12y^3-6xy^3-2y^4$

  $f''_{xy} = 36xy^2-9x^2y^2-8xy^3$

  $f''_{yy} = 36x^2y-6x^3y-12x^2y^2$

- $\boxed{\text{за } S(2,3)}$

  $d^2f(S) \doteqdot \begin{bmatrix} -162 & -108 \\ -108 & -144 \end{bmatrix}$

  главни минори:

  $$\left.\begin{array}{l} A_1=-162<0 \\ A_2=162\cdot 144-108^2>0 \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{силвестер}} \boxed{\begin{array}{l} S \text{ је тачка} \\ \text{лок. max} \\ f(S)=108 \end{array}}$$

- $M_t(0,t)$: $d^2f(M_t)=\begin{bmatrix} \text{нешто} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

  силвестер неће дати одговор јер $A_2=\det\begin{bmatrix} - & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=0$

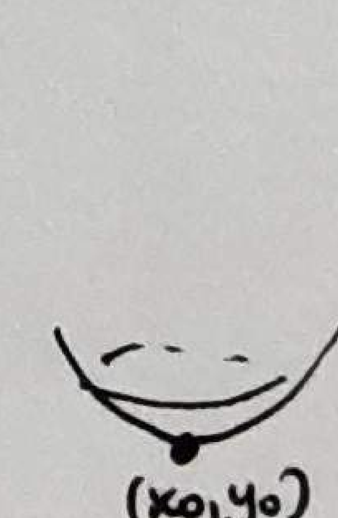
слично:

$N_t(t,0)$ $d^2f(N_t)=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ силвестер из истог разлога не даје одговор :(

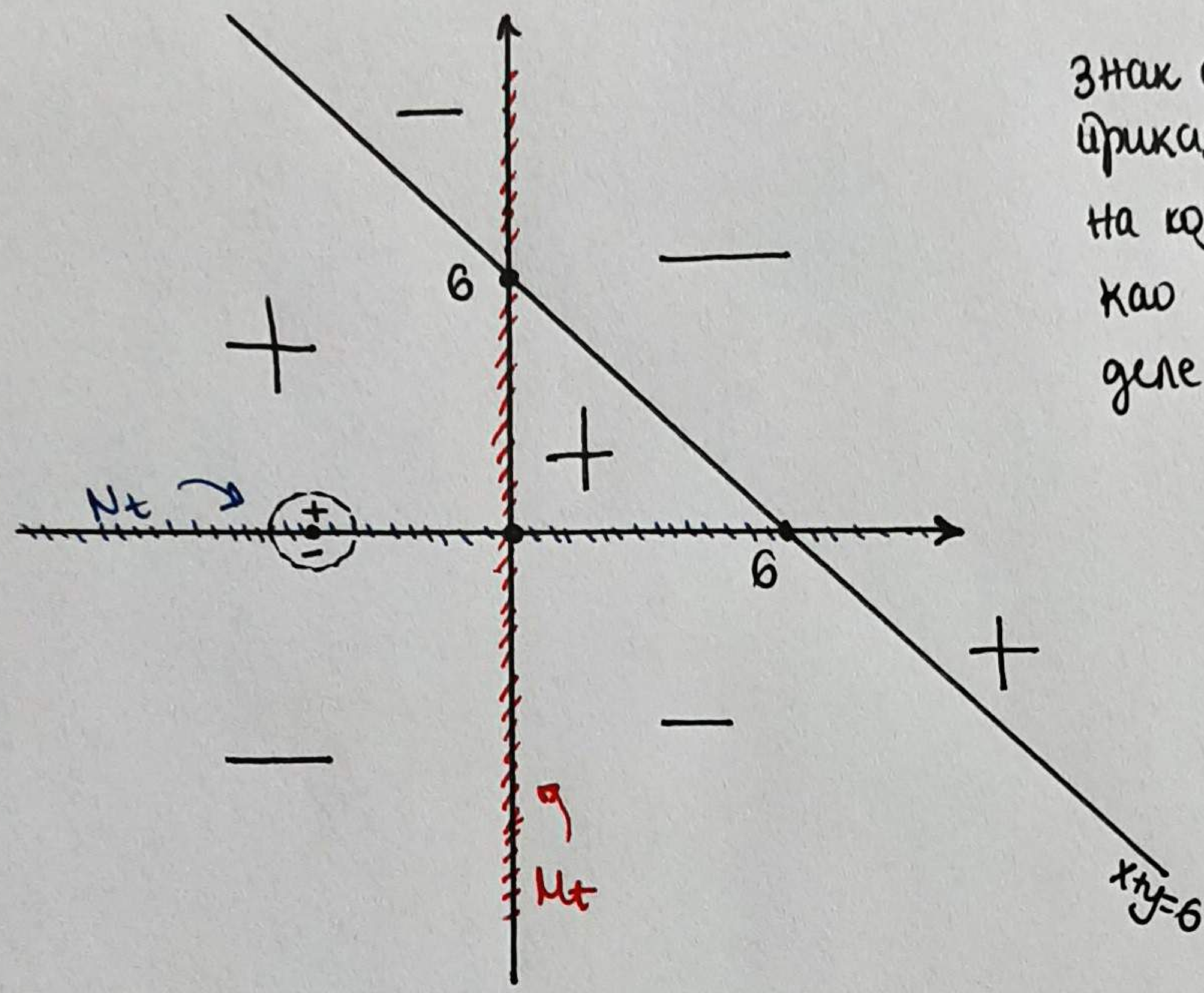
Могли бисмо испитивати прираштај као у претх. задатку, али овде може "елегантније" :)

