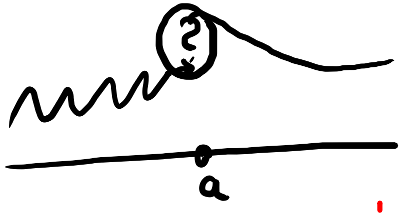
~Непрекидност (наставак)~

$f: A \to \mathbb{R}$, $a \in A$, f непр. у $a \iff \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

$\iff \lim\limits_{x \to a-} f(x) = f(a) = \lim\limits_{x \to a+} f(x)$



① $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ $\quad$ Испитати непрекидност f.

$x \neq 1$: $\quad x-1$ непр. фја

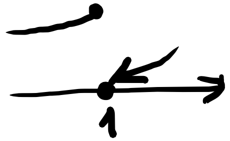
$\Rightarrow \dfrac{1}{x-1}$ непр. фја

$\frac{1}{x-1}$ н. $e^{н}$ н. • н. $\Rightarrow e^{\frac{1}{x-1}}$ непр. фја

$\Rightarrow 1+e^{\frac{1}{x-1}}$ -||-

$\Rightarrow \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}$ непр. ✓

$x = 1$: $\quad f(1) = 1 \quad \lim\limits_{x \to 1} f(x) \overset{?}{=} 1 \quad \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}} \overset{?}{=} 1$



$x-1 \to 0, x \to 1 \quad \dfrac{1}{x-1} \to \cancel{?}$ $\quad x \to 1+$, $x \to 1-$ разд?

$\lim\limits_{x \to 1-} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}} = \dfrac{1}{1+0} = 1 = f(1)$ ✓ $\quad (x-1 \to 0-, \ \frac{1}{x-1} \to -\infty, \ e^{\frac{1}{x-1}} \to 0)$ $\quad$ $\boxed{f \text{ непр. слева у } 1}$ (1)

$\lim\limits_{x \to 1+} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}} = \dfrac{1}{\infty} = 0 \neq f(1)$ $\quad (x-1 \to 0+, \ \frac{1}{x-1} \to +\infty, \ e^{\frac{1}{x-1}} \to +\infty)$

$\boxed{f \text{ није непр. здесна у } 1}$ (2)

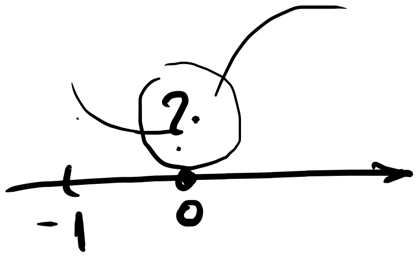
(1), (2) $\Rightarrow$ f није непр. у 1

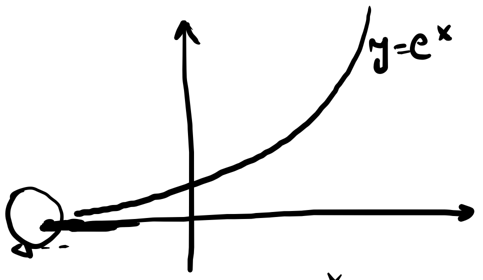
$\boxed{f \text{ непр. на } \mathbb{R} \setminus \{1\}}$ □

② за $x>-1,\ x\neq 0$: $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$

Да ли се f може додефинисати за $x=0$ тд. функција буде непр. на $\mathbb{R}$?

ако може: $\underset{\text{нова вред}}{\text{„}f(0)\text{"}} = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$





„$e^{-\infty}$" $\leftarrow \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$

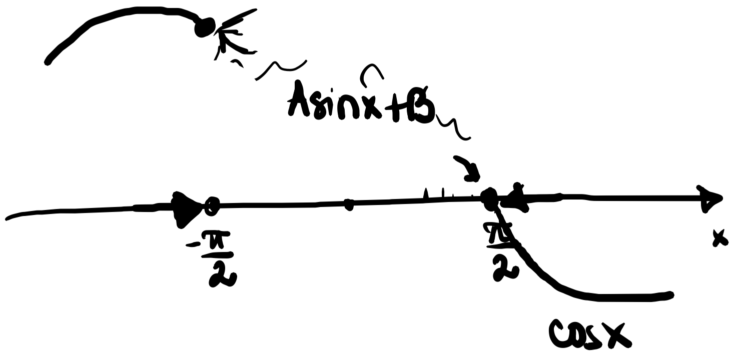
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} = \lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{(1+x)^{1/2}-1}{x}}_{\to 1/2}\cdot\underbrace{\frac{x}{(1+x)^{1/3}-1}}_{\to 1/1/3 = 3} = \frac{1}{2}\cdot 3 = \frac{3}{2}$$

$$\underset{\text{додефинисана } f}{\tilde{f}}(x)=\begin{cases} f(x), & x>-1,\ x\neq 0\\ 3/2, & x=0\end{cases}$$

