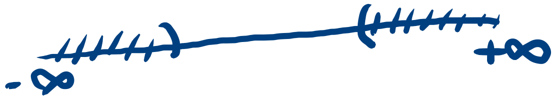
Асимптоте-мало ☺

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

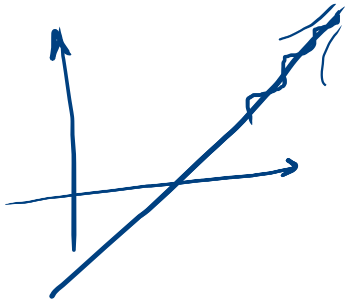


$\underline{x\to+\infty}$ $y=ax+b$ асимптота

$\iff f(x)=ax+b+o(1),\ x\to+\infty$

$a=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ $\quad a,b\in\mathbb{R}$

$b=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-a\cdot x)$



$\underline{x\to-\infty}$ - аналогно

$a\neq 0$: $y=ax+b$ коса асимптота К.А.

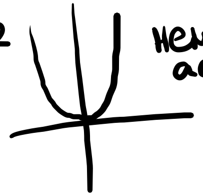
$a=0$: $y=b$ хоризонтална ас. Х.А.

① Асимптоте (ако ∃) за $x\to+\infty$, $x\to-\infty$

$f(x)=\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$

☺ $\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}\sim\sqrt{\frac{x^3}{x}}=\sqrt{x^2}=|x|$ " $\begin{cases} x, & x>0 \\ -x, & x<0\end{cases}$

Г $g(x)=x^2$



нема ас. ┘

$f(x)=\sqrt{x^2\cdot\frac{x}{x-1}}=\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{\frac{x}{x-1}}^{\,:x}=|x|\cdot\sqrt{\frac{1}{1-\frac{1}{x}}}=|x|\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}$

$\frac{1}{x}\to 0$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$

! развоји по $\frac{1}{x}$ кад $x\to+\infty$, $x\to-\infty$; $\frac{1}{x}\to 0$

$$f(x) = |x| \cdot \left(1-\frac{1}{x}\right)^{-1/2}$$

$\boxed{x \to +\infty}$ $\quad f(x) \overset{|x|=x}{=} x \cdot \left(1-\frac{1}{x}\right)^{-1/2} \overset{t=-\frac{1}{x}\to 0}{=} x \cdot \left(1 + \frac{-1}{2}\cdot\frac{-1}{x} + o\left(-\frac{1}{x}\right)\right)$

$\alpha \in \mathbb{R}$

$t \to 0$

$(1+t)^{\alpha} = 1 + \alpha t + o(t)$

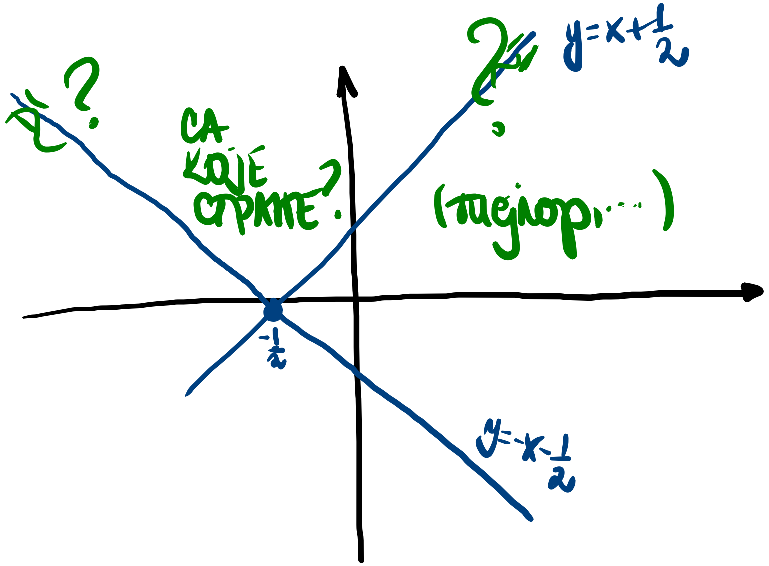
$$= x \cdot \left(1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$= \boxed{x + \frac{1}{2}} + o(1)$$

$\boxed{y = x + \frac{1}{2} \quad \text{К.А. за } x \to +\infty}$

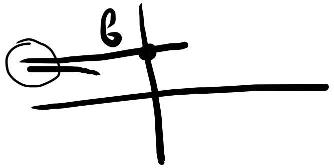
$\boxed{x \to -\infty}$ $\quad f(x) \overset{|x|=-x}{=} -x \cdot \left(1-\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} \overset{\dots}{=} \boxed{-x - \frac{1}{2}} + o(1)$

$\boxed{y = -x - \frac{1}{2} \quad \text{К.А за } x \to -\infty}$



② Асимптоте за $x\to+\infty$, $x\to-\infty$: $f(x)=2\cdot\ln|e^x-1|-\ln|e^x-2|$

☺ $y=b$ х.А. f кад $x\to+\infty$ $(-\infty)$ $\iff$ $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} f(x)=b$



$-\infty$

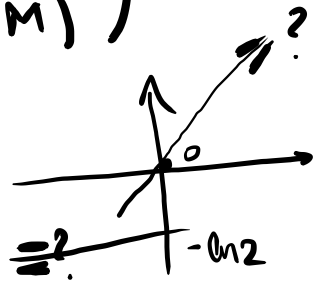
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} 2\cdot\ln|\underbrace{\underbrace{e^x}_{\to 0}-1}_{1}|-\ln|\underbrace{\underbrace{e^x}_{\to 0}-2}_{2}| = 2\ln 1-\ln 2=\boxed{-\ln 2}$$

$\boxed{y=-\ln 2 \text{ х.А. кад } x\to-\infty}$

$+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{(e^x-1)^2}{e^x-2}=+\infty$$ (без $|\cdot|$ јер све >0 за $x\to+\infty$ $(x>M)$)

$\Rightarrow$ не постоји х.А.