Пошто је $f(M_t)=0=f(N_t)$, $\forall t\in\mathbb{R}$, треба испитати само знак ф-је f у околини ових тачака

(нпр. $f(x,y)>0$ у некој околини тачке (x_0,y_0) у којој $f(x_0,y_0)=0$, онда је (x_0,y_0) тачка лок. минимума)



Дакле, само нам је битан знак фје $f(x,y) = x^2 \cdot y^3 \cdot (6-x-y)$ за $(x,y) \in \mathbb{R}^2$
он зависи од знака y и знака $6-x-y$
па су нам битне праве $y=0$ (x-оса) и права $6=x+y$

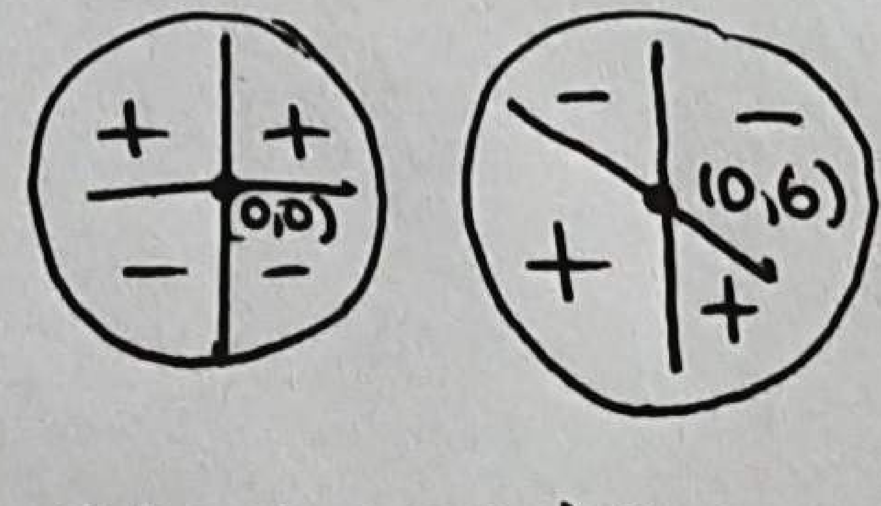


знак фје $f(x,y)$ је приказан у сваком од региона на које ове две праве ($y=0$ и $6=x+y$), као и y-оса (потребна због M_t), деле раван.

а наши кандидати:

- тачке $M_t(0,t)$ - то су тачке y-осе
- тачке $N_t(t,0)$ - — ॥ — x-осе

закључујемо: M_t за $t<0$ и $t>6$: M_t тачка лок. max
за $t \in (0,6)$: M_t — ॥ — min
$t=0,6$: $M_0(0,0)$, $M_6(0,6)$ нису т. лок. екстремума



јер у свакој околини фја има и поз. и нег. знак

N_t примећујемо да ниједна није тачка лок. екстремума. □

Условни екстремуми

Нека имамо фју $f: D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}^n$
и неки подскуп домена $S \subset D_f$ дефинисан системом једначина:

$$S = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \varphi_1(x_1,\dots,x_n)=0,\dots,\varphi_k(x_1,\dots,x_n)=0\}$$

екстремуме рестрикције $f|_S$ називамо условним екстремумима

На предавању сте видели да ова деф. обухвата и локалне и глобалне екстремуме ☺

* Како одредити условне екстремуме?

Лагранжови множиоци (видети услове диференцијабилности са предавања!)