додефинисана f непр. у $x=0$ ✓

③ $$f(x) = \begin{cases} -2\sin x, & x \le -\frac{\pi}{2} \\ A\sin x + B, & |x| < \frac{\pi}{2} \\ \cos x, & x \ge \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$A, B = ?$ тд. f непр. на $\mathbb{R}$.



$x \ne \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$ f непр. у x ✓

$\boxed{x = -\frac{\pi}{2}}$ f непр. слева у $-\frac{\pi}{2}$ ($-2\sin x$ ✓)

$$\underbrace{f\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)}_{=2} \overset{?}{=} \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}+} f(x) = \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}+} (A \underbrace{\sin x}_{\sin -\frac{\pi}{2} = (-1)} + B) = -A + B$$

$\boxed{f \text{ непр. у } -\tfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2 = -A + B}$ (1)

$\boxed{x = \frac{\pi}{2}}$ f непр. здесна у $\frac{\pi}{2}$ ($\cos x$ ✓)

$$\underbrace{f\left(\tfrac{\pi}{2}\right)}_{\cos\frac{\pi}{2} = 0} \overset{?}{=} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} (A \underbrace{\sin x}_{\sin\frac{\pi}{2} = 1} + B) = A + B$$

$\boxed{f \text{ непр. у } \tfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 = A + B}$ (2)

f непр. на $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $\left.\begin{matrix} 2 = -A + B \\ 0 = A + B \end{matrix}\right\}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{A = -1, \ B = 1}$

$1 - \sin x, \ |x| < \frac{\pi}{2}$ ✓

4. Да ли су тачни искази?

(а) $(\forall f)(\forall g)$ f има границу у x_0, g непр у x_0 $\Rightarrow$ $f+g$ има границу у x_0 T ✓

(б) −||− f има границу у x_0, g има границу у x_0 $\not\Rightarrow$ $f+g$ има границу у x_0 $\perp$

(в) −||− f има границу у x_0, g има границу у x_0 $\not\Rightarrow$ $f-g$ нема границу у x_0 $\perp$

(а) ППС $\exists f$ има границу у x_0
$\exists g$ непр. у x_0
и $f+g$ непр. у x_0

$$f(x) = \underbrace{\underbrace{(f+g)(x)}_{\text{непр. } x_0} - \underbrace{g(x)}_{\text{непр. } x_0}}_{}$$

T $\Rightarrow$ разлика непр у x_0

$\Rightarrow$ (а) је тачно!

(б) није тачно!
нпр. $f(x)=[x]$ има границу у 0
$g(x)=1-[x]$ −||−
$(f+g)(x)=1$ нема границу у 0

(в) није тачно
$f(x)=[x]$
$g(x)=2[x]$
имају границу у 0

$f(x)-g(x) = -[x]$ − има границу у 0

5. $f(x)=\operatorname{sgn}x$

$g(x)=1+x-[x]$

$g\circ f$ и $f\circ g$ - испитати непр.

$$g\circ f(x)=g(\operatorname{sgn}x)=1+\cancel{\operatorname{sgn}x}-\underbrace{[\operatorname{sgn}x]}_{\substack{0,1,-1\in\mathbb{Z}\\ =\cancel{\operatorname{sgn}x}}}=1$$

$g(f(x))=1\ ,\forall x$

$\Rightarrow g\circ f$ непр. ф-ја

$$f\circ g(x)=f(1+x-[x])=\operatorname{sgn}(\underbrace{1+\underbrace{x-[x]}_{\geq 0}}_{\geq 1})=1$$