$x\to+\infty$

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\ln(e^x-1)-\ln(e^x-2)\\ &= 2\cdot\ln\left(e^x\cdot\left(1-\frac{1}{e^x}\right)\right)-\ln\left(e^x\left(1-\frac{2}{e^x}\right)\right)\\ &= \underbrace{2\underbrace{\ln e^x}_{=x}}_{2x}+\underbrace{2\ln\underbrace{\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}_{\to 1}}_{\to 0}-\underbrace{\ln e^x}_{=x}-\underbrace{\ln\underbrace{\left(1-\frac{\overset{\to 0}{2}}{e^x}\right)}_{\to 1}}_{\to 0} = 2x+o(1)-x-o(1)\\ &= \boxed{x}+o(1) \end{aligned}$$

$\boxed{y=x \text{ к.А. кад } x\to+\infty}$

Налажење инверзне ф-је

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

бијекција

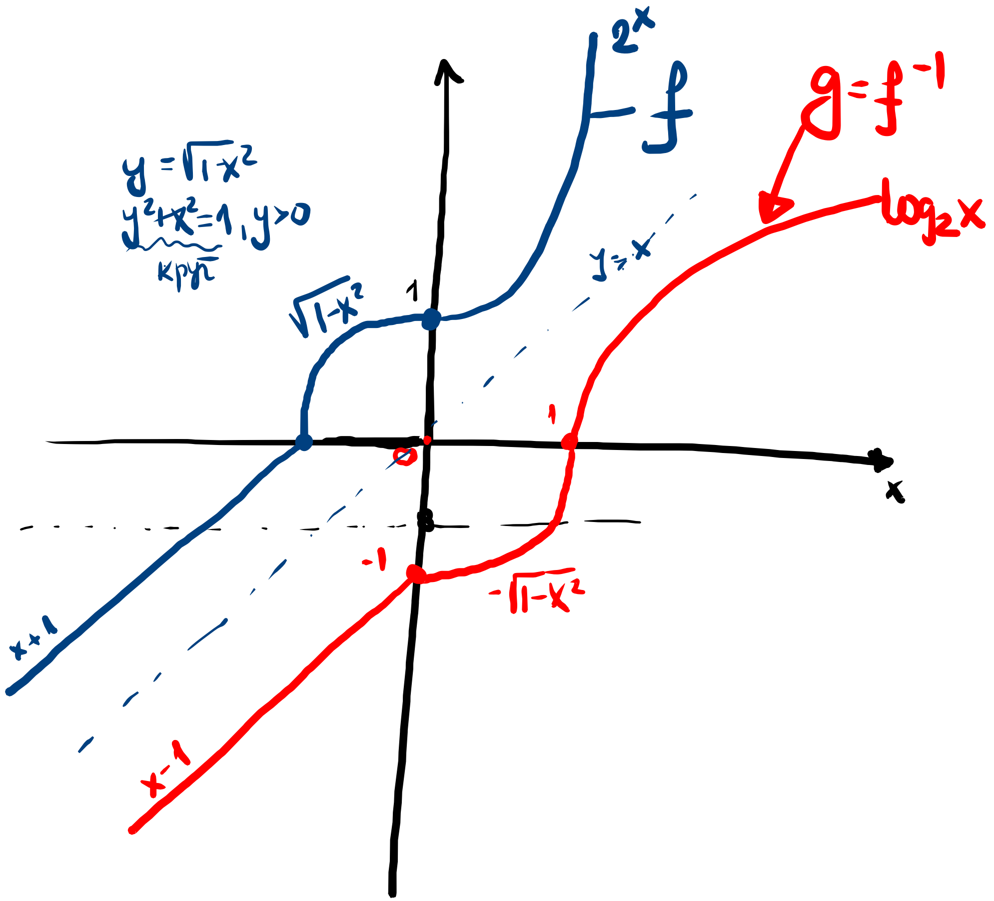
$\exists$ инверз $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} f(x) = y$$

$$g(\underbrace{f(x)}_{y}) = x$$

$$g(y) = x$$

! изразити x преко y !



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \le -1 \\ \sqrt{1-x^2}, & -1 < x < 0 \\ 2^x, & x \ge 0 \end{cases}$$

бијекција ✓

g-инверз, $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad g(\underbrace{f(x)}_{y}) = x$

1° $\quad x \le -1 \quad y = f(x) = x + 1 \Rightarrow x = y - 1$

$x \in (-\infty, -1] \to y \in (-\infty, 0] \qquad g(y) = x$

$$g(y) = y - 1$$

2° $\quad x \in (-1, 0) \quad y = f(x) = \sqrt{1-x^2} \in (0, 1)$

$g(y) = x$

$y = \sqrt{1-x^2} \quad /^2$

$y^2 = 1 - x^2$

$x^2 = 1 - y^2$

$x < 0$

$x = -\sqrt{1-y^2}$

$$g(y) = -\sqrt{1-y^2}, \quad y \in (0, 1)$$

③ $y = f(x) = 2^x \qquad x \in [0, +\infty)$

$x = \log_2 y \qquad \underline{y \in [1, +\infty)}$

$g(y) = x \qquad \underline{g(y) = \log_2 y}$

Цео израз:

$$\underline{g(y)} = \begin{cases} y-1, & y \in (-\infty, 0] \\ -\sqrt{1-y^2}, & y \in (0,1) \\ \log_2 y, & y \geq 1 \end{cases}$$