Формирамо Лагранжову фју:

$$F(x_1,\dots,x_n,\lambda_1,\dots,\lambda_k) = f(x_1,\dots,x_n) - \lambda_1\varphi_1(x_1,\dots,x_n) - \dots - \lambda_k\varphi_k(x_1,\dots,x_n)$$

<u>неопходан</u> услов за тачку лок. условног екстремума је

$$\nabla F = \vec{0}$$

односно сви парц. изводи по $x_1,\dots,x_n,\lambda_1,\dots,\lambda_k$ су $=0$

! то није довољан услов ! – мора се проверити да ли је заиста екстремум...

За условне екстремуме нећемо радити теореме помоћу којих се то проверава (помоћу кв. форми), већ ћемо тражити најмању и највећу вредност на неком скупу, најчешће. Да се та највећа и најмања вредност достижу говори: (на компакту)

* **ВАЈЕРШТРАСОВА ТЕОРЕМА**

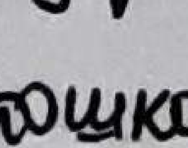
$D \subset \mathbb{R}^n$ D-компактан
$f: D \to \mathbb{R}$
Тада f достиже свој мин. и макс. на D
тј. постоје тачке a_{min} и a_{max} у D тд.
за $\forall a \in D$ важи:

$$f(a_{min}) \le f(a) \le f(a_{max})$$

* КАКО ТРАЖИМО НАЈМАЊУ И НАЈВЕЋУ ВРЕД. ФЈЕ f НА КОМПАКТНОМ D?

КАНДИДАТИ: (само идеја ☺)

- стац. тачке унутрашњости $\operatorname{int} D$ ($\nabla f = \vec{0}$)
- стац. тачке на граници ∂D – ту се могу појавити често Лагранжови множиоци јер ∂D може бити задата неком/неким једначинама
- шпицеви / нарушена диференцијабилност



① Одредити најмању и највећу вредност функције

$$f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 14y$$

на скупу $D = [0,2] \times [0,5]$, и $f(D)$.

* тј. тражимо глобални min и max ☺

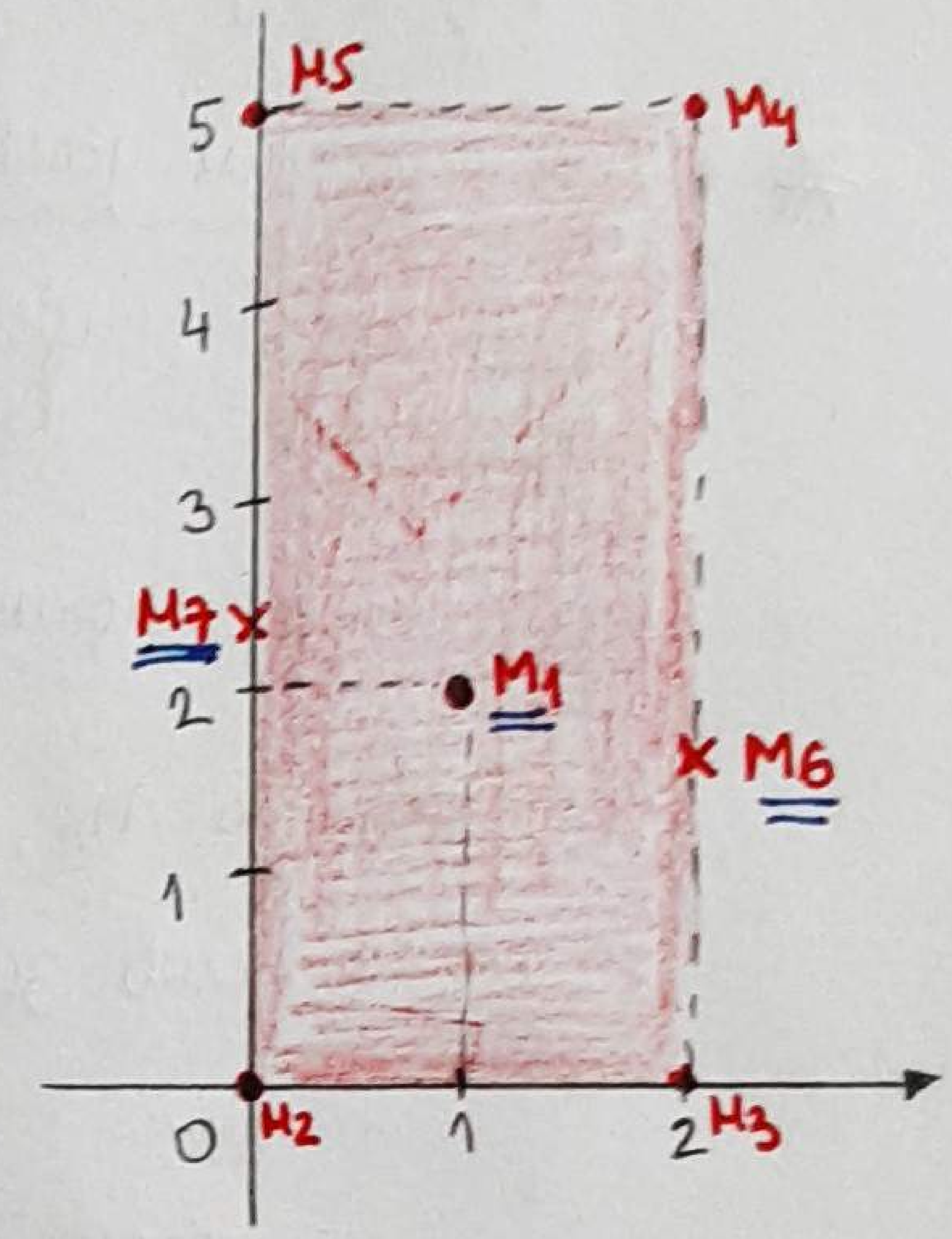
знамо да постоје по Вајерштрасовој теореми јер је D компактан скуп, а f непрекидна.