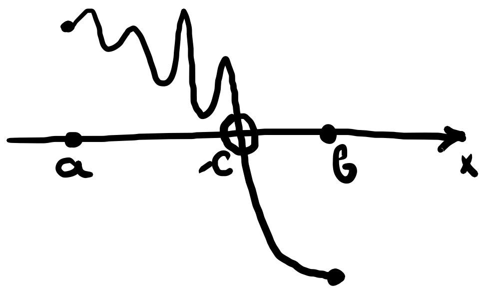
$f\circ g(x)=1,\ \forall x$

$\Rightarrow f\circ g$ непр. ф-ја ✓

Т Болцано-Коши: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ непрекидна

$f(a)$ и $f(b)$ различитог знака $(f(a)\cdot f(b)<0)$
$\quad\ {}^{>0}_{<0}\qquad {}^{<0}_{>0}$

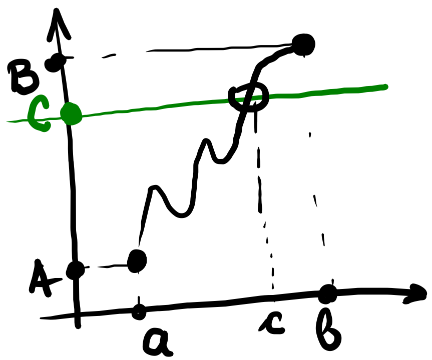
$\Rightarrow \exists c\in(a,b)\ \ f(c)=0.$



Т' Болцано-Коши: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ непрекидна

$f(a)=A,\ f(b)=B \quad C\in[A,B]\ \ (C\in[B,A])$ C између A и B

$\Rightarrow \exists c\in(a,b)$ тд. $f(c)=C$



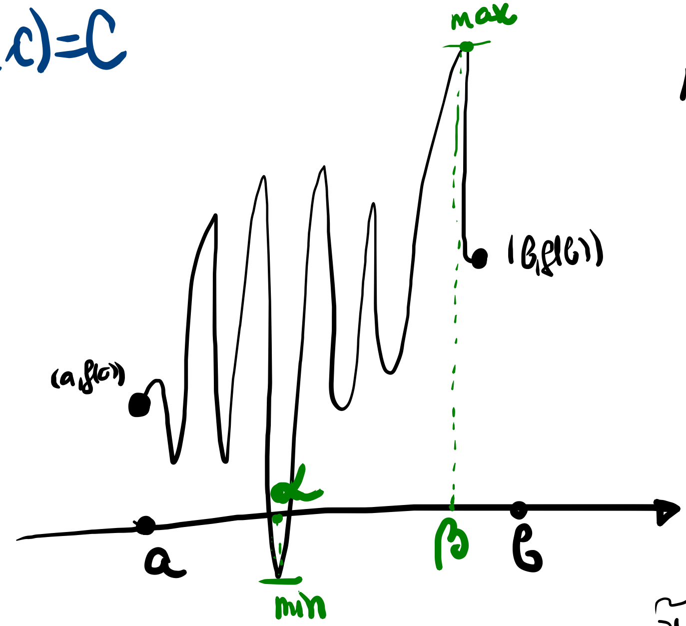
Т Вајерштрас

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ непрекидна

$\Rightarrow f$ достиже min и max на $[a,b]$

тј. $\exists \alpha,\beta\in[a,b]$

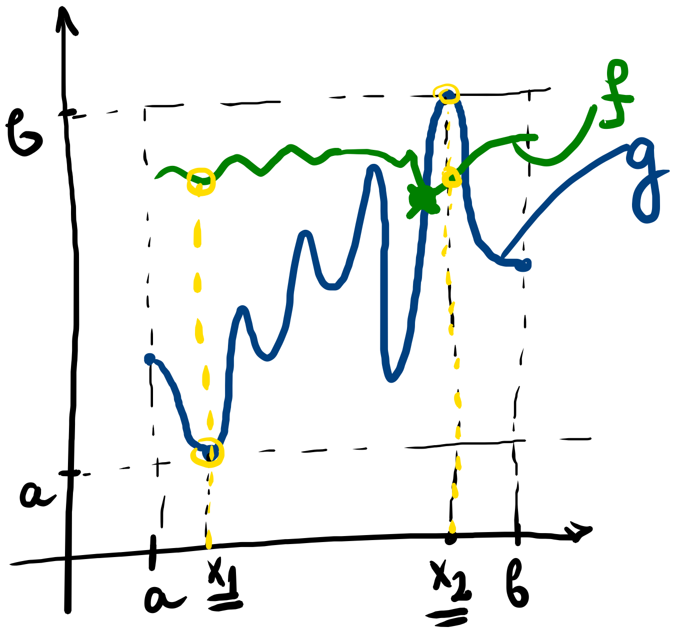
$f(\alpha)=\min\limits_{x\in[a,b]} f(x),\quad f(\beta)=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$



$\Rightarrow$ ако имамо $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ непр.

$\Rightarrow f$ ограничена на $[a,b]$

⑥ $f,g:[a,b]\to[a,b]$ непрекидне
g НА функција
$\Rightarrow \exists x_0\in[a,b]\ \ f(x_0)=g(x_0)$



g НА $\Rightarrow \exists x_1,x_2\in[a,b]$

$g(x_1)=a$

$g(x_2)=b$

Уочимо: $F:[a,b]\to\mathbb{R}$

$F(x)=f(x)-g(x)$ ← желимо да пок. да $\exists x_0$ $F(x_0)=0$

$$F(x_1)=\underbrace{f(x_1)}_{\geq a}-\underbrace{g(x_1)}_{a}\geq 0$$

$$F(x_2)=\underbrace{f(x_2)}_{\leq b}-\underbrace{g(x_2)}_{b}\leq 0$$

F непр као разлика непр.

БК $\Rightarrow$ $\exists x_0\in[a,b]\ \ F(x_0)=0$

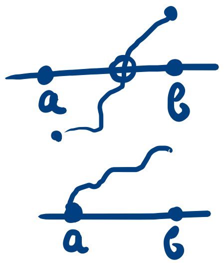
$f(x_0)=g(x_0)$ ✓

!! $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ непр.

$F(a)\leq 0$, $F(b)\geq 0$

$\Rightarrow \exists c\in[a,b]$

$F(c)=0$



Последица: $f:[a,b]\to[a,b]$ непрекидна

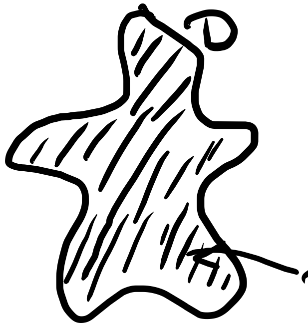
$\Rightarrow \exists x_0\in[a,b]\ \ f(x_0)=x_0$

Д: $g:[a,b]\to[a,b]$

$g(x)=x$ непр. НА

зад(6) $\Rightarrow \exists x_0\ \ f(x_0)=g(x_0)$

$\boxed{f(x_0)=x_0}$ $\blacksquare$



$f:D\to D$ непр. ☺

$\Rightarrow \exists x_0\in D\ \ f(x_0)=x_0$

$D\approx$ диск ●

за вежбу:

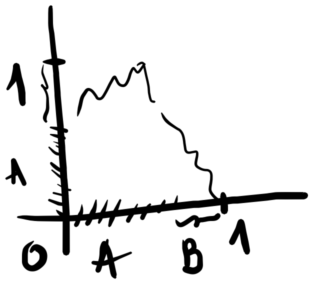
Да ли постоји подела $[0,1]=A\sqcup B$

и ф-ја $f:[0,1]\to[0,1]$ непр.

т.д. $f(A)\subset B$ и $f(B)\subset A$?

$A\cup B=[0,1]$

$A\cap B=\emptyset$



7. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ непр.