Кандидати:
1° стац. тачке у $\operatorname{int} D$
2° стац. тачке границе ∂D
3° 4 темена
(јер D има ове ћошкове)

1°
$$\left.\begin{aligned} f'_x &= 2x+2y-6 = 0 \\ f'_y &= 2x+6y-14 = 0 \end{aligned}\right\} \text{ решење } x=1, y=2$$

$\boxed{M_1(1,2)}$ једина стац. тачка у унутрашњости

$f(M_1) = -17$



2° граница ∂D има четири ивице: дужи (M_2,M_3), (M_3,M_4), (M_4,M_5), (M_2,M_5) → на слици:

дуж (M_2,M_3): $y=0,\ 0<x<2$
$f(x,0) = x^2 - 6x = g(x)$ ← само једна променљива па можемо као у анализи 1 ☺
$g'(x) = 2x-6$
$x=3 \notin (0,2)$ је нула извода
⟹ нема стационарних тачака, тј. нема лок. екстремума

дуж (M_3,M_4): $x=2,\ 0<y<5$:
$f(x,y) = f(2,y) = 4+4y+3y^2-12-14y = 3y^2-8-10y = g(y)$
$g'(y) = 6y-10 \quad g'(y)=0 \iff y=\frac{5}{3} \in (0,5) \Rightarrow$ стац. тачка $\boxed{M_6(2,5/3)}$

$f(M_6) = -\frac{49}{3}$

дуж (M_4,M_5): $y=5,\ 0<x<2$
$f(x,5) = x^2+10x+75-6x-70 = x^2+4x+5 = g(x)$
$g'(x) = 2x+4 \quad g'(x)=0 \iff x=-2$
$-2 \notin (0,2) \Rightarrow$ нема стац. тачака

дуж (M_2M_5): $x=0,\ 0<y<5$
$f(0,y) = 3y^2-14y = g(y)$
$g'(y) = 6y-14$
$g'(y)=0 \iff y=\frac{7}{3} \in (0,5) \Rightarrow$ стац. тачка $\boxed{M_7(0,7/3)}$ $\quad f(M_7) = -\frac{49}{3}$

3° темена: $\boxed{M_2(0,0)} \to f(M_2)=0$; $\boxed{M_3(2,0)} \to f(M_3)=-8$
$\boxed{M_4(2,5)} \to f(M_4)=17$; $\boxed{M_5(0,5)} \to f(M_5)=5$

Дакле, кандидати за min и max су: $\{-17, -\frac{49}{3}, 0, -8, 5, 17\} \Rightarrow \boxed{f_{min}=-17} = f(M_1)$, $\boxed{f_{max}=17} = f(M_4)$

D је повезан и компактан $\Rightarrow f(D)$ је сегмент $\Rightarrow \boxed{f(D)=[-17,17]}$ ∎