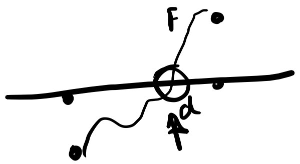
$\exists c\in\mathbb{R}\ \ f(f(c))=c$

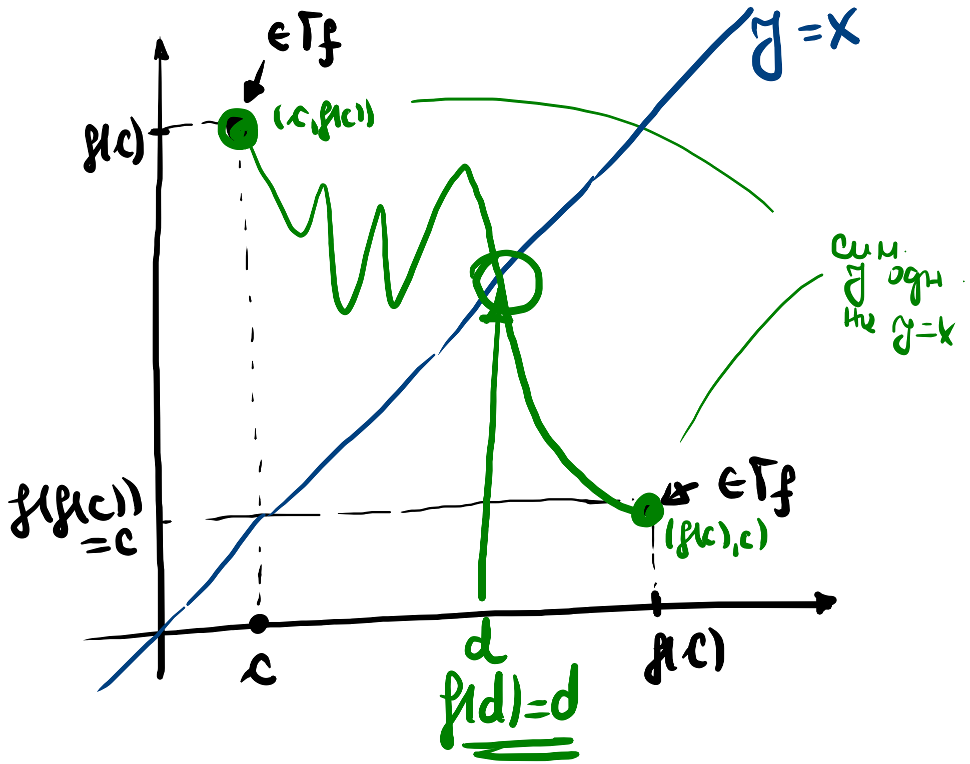
Док. да $\exists d\in\mathbb{R}$ тд. $f(d)=d$.

$F(x)=f(x)-x$

$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ непр као разлика непр.

? $\exists d\ \ F(d)=0$





$F(c)=f(c)-c$ ← разл знака или оба 0

$F(f(c)) = \underbrace{f(f(c))}_{=c}-f(c) = c-f(c)$ $\Rightarrow F(c)\cdot F(f(c))\leq 0$

БК $\Rightarrow$ $\exists d\ \ F(d)=0$

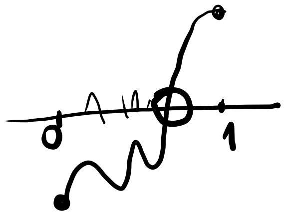
$\boxed{f(d)=d}$

✓ □

8. $7x^5-5x^3+3x-2=\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ (*)

Док. да једн. има решение на $(0,1)$.

$$\Leftrightarrow \underbrace{7x^5-5x^3+3x-2-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}_{F(x)}=0$$



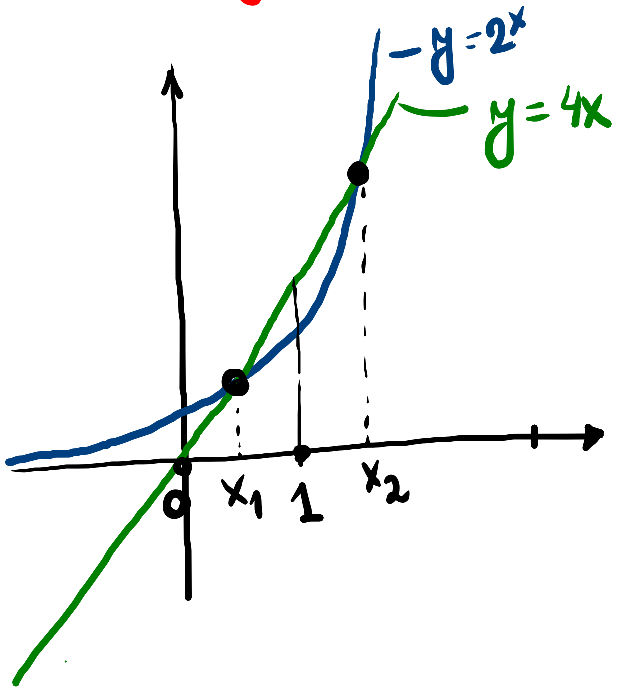
$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ непр.

$$\left.\begin{aligned} F(0) &= -2-\sin 0 = -2 < 0 \\ F(1) &= 7-5+3-2-\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1} = 2 > 0 \end{aligned}\right\} \xRightarrow[\text{Б.К.}]{[0,1]} \exists x_0 \in (0,1)$$

$F(x_0)=0$

решение (*) $\square$

9. Док. да: $2^x = 4x$ има бар 2 решења на $(0,+\infty)$.



$F: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$

$F(x) = 2^x - 4x$ непр. ✓

[0,1]

$$\left.\begin{array}{l} F(0) = 2^0 - 4\cdot 0 = 1 > 0 \\ F(1) = 2^1 - 4\cdot 1 = -2 < 0 \\ F \text{ непр. на } [0,1] \end{array}\right\} \overset{\text{Б.К.}}{\Longrightarrow} \exists x_1 \in (0,1) \quad F(x_1) = 0$$

[1,5]

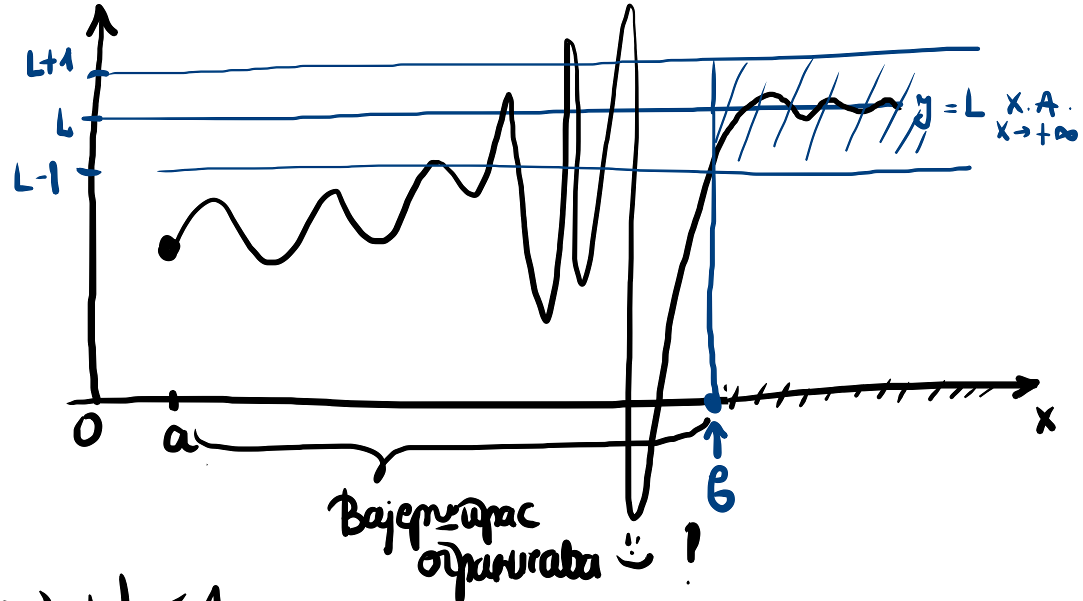
$$\left.\begin{array}{l} F(1) = -2 < 0 \\ F(5) = 2^5 - 4\cdot 5 = 12 > 0 \\ [1,5] \text{ непр.} \end{array}\right\} \overset{\text{Б.К.}}{\Longrightarrow} \exists x_2 \in (1,5) \quad F(x_2) = 0.$$

□

10. $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ непр. $(a\in\mathbb{R})$

$\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$

Док. да је f ограничена на $[a,+\infty)$.



$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \overset{\varepsilon=1}{\Longrightarrow} (\exists b>0)(\forall x\geq b)\ |f(x)-L|<1$$

$$\boxed{L-1 < f(x) < L+1,\ \forall x \geq b}$$

$$f \text{ непр. на } [a,b] \overset{\text{Вајерштрас}}{\Longrightarrow} f \text{ огр. на } [a,b] \text{ тј. } \exists\, m, M \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\forall x\in[a,b]\quad m \leq f(x) \leq M}$$