② Одредити најмању и највећу вредност ф-је

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y$$

на скупу $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 4\}$

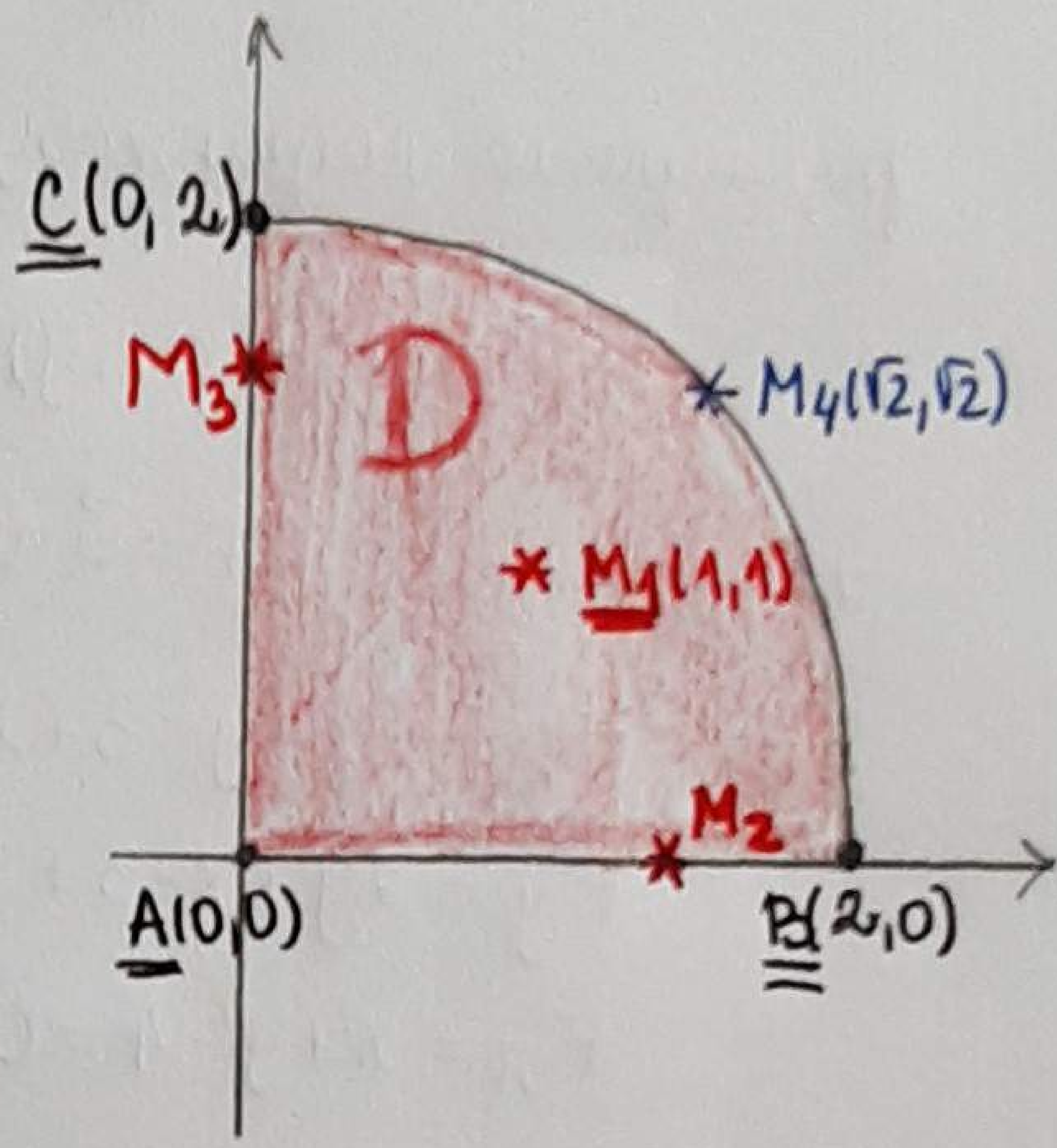
D је „четвртина круга" са полупр. 2, центар O

D је компактан (јер је затворен и ограничен)
f је непрекидна на $\mathbb{R}^2$ $\Rightarrow$ f непр. на D

$\xrightarrow{\text{Вајерштрас}}$ f достиже min и max на D

кандидати за тачке у којима се достижу min / max:

1° стац. тачке int D
2° стац. тачке ∂D
3° "ћошкови" $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(0,2)$ (слика)



1° int D: стац. тачка $\nabla f = (0,0)$:

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= 2x+y-3 = 0 \\ f'_y &= x+2y-3 = 0 \end{aligned}\right\}$$