$$\Longrightarrow f \text{ огр. на } [a,+\infty)$$

$\forall x \geq a$

$$\min\{L-1, m\} \leq f(x) \leq \max\{L+1, M\}$$

✓

11. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ непр. и ограничена

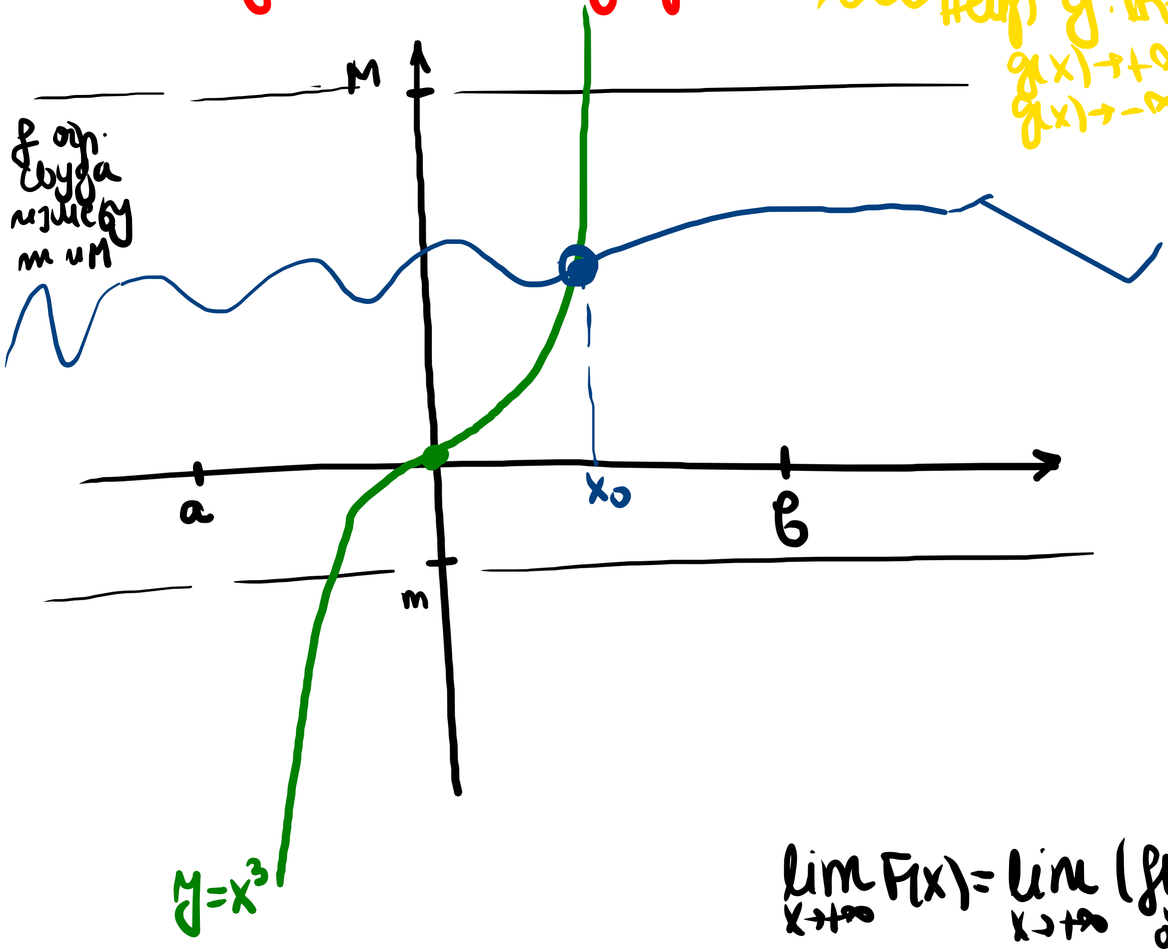
Док. да $\exists x_0\in\mathbb{R}$ т.ч. $f(x_0)=x_0^3$

⌐ $f(x)=x^3$ док. да $\exists$ реш. ⌙

непр $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

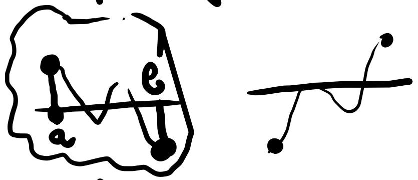
$g(x)\to+\infty,\ x\to+\infty$

$g(x)\to-\infty,\ x\to-\infty$



$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$F(x)=\underset{\text{непр.}}{f(x)}-x^3$ – непрекъсната