решење $(x,y) = (1,1)$
стац. тачка $\boxed{M_1(1,1)} \in D$ ✓
$f(M_1) = -3$

☺ кад одређујемо глобални min и max као у овом задатку, не проверавамо (као код локалних) даље стац. тачке (оно преко кв. форми & Силвестера...) јер нам је само циљ да нађемо кандидате, у њима израчунамо f, и нађемо f_{min} и f_{max}

2° ∂D: састоји се од дужи AB, дужи AC и лука BC

дуж (AB): $y=0$, $0<x<2$

$f(x,0) = x^2 - 3x = g(x)$

$g'(x) = 2x - 3$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3/2 \in (0,2)$ ✓ $\Rightarrow$ стац. тачка $\boxed{M_2(\frac{3}{2},0)} \in D$ ✓

$f(M_2) = -\frac{9}{4}$

дуж (A,C): $x=0$, $0<y<2$

(све је симетрично)

$f(0,y) = y^2 - 3y = g(y)$

$g'(y) = 2y - 3$

$g'(y) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2} \in (0,2)$ ✓ $\Rightarrow$ стац. тачка $\boxed{M_3(0,\frac{3}{2})} \in D$ ✓

$f(M_3) = -9/4$

лук BC: у збирци (стр 153. зад 18.) је показано како се може радити без коришћења Лагранжове ф-је, али ми ћемо овде користити Лагранжову ф-ју јер је много једноставније:

Дакле, желимо екстремум фје $f(x,y)$ на луку $\overset{\frown}{BC}$ – то гледамо као условни екстремум са условом $x^2+y^2=4$

$$\iff x^2+y^2-4=0$$

$$\varphi(x,y)=x^2+y^2-4$$

$$S=\{(x,y)\in D \mid \varphi(x,y)=0\}$$

Формирамо лагранжову функцију:

$$\boxed{F(x,y,\lambda)} = f(x,y)+\lambda\cdot\varphi(x,y) = x^2+y^2+xy-3x-3y+\lambda(x^2+y^2-4)$$

и тражимо $\nabla F=\vec{0}=(0,0,0)$, то јест:

$$\left.\begin{aligned} F'_x &= 2x+y-3+2\lambda x=0 \\ F'_y &= 2y+x-3+2\lambda y=0 \\ F'_\lambda &= x^2+y^2-4=0 \end{aligned}\right\}$$

(!!) $F_\lambda=0$ је увек заправо услов $\varphi(x,y)=0$

решавамо овај систем → одузимамо 1)-2):

$x-y+2\lambda(x-y)=0$

$(x-y)(1+2\lambda)=0 \Rightarrow (x=y \ \vee \ \lambda=-1/2)$

- ако $x=y$: $x^2+y^2=4 \Rightarrow x=y=\sqrt{2} \Rightarrow$ стац. тачка на луку $\overset{\frown}{BC}$ је $\boxed{M_4(\sqrt{2},\sqrt{2})}$

  $f(M_4)=6-6\sqrt{2}$

- ако $\lambda=-1/2$ систем постаје:

  $\left.\begin{aligned} x+y&=3 \\ x^2+y^2&=4 \end{aligned}\right\}$ $y=3-x \Rightarrow x^2+(3-x)^2=4$

  $2x^2-6x+5=0$

  ова једначина нема решења у $\mathbb{R}$ $(D=36-4\cdot 10<0)$

Остаје још да проверимо "ћошкове":

3° $\boxed{f(A)}=f(0,0)=0$

$\boxed{f(B)}=f(2,0)=4-3\cdot 2=-2$

$\boxed{f(C)}=f(0,2)=4-3\cdot 2=-2$

Закључак: глобални минимум и максимум f на D се налазе у скупу: $\{-3,-\frac{9}{4},6-6\sqrt{2},0,-2\}$

$\Rightarrow \boxed{f_{max}=0}$

$\boxed{f_{min}=-3}$

$(-3<6-6\sqrt{2}$

$\iff 6\sqrt{2}<9$

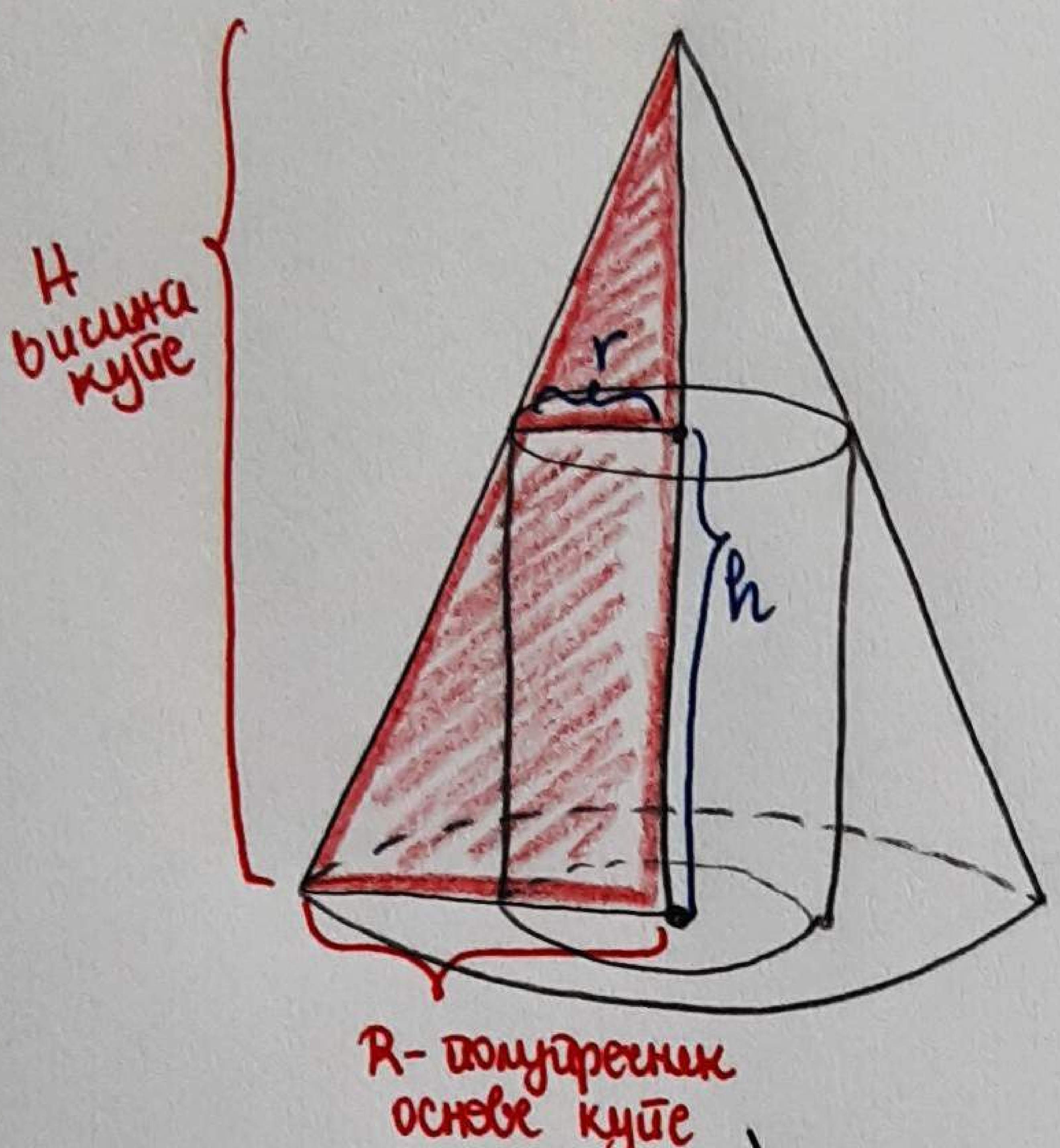
$\iff 36\cdot 2<81$

$\iff T)$

□

Веома су значајне примене овог метода налажења екстремних вредности.

③ У дату купу ($R, H>0$ задати) уписати ваљак највеће запремине тако да једна страна лежи у основи купе.



Нека је r полупречник основе ваљка ($0<r<R$) а h висина ваљка ($0<h<H$)