$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=\lim_{x\to-\infty}\Big(\underbrace{f(x)}_{\text{огр.}}-\underbrace{x^3}_{\to-\infty}\Big)=+\infty$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\exists a<0\quad F(a)>0}$

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}\Big(\underbrace{f(x)}_{\text{огр.}}-\underbrace{x^3}_{\to+\infty}\Big)=-\infty$$

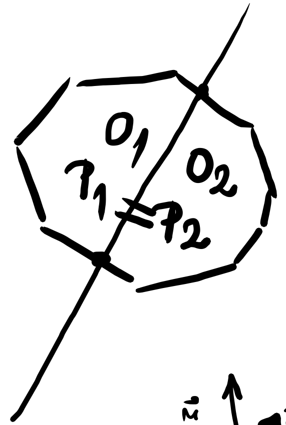
$\Rightarrow$ $\boxed{\exists b>0\quad F(b)<0}$

$[a,b]$ F непр. $\Rightarrow$ (Б.К.) $\exists x_0\in(a,b)$

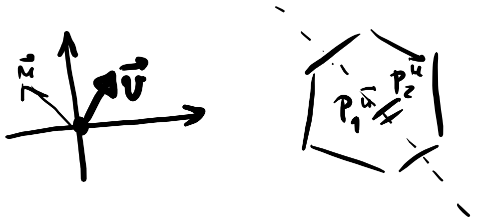
$F(x_0)=0$

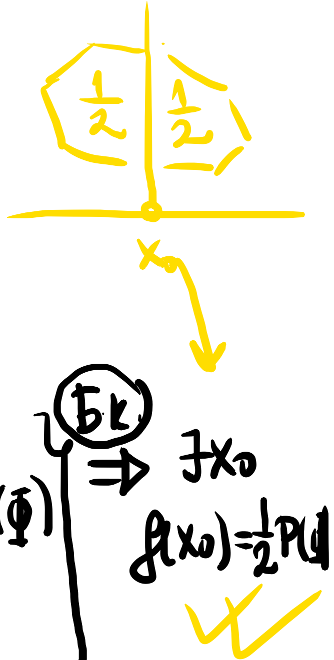
$f(x_0)=x_0^3$ □

* Φ-конвексан полигон у равни
Док. да ∃ права која дели Φ на два дела једнаког обима и једнаке површине.

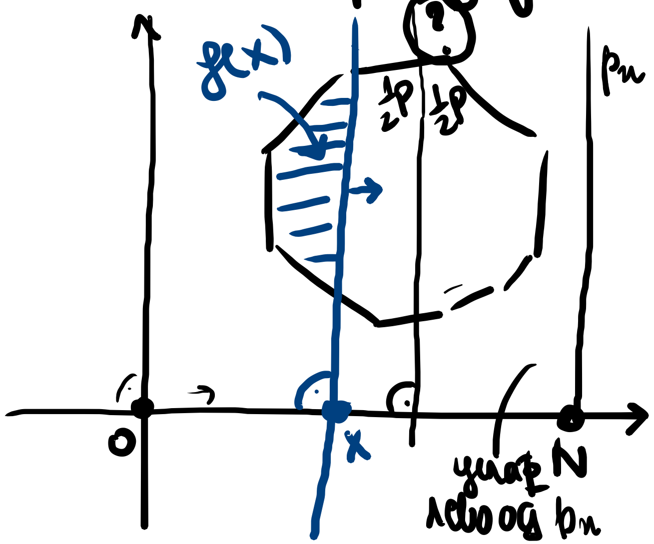


(I) За сваки правац у равни ($\vec{v} \neq 0$)
∃ права паралелна том правцу ($\parallel \vec{v}$)
која дели Φ на два дела једнаке површине.





БУ.О. $\vec{v}$ - правац y-осе



$f : [0, N] \to \mathbb{R}$

$f(x) :=$ површина дела Φ лево од праве нормалне на x-осу у тачки x

* цело Φ у I квадранту

$f(0) = 0$
$f(N) = P(\Phi)$
f непр. на $[0, N]$

$0 < \frac{1}{2}P(\Phi) < P(\Phi)$

БК $\Rightarrow \exists x_0$
$f(x_0) = \frac{1}{2}P(\Phi)$