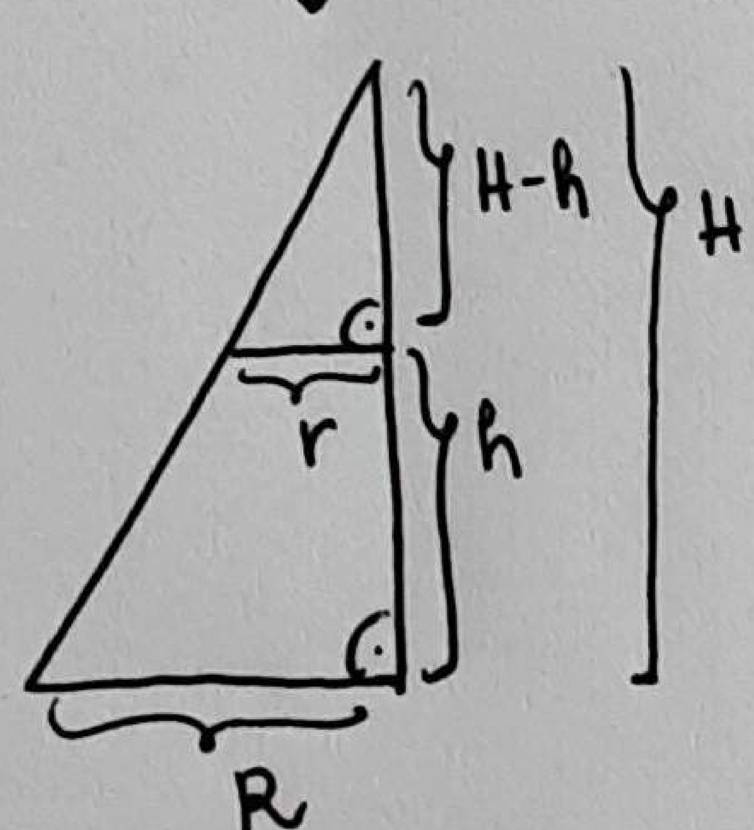
☺ што је h веће, r је мање, и обрнуто

треба наћи V_{max}, где $V = h\cdot r^2\pi$

заправо, тражимо максимум фје

$f(r,h)=r^2h$ тј. $f(x,y)=x^2\cdot y$

из осенченог троугла имамо везу r и h са R и H на основу сличности:



$$\frac{H-h}{H}=\frac{r}{R}$$

$\Leftrightarrow HR-hR=Hr$

$\Leftrightarrow HR-h\cdot R-H\cdot r=0 \rightsquigarrow \underbrace{HR-H\cdot x-R\cdot y}_{\varphi(x,y)}=0$

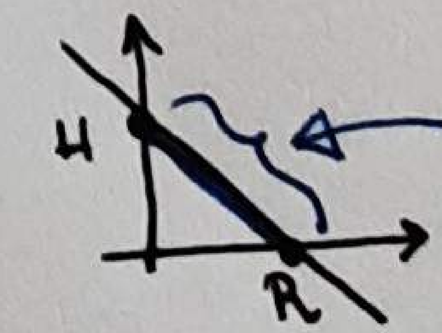
услов $\varphi(x,y)=0$

Лагранжова функција: $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\cdot\varphi(x,y) = x^2\cdot y+\lambda(HR-Hx-Ry)$

$\nabla F=\vec{0}$:
$$\begin{cases} F'_x = 2xy-\lambda H=0 \\ F'_y = x^2-\lambda R=0 \\ F'_\lambda = HR-Hx-Ry=0 \end{cases}$$

услов $F'_\lambda=0$: $HR=Hx+Ry$

$\Leftrightarrow y=-\frac{H}{R}x+H$



Како $(x,y)=(r,h)$ позитивни овај услов заправо значи да припадају овој дужи

решавамо овај систем да би се ослободили λ: $\left.\begin{matrix} 2xy-\lambda H=0 \ /\cdot R \\ x^2-\lambda R=0 \ /\cdot H \end{matrix}\right\}$ па одузмемо

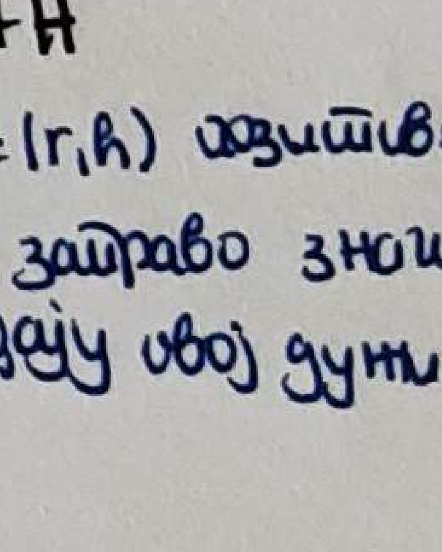
$\Rightarrow 2xyR-x^2H=0$

$x\cdot(2yR-xH)=0$

запремина сигурно није максимална када $x=r=0$ ☺

$\Rightarrow 2yR=xH \quad x=\frac{2R}{H}\cdot y$

заменом у $HR-Hx-Ry=0 \Longrightarrow \boxed{y=H/3 \ , \ x=\frac{2R}{3}}$



Дакле, запремина је максимална за $h=H/3$, $r=\frac{2R}{3} \rightarrow V_{max}=\frac{4R^2}{9}\pi\cdot\frac{H}{3}$